L. Landau e E. Lifshitz

Fisica teorica

Tomo 2

Teoria dei campi

Editori Riuniti Edizioni Mir

Lev D. Landau Evgenij M. Lifšits

Fisica teorica 2

Editori Riuniti Edizioni Mir

Lev D. Landau Evgenij M. Lifšits

Teoria dei campi

Editori Riuniti Edizioni Mir

I edizione, I ristampa: 1985
Titolo originale: *Teorija polja*
© Copyright by Nauka, Mosca
Traduzione di Alexandr Machov
© Copyright by Editori Riuniti Edizioni Mir, 1976
Via Serchio 9/11-00198 Roma

Prefazione alla sesta edizione . . . . . p. 9
Dalla prefazione alla prima e alla seconda edizioni 10
Alcune notazioni 11

CAPITOLO I. PRINCIPIO DI RELATIVITÀ

§ 1. *Velocità di propagazione delle interazioni* 13
§ 2. *Intervallo* 16
§ 3. *Tempo proprio* 22
§ 4. *Trasformazione di Lorentz* 24
§ 5. *Trasformazione della velocità* 28
§ 6. *Quadrivettori* 30
§ 7. *Quadrivelocità* 41

CAPITOLO II. MECCANICA RELATIVISTICA

§ 8. *Principio di minima azione* 43
§ 9. *Energia ed impulso* 45
§ 10. *Trasformazione della funzione di distribuzione* 49
§ 11. *Decadimento di particelle* 51
§ 12. *Sezione d'urto invariante* 56
§ 13. *Urti elastici tra particelle* 58
§ 14. *Momento angolare* 64

CAPITOLO III. CARICA IN UN CAMPO ELETTROMAGNETICO

§ 15. *Particelle elementari nella teoria della relatività* 67
§ 16. *Quadripotenziale del campo* 69
§ 17. *Equazioni del moto di una carica in un campo* 71
§ 18. *Invarianza di gauge* 75
§ 19. *Campo elettromagnetico costante* 76
§ 20. *Moto in un campo elettrico uniforme e costante* 78
§ 21. *Moto in un campo magnetico uniforme e costante* 79
§ 22. *Moto di una carica in campi elettrico e magnetico uniformi e costanti* 83
§ 23. *Tensore del campo elettromagnetico* 88
§ 24. *Trasformazione di Lorentz per il campo* 90
§ 25. *Invarianti del campo* 92

CAPITOLO IV. EQUAZIONI DEL CAMPO ELETTROMAGNETICO

§ 26. *Prima coppia delle equazioni di Maxwell* . . . . . p. 95
§ 27. *L'azione per il campo elettromagnetico* 97
§ 28. *Quadricorrente* 99
§ 29. *Equazione di continuità* 102
§ 30. *Seconda coppia delle equazioni di Maxwell* 105
§ 31. *Densità e flusso di energia* 107
§ 32. *Tensore energia-impulso* 109
§ 33. *Tensore energia-impulso del campo elettromagnetico* 114
§ 34. *Teorema del viriale* 118
§ 35. *Tensore energia-impulso per corpi macroscopici* 120

CAPITOLO V. CAMPO ELETTROMAGNETICO COSTANTE

§ 36. *Legge di Coulomb* 123
§ 37. *Energia elettrostatica delle cariche* 124
§ 38. *Campo creato da una carica in moto uniforme* 127
§ 39. *Moto in un campo coulombiano* 129
§ 40. *Momento di dipolo* 132
§ 41. *Momenti di multipolo* 134
§ 42. *Sistema di cariche in un campo esterno* 138
§ 43. *Campo magnetico costante* 140
§ 44. *Momento magnetico* 142
§ 45. *Teorema di Larmor* 144

CAPITOLO VI. ONDE ELETTROMAGNETICHE

§ 46. *Equazione d'onda* 147
§ 47. *Onde piane* 149
§ 48. *Onda piana monocromatica* 154
§ 49. *Decomposizione spettrale* 160
§ 50. *Luce parzialmente polarizzata* 161
§ 51. *Decomposizione del campo elettrostatico* 168
§ 52. *Oscillazioni proprie del campo* 169

CAPITOLO VII. PROPAGAZIONE DELLA LUCE

§ 53. *Ottica geometrica* 175
§ 54. *Intensità* 179
§ 55. *Iconale angolare* 181
§ 56. *Fasci sottili di raggi* 184
§ 57. *Rappresentazione con fasci larghi di raggi* 191
§ 58. *I limiti dell'ottica geometrica* 193
§ 59. *Diffrazione* 195
§ 60. *Diffrazione di Fresnel* 202
§ 61. *Diffrazione di Fraunhofer* 206

CAPITOLO VIII. CAMPO DI CARICHE IN MOTO

§ 62. *Potenziali ritardati* . . . . . p. 212
§ 63. *Potenziali di Lienard-Wiechert* 215
§ 64. *Decomposizione spettrale dei potenziali ritardati* 218
§ 65. *La lagrangiana limitata ai termini del secondo ordine* 221

CAPITOLO IX. RADIAZIONE ELETTROMAGNETICA

§ 66. *Campo di un sistema di cariche a grandi distanze* 227
§ 67. *Radiazione di dipolo* 231
§ 68. *Radiazione di dipolo dovuta a collisione di particelle* 235
§ 69. *Radiazione di frenamento di basse frequenze* 238
§ 70. *Radiazione dovuta all'interazione coulombiana* 231
§ 71. *Radiazione di quadrupolo e di dipolo magnetico* 249
§ 72. *Campo di radiazione a piccole distanze* 252
§ 73. *Radiazione emessa da una carica in moto rapido* 257
§ 74. *Radiazione di frenamento in un campo magnetico* 262
§ 75. *Frenamento per emissione di radiazione* 269
§ 76. *Frenamento per emissione di radiazione nel caso relativistico* . . . 277
§ 77. *Decomposizione spettrale della radiazione nel caso ultrarelativistico* 280
§ 78. *Diffusione da cariche libere* 284
§ 79. *Diffusione di onde di basse frequenze* 290
§ 80. *Diffusione di onde di alte frequenze* 292

CAPITOLO X. PARTICELLA IN UN CAMPO GRAVITAZIONALE

§ 81. *Campo gravitazionale in meccanica non relativistica* 296
§ 82. *Campo gravitazionale in meccanica relativistica* 298
§ 83. *Coordinate curvilinee* 301
§ 84. *Distanze e intervalli di tempo* 306
§ 85. *Derivazione covariante* 312
§ 86. *Relazione tra i simboli di Christoffel e il tensore metrico* 317
§ 87. *Moto di una particella in un campo gravitazionale* 321
§ 88. *Campo gravitazionale costante* 325
§ 89. *Rotazione* 333
§ 90. *Equazioni dell'elettrodinamica in presenza di un campo gravitazionale* 335

CAPITOLO XI. EQUAZIONI DEL CAMPO GRAVITAZIONALE

§ 91. *Tensore di curvatura* 339
§ 92. *Proprietà del tensore di curvatura* 343
§ 93. *L'azione per un campo gravitazionale* 351
§ 94. *Tensore energia-impulso* 354
§ 95. *Equazioni di Einstein* 360
§ 96. *Pseudotensore energia-impulso del campo gravitazionale* 367
§ 97. *Sistema di riferimento sincrono* 375
§ 98. *Rappresentazione quaternaria delle equazioni di Einstein* 382

CAPITOLO XII. CAMPO DEI GRAVI

§ 99. *Legge di Newton* 386
§ 100. *Campo gravitazionale a simmetria centrale* 390
§ 101. *Moto in un campo gravitazionale a simmetria centrale* 399
§ 102. *Collasso gravitazionale di un corpo sferico* 403
§ 103. *Collasso gravitazionale di una sfera incoerente* 411
§ 104. *Collasso gravitazionale di corpi non sferici e di corpi rotanti* . . 418
§ 105. *Campo gravitazionale a grandi distanze* 429
§ 106. *Equazioni del moto di un sistema di corpi in seconda approssimazione* 438

CAPITOLO XIII. ONDE GRAVITAZIONALI

§ 107. *Onde gravitazionali deboli* 447
§ 108. *Onde gravitazionali nello spazio-tempo curvo* 450
§ 109. *Onda gravitazionale forte* 453
§ 110. *Irraggiamento di onde gravitazionali* 457

CAPITOLO XVI. COSMOLOGIA RELATIVISTICA

§ 111. *Spazio isotropo* 464
§ 112. *Modello isotropo chiuso* 469
§ 113. *Modello isotropo aperto* 474
§ 114. *Spostamento verso il rosso* 478
§ 115. *Stabilità gravitazionale dell'Universo isotropo* 486
§ 116. *Spazi uniformi* 493
§ 117. *Modello anisotropo piatto* 500
§ 118. *Regime oscillatorio di avvicinamento ad un punto singolare* . . . 505
§ 119. *Singolarità rispetto al tempo nella soluzione cosmologica generale delle equazioni di Einstein* 511

Indice analitico 516

Prefazione alla sesta edizione

La prima edizione di questo libro è uscita quasi trent'anni fa. Nelle edizioni successive il libro è stato rielaborato e ampliato; ora il suo volume è quasi raddoppiato rispetto alla prima edizione. Non è mai sorta però la necessità di modificare il metodo della costruzione della teoria proposto da Landau e lo stile dell'esposizione da egli ispirato, il cui tratto fondamentale è la tendenza alla chiarezza e alla semplicità. Anche nelle rielaborazioni del testo, che ho dovuto fare da solo, ho sempre cercato di conservare il piú possibile lo stile originale.

In confronto alla precedente edizione i primi nove capitoli del libro dedicati all'elettrodinamica sono rimasti quasi immutati. Quanto ai capitoli dedicati alla teoria del campo gravitazionale, essi sono stati rielaborati e ampliati. Da un'edizione all'altra il materiale di questi capitoli è stato sostanzialmente ampliato, cosicché è sorta la necessità di riordinare e di sistematizzare il materiale su questo argomento.

Vorrei esprimere i piú sentiti ringraziamenti ai miei colleghi, troppi per poterli ricordare qui tutti, i quali con osservazioni e consigli mi hanno aiutato ad eliminare deficienze nel libro e a portarvi alcune correzioni. Senza questi consigli, senza quella disponibilità ad aiutarmi sempre in qualsiasi problema, il lavoro sulla nuova edizione del presente Corso sarebbe risultato molto piú difficile.

Esprimo un ringraziamento particolare a L. P. Pitaievskij con cui ho discusso sempre i problemi sorti, nonché a V. A. Belinskij per il suo aiuto nella verifica delle formule e nella correzione delle bozze.

Dicembre 1972 **E. Lifšits**

Dalla prefazione alla prima e alla seconda edizioni

Il presente volume è dedicato all'esposizione della teoria dei campi elettromagnetico e gravitazionale, ossia all'elettrodinamica c alla teoria della relatività generale. Una teoria completa, logicamente articolata, del campo elettromagnetico include in sé la teoria della relatività ristretta. Abbiamo quindi posto quest'ultima alla base dell'esposizione di tutta la teoria. Come punto di partenza per la deduzione delle relazioni fondamentali vengono presi i principi variazionali che permettono di raggiungere una maggiore generalità, unicità e, in sostanza, una maggiore semplicità di esposizione.

In accordo con il piano generale del nostro Corso di fisica teorica (di cui fa parte questo volume) non abbiamo qui toccato per niente i problemi inerenti all'elettrodinamica dei mezzi continui, limitandoci all'esposizione dell'elettrodinamica «microscopica», cioè dell'elettrodinamica nel vuoto e delle cariche puntuali.

La lettura del libro richiede la conoscenza dei fenomeni elettromagnetici al livello del corso generale di fisica. È anche indispensabile una buona conoscenza dell'analisi vettoriale. Non è richiesta al lettore la conoscenza dell'analisi tensoriale che viene esposta parallelamente alla teoria dei campi gravitazionali.

Mosca, dicembre 1939

Mosca, giugno 1947 L. Landau e E. Lifšits

Alcune notazioni

Grandezze tridimensionali

Gli indici tensoriali tridimensionali vengono indicati con le lettere greche
Elementi di volume, di area e di lunghezza: dV, $d\mathbf{f}$, $d\mathbf{l}$
Impulso e energia di una particella: $\mathbf{p}$ e $\mathscr{E}$
Hamiltoniana: $\mathscr{H}$
Potenziale scalare e potenziale di un campo elettromagnetico: φ e $\mathbf{A}$
Vettore campo elettrico e vettore campo magnetico: $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$
Densità di carica e di corrente: ρ e $\mathbf{j}$
Momento di dipolo elettrico: $\mathbf{d}$
Momento di dipolo magnetico: $\mathbf{m}$

Grandezze quadridimensionali

Gli indici tensoriali quadridimensionali vengono indicati con le lettere i, k, l, . . . che prendono i valori 0, 1, 2, 3
La metrica adottata è: $(+ \; - \; - \; -)$
La regola di innalzamento e di abbassamento degli indici è data alla pag. 31
Le componenti dei quadrivettori si scrivono nella forma: $A^i = (A^0, \mathbf{A})$
Tensore unità antisimmetrico di rango quattro: e^{iklm}, dove $e^{0123} = 1$ (la definizione alla pag. 34)
Elemento di volume quadridimensionale: $d\Omega = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$
Elemento di ipersuperficie: dS^i (la definizione alla pag. 38)
Raggio quadrivettore: $x^i = (ct, \mathbf{r})$
Quadrivelocità: $u^i = d^i x/ds$
Quadriimpulso: $p^i = (\mathscr{E}/c, \mathbf{p})$
Quadricorrente: $j^i = (c\rho, \rho\mathbf{v})$
Quadripotenziale del campo elettromagnetico: $A^i = (\varphi, \mathbf{A})$
Quadritensore elettromagnetico: $F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}$ (la relazione tra le componenti di F_{ik} e le componenti $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ è definita alla pag. 89)
Quadritensore energia-impulso: T^{ik} (la definizione delle sue componenti è data alla pag 113)

Capitolo I

PRINCIPIO DI RELATIVITÀ

§ 1. *Velocità di propagazione delle interazioni*

Per la descrizione dei processi che avvengono nella natura occorre un *sistema di riferimento*. Con sistema di riferimento si intende l'insieme di un sistema di coordinate, che serve a determinare la posizione delle particelle nello spazio, e di un orologio per indicare il tempo legato al sistema stesso.

Esistono sistemi di riferimento nei quali il moto libero dei corpi, cioè il moto dei corpi non sottoposti all'azione di forze esterne, avviene a velocità costante. Tali sistemi di riferimento sono detti *inerziali*.

Se due sistemi di riferimento si trovano l'uno rispetto all'altro in moto rettilineo uniforme e se uno di essi è inerziale, è evidente che è inerziale anche il secondo (ogni moto libero anche in questo sistema sarà rettilineo ed uniforme). Esiste quindi un numero arbitrario di sistemi di riferimento inerziali, che si trovano l'uno rispetto all'altro in moto traslatorio uniforme.

L'esperienza dimostra la validità del cosiddetto *principio di relatività*. Secondo questo principio tutte le leggi della natura sono identiche in tutti i sistemi di riferimento inerziali. In altri termini, le equazioni che esprimono le leggi della natura sono invarianti rispetto alle trasformazioni delle coordinate e del tempo, corrispondenti ad un cambiamento di riferimento inerziale. Ciò significa che l'equazione descrivente una legge della natura, espressa mediante le coordinate e il tempo, ha la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento inerziali.

L'interazione di particelle materiali viene descritta in meccanica classica mediante l'energia potenziale d'interazione, la quale è una funzione delle coordinate delle particelle interagenti. È facile vedere che questo metodo di descrizione presuppone valida l'ipotesi che le interazioni si propaghino istantaneamente. Infatti, secondo questa descrizione, le forze che le altre particelle esercitano su una particella data dipendono, in ogni istante di tempo, soltanto dalla posizione delle particelle in questo stesso istante. Il cambiamento della posizione di qualsiasi particella interagente si riflette istantaneamente sulle altre particelle.

L'esperienza mostra, tuttavia, che non esistono nella natura interazioni istantanee. Per questa ragione, la meccanica, che parte dall'ipotesi della propagazione istantanea delle interazioni, contiene una certa imprecisione. In realtà, se uno dei corpi interagenti subisce qualche cambiamento, la ripercussione su un altro corpo del sistema si produrrà dopo un certo intervallo di tempo. Soltanto alla fine di questo intervallo di tempo il secondo corpo subirà processi dovuti a questo cambiamento. Dividendo la distanza tra i due corpi per questo intervallo di tempo, troviamo la « velocità di propagazione delle interazioni ».

Notiamo che questa velocità si potrebbe piú propriamente chiamare velocità massima di propagazione delle interazioni. Essa determina soltanto quell'intervallo di tempo necessario affinché il cambiamento subíto da un corpo cominci a manifestarsi su un altro corpo. È evidente che l'esistenza di una velocità massima di propagazione delle interazioni significa anche che non può esistere nella natura un moto con velocità superiore a questa. In effetti, se tale moto potesse aver luogo, lo si potrebbe utilizzare per realizzare una interazione con velocità superiore alla velocità massima di propagazione delle interazioni.

Dell'interazione, che si propaga da una particella ad un'altra, si parla spesso come di un « segnale » emesso dall'una per « informare » l'altra circa un cambiamento da essa subíto. Si parla allora della velocità di propagazione delle interazioni come della « velocità di un segnale ».

Dal principio di relatività segue, in particolare, che la velocità di propagazione delle interazioni è la stessa in tutti i sistemi inerziali di riferimento. La velocità di propagazione delle interazioni è quindi una costante universale.

Come si vedrà in seguito, questa velocità costante è anche la velocità di propagazione della luce nel vuoto; per questo la chiamano *velocità della luce*. Essa viene indicata di solito con la lettera c, e il suo valore numerico è

$$c = 2{,}998 \cdot 10^{10} \ cm/s. \tag{1,1}$$

Il valore elevato di questa velocità spiega il fatto che nella maggioranza dei casi la meccanica classica è in pratica sufficientemente precisa. Le velocità con le quali abbiamo generalmente a che fare sono talmente piccole rispetto a c, che la precisione dei risultati praticamente non viene alterata se supponiamo la velocità della luce infinita.

Il principio di relatività, insieme al postulato dell'esistenza di una velocità limite di propagazione delle interazioni, è chiamato *principio di relatività di Einstein* (fu enunciato da Einstein nel 1905); ricordiamo qui che il principio di relatività di Galilei considera infinita la velocità di propagazione delle interazioni.

La meccanica basata sul principio di relatività di Einstein (lo chiameremo semplicemente principio di relatività) è detta *relativistica*. Nel caso limite in cui le velocità dei corpi in moto sono piccole rispetto alla velocità della luce, si può trascurare l'effetto di una velocità limite di propagazione delle interazioni sul moto. La meccanica relativistica coincide allora con la meccanica ordinaria che parte dall'ipotesi che la propagazione delle interazioni sia istantanea; questa meccanica si chiama newtoniana o classica. Il passaggio limite dalla meccanica relativistica alla meccanica classica può essere effettuato formalmente ponendo nelle formule della meccanica relativistica $c \to \infty$.

Già in meccanica classica lo spazio è relativo, cioè le relazioni spaziali tra differenti eventi dipendono soltanto dal sistema di riferimento nel quale vengono descritti. L'asserzione che due eventi avvengono ad istanti differenti in uno stesso punto dello spazio o, in generale, ad una determinata distanza l'uno dall'altro, acquista un senso soltanto se è indicato il sistema di riferimento al quale questa asserzione si riferisce.

Il tempo in meccanica classica è invece assoluto; in altri termini, si suppone che le proprietà del tempo non dipendano dal sistema di riferimento; il tempo è identico per tutti i sistemi di riferimento. Ciò significa che se due eventi arbitrari sono simultanei per un osservatore, essi sono ugualmente simultanei per ogni altro osservatore. In generale, l'intervallo di tempo tra due eventi dati dev'essere identico in tutti i sistemi di riferimento.

È facile a questo punto convincersi quanto sia profonda la contraddizione tra il concetto di tempo assoluto e il principio einsteiniano di relatività. È sufficiente ricordare a questo proposito che in meccanica classica, fondata sul concetto di tempo assoluto, è valida la legge universalmente nota di composizione delle velocità secondo la quale la velocità di un moto composto è semplicemente uguale alla somma (vettoriale) delle velocità componenti. Essendo universale, questa legge dovrebbe essere applicabile anche alla propagazione delle interazioni. Risulterebbe allora che la velocità di propagazione in diversi sistemi di riferimento deve essere diversa, ciò che è in disaccordo con il principio di relatività. L'esperienza però conferma interamente sotto questo aspetto il principio di relatività. Le misure eseguite per la prima volta da Michelson (1881) rivelarono la totale indipendenza della velocità della luce dalla direzione della sua propagazione; secondo i postulati della meccanica classica, la velocità della luce nel verso della traslazione della Terra dovrebbe essere differente dalla velocità nel verso opposto.

Cosí, il principio di relatività conduce a risultati secondo i quali il tempo non è assoluto. Il tempo scorre diversamente in diversi sistemi di riferimento. Di conseguenza, l'asserzione che due eventi dati sono separati da un intervallo di tempo determinato acquista

un significato solo se è indicato il sistema di riferimento al quale si riferisce questa asserzione. In particolare, gli eventi simultanei in un certo sistema di riferimento non lo saranno in un altro sistema.

Per illustrare questo fatto, facciamo un esempio semplice.

Consideriamo due sistemi di riferimento inerziali K e K' con rispettivi assi coordinati xyz ed $x'y'z'$; il sistema inerziale K' si sposta rispetto al sistema K verso destra lungo gli assi x ed x' (fig. 1).

Supponiamo che da un punto A sull'asse x' vengano emessi segnali in due direzioni opposte. Siccome la velocità di propagazione del

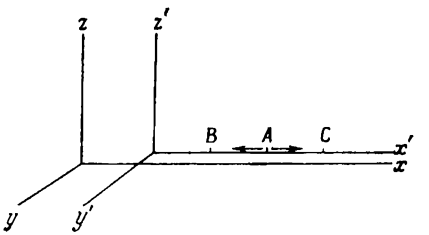

Fig. 1

segnale nel sistema K', come in qualsiasi altro sistema inerziale, è la stessa in ambedue le direzioni ed è uguale a c, i segnali giungeranno nei punti B e C equidistanti da A in uno stesso istante (nel sistema K').

Tuttavia, è facile vedere che questi due eventi (arrivo del segnale in B e C) non saranno affatto simultanei per un osservatore che si trovi nel sistema K. In effetti, la velocità dei segnali relativamente al sistema K, in accordo con il principio di relatività, è sempre uguale a c, e poiché il punto B si muove (relativamente al sistema K) incontro al segnale emesso, mentre il punto C si allontana dal segnale (emesso da A verso C), nel sistema K il segnale arriverà prima nel punto B e poi nel punto C.

Quindi il principio di relatività di Einstein introduce cambiamenti fondamentali nei concetti principali della fisica. I concetti di spazio e di tempo che abbiamo appreso dall'esperienza di tutti i giorni sono approssimativi poiché nella vita comune noi abbiamo a che fare soltanto con velocità molto piccole rispetto alla velocità della luce.

§ 2. *Intervallo*

Useremo spesso in seguito il concetto di *evento*. Un evento è definito dal punto e dall'istante in cui avviene. Un evento relativo ad una particella materiale è quindi determinato dalle

tre coordinate di questa particella e dall'istante in cui esso si è verificato.

Per ragioni di chiarezza, è talvolta comodo utilizzare un immaginario spazio quadridimensionale sui cui assi si pongono le tre coordinate spaziali e il tempo. In questo spazio un evento sarà rappresentato da un punto. Tali punti sono detti *punti d'universo*. Ad ogni particella corrisponde una certa linea (*linea d'universo*) in questo spazio quadridimensionale. I punti di questa linea definiscono le coordinate della particella in tutti gli istanti. Una particella materiale in moto rettilineo uniforme ha per linea d'universo una retta.

Traduciamo ora il principio d'invarianza della velocità della luce in linguaggio matematico. A tale scopo consideriamo due sistemi di riferimento K e K' che si muovono l'uno rispetto all'altro con velocità costante. Scegliamo gli assi coordinati in modo tale che gli assi x ed x' coincidano, e gli assi y e z siano paralleli agli assi y' e z'; indichiamo con t e t' il tempo rispettivamente nei sistemi K e K'.

Supponiamo che il primo evento consista nell'emissione di un segnale che si propaga alla velocità della luce da un punto con coordinate x_1, y_1, z_1 all'istante t_1 nel sistema di riferimento K. Osserveremo la propagazione di questo segnale dal sistema K. Supponiamo che il secondo evento consista nell'arrivo del segnale nel punto x_2, y_2, z_2 all'istante t_2. La velocità di propagazione del segnale è c e, di conseguenza, il cammino percorso è uguale a $c\,(t_2 - t_1)$. D'altra parte, questa stessa distanza è $[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{1/2}$. Quindi possiamo scrivere la seguente relazione tra le coordinate di entrambi gli eventi nel sistema K:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2\,(t_2 - t_1)^2 = 0. \qquad (2,1)$$

Gli stessi eventi, ossia la propagazione del segnale, si possono osservare anche dal sistema K'. Siano x'_1, y'_1, z'_1, t'_1 le coordinate del primo evento nel sistema K', e x'_2, y'_2, z'_2, t'_2 quelle del secondo evento. Essendo la velocità della luce la stessa in K ed in K', abbiamo una relazione analoga alla (2,1):

$$(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2 - c^2\,(t'_2 - t'_1)^2 = 0. \qquad (2,2)$$

Se x_1, y_1, z_1, t_1 ed x_2, y_2, z_2, t_2 sono le coordinate di due eventi arbitrari, la grandezza

$$s_{12} = [c^2\,(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2]^{1/2} \qquad (2,3)$$

si chiama *intervallo* tra questi due eventi.

Dall'invarianza della velocità della luce deriva quindi che se l'intervallo di due eventi è nullo in un sistema di riferimento, esso sarà nullo in qualsiasi altro sistema.

Se due eventi sono infinitamente vicini, il loro intervallo ds si scrive:

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \qquad (2,4)$$

La forma dell'espressione (2,3) o (2,4) permette di considerare l'intervallo dal punto di vista matematico formale come la distanza tra due punti in un immaginario spazio quadridimensionale (sui cui assi poniamo x, y, z e il prodotto ct). Esiste, tuttavia, una differenza sostanziale tra l'espressione di questa grandezza nello spazio quadridimensionale e l'espressione coorrispondente nella geometria ordinaria: il quadrato dell'intervallo si ottiene sommando i quadrati delle differenze delle coordinate rispetto ai diversi assi con segni diversi anziché con segni uguali[1]).

Come abbiamo accennato sopra, se $ds = 0$ in un sistema di riferimento inerziale, si ha $ds' = 0$ anche in un altro sistema. D'altra parte, ds e ds' sono infinitesimi dello stesso ordine. Da queste considerazioni segue che ds^2 e ds'^2 debbono essere proporzionali:

$$ds^2 = a\, ds'^2,$$

dove il coefficiente a può dipendere solamente dal valore assoluto della velocità relativa dei due sistemi inerziali. Esso non può dipendere dalle coordinate e dal tempo; in caso contrario i differenti punti dello spazio e del tempo non sarebbero piú equivalenti, cosa che è in disaccordo con l'uniformità dello spazio e del tempo. Esso non può dipendere neppure dalla direzione della velocità relativa perché ciò sarebbe in contraddizione con l'isotropia dello spazio.

Consideriamo ora tre sistemi di riferimento K, K_1, K_2 e supponiamo che $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{V}_2$ siano le velocità del moto di K_1 e K_2 rispetto a K. Abbiamo allora:

$$ds^2 = a(V_1)\, ds_1^2, \quad ds^2 = a(V_2)\, ds_2^2.$$

Per la stessa ragione possiamo scrivere:

$$ds_1^2 = a(V_{12})\, ds_2^2,$$

dove V_{12} è il valore assoluto della velocità di K_2 rispetto a K_1.

Confrontando queste relazioni, otteniamo:

$$\frac{a(V_2)}{a(V_1)} = a(V_{12}). \qquad (2,5)$$

La grandezza V_{12} dipende non soltanto dai valori assoluti dei vettori $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{V}_2$, ma anche dall'angolo che essi formano. Questo angolo non entra affatto nel primo membro della relazione (2,5). Ne segue dunque che questa relazione può essere valida soltanto se la funzione

---

[1]) La geometria quadridimensionale definita dalla formula quadratica (2,4) è detta *non euclidea* a differenza della geometria euclidea ordinaria. Essa fu introdotta in relazione alla teoria della relatività da *H. Minkowski.*

$a(V)$ si riduce ad una costante, uguale a 1, come risulta dalla stessa relazione.

Abbiamo dunque

$$ds^2 = ds'^2, \tag{2,6}$$

e dall'uguaglianza di intervalli infinitesimi segue l'uguaglianza anche di intervalli finiti: $s = s'$.

Abbiamo ottenuto cosí un risultato di estrema importanza: l'intervallo fra due eventi è uguale in tutti i sistemi di riferimento inerziali, cioè è un invariante rispetto alla trasformazione di un sistema di riferimento inerziale in un qualsiasi altro. Questa invarianza è dunque l'espressione matematica della costanza della velocità della luce.

Supponiamo ancora che x_1, y_1, z_1, t_1 ed x_2, y_2, z_2, t_2 siano le coordinate di due eventi in un sistema di riferimento K. Si domanda se esiste un sistema di riferimento K' nel quale questi due eventi coincidono nello spazio.

Poniamo

$$t_2 - t_1 = t_{12}, \quad (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = l_{12}^2.$$

Il quadrato dell'intervallo tra gli eventi nel sistema K è allora:

$$s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2$$

e nel sistema K':

$$s_{12}'^2 = c^2 t_{12}'^2 - l_{12}'^2,$$

e, in virtú dell'invarianza dell'intervallo,

$$c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2 t_{12}'^2 - l_{12}'^2.$$

Vogliamo che nel sistema K' i due eventi abbiano luogo nello stesso punto, cioè che $l_{12}' = 0$. Allora

$$s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2 t_{12}'^2 > 0.$$

Di conseguenza, il sistema cercato esiste se $s_{12}^2 > 0$, cioè se l'intervallo fra i due eventi è reale. Gli intervalli reali sono detti *del genere tempo*.

Se l'intervallo tra due eventi è del genere tempo, esiste allora un sistema di riferimento nel quale i due eventi sono avvenuti in uno stesso punto. Il tempo trascorso tra questi eventi in questo sistema è:

$$t_{12}' = \frac{1}{c}\sqrt{c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2} = \frac{s_{12}}{c}. \tag{2,7}$$

Quando i due eventi sono relativi allo stesso corpo, il loro intervallo è sempre del genere tempo. In effetti, lo spazio percorso dal corpo tra i due eventi non può essere superiore a ct_{12}, non potendo

la velocità del corpo superare c. Quindi si ha sempre

$$l_{12} < ct_{12}.$$

Vediamo ora se è possibile trovare un sistema di riferimento tale che i due eventi siano simultanei. Come nel caso precedente per i sistemi K e K' si ha: $c^2t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2t_{12}'^2 - l_{12}'^2$. Vogliamo che $t'_{12} = 0$; quindi

$$s_{12}^2 = -l_{12}'^2 < 0.$$

Di conseguenza, il sistema cercato può essere trovato solo nel caso in cui l'intervallo s_{12} tra i due eventi è immaginario. Gli intervalli immaginari sono detti *del genere spazio.*

In tal modo, se l'intervallo tra i due eventi è del genere spazio, esiste un sistema di riferimento nel quale i due eventi sono simultanei. La distanza tra i punti dove questi eventi hanno avuto luogo in questo sistema è:

$$l'_{12} = \sqrt{l_{12}^2 - c^2t_{12}^2} = is_{12}. \qquad (2,8)$$

La classificazione in intervalli del genere tempo e spazio è, in virtú della loro invarianza, un concetto assoluto. Ciò significa

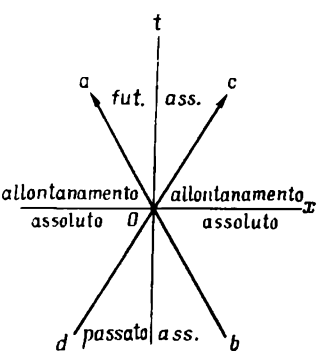

Fig. 2

che la proprietà di un intervallo di essere del genere tempo o spazio non dipende dal sistema di riferimento.

Prendiamo un evento qualunque — chiamiamolo évento O — come origine del tempo e delle coordinate spaziali. In altri termini, il punto d'universo O sarà l'origine delle coordinate nel sistema quadridimensionale sui cui assi poniamo x, y, z, t. Vediamo ora quali sono le relazioni del dato evento O con tutti gli altri eventi. Per fissare le idee, prendiamo una sola coordinata spaziale e il tempo ponendoli sui due assi (fig. 2). Il moto rettilineo uniforme di una particella

che passa per il punto $x = 0$ per $t = 0$ sarà rappresentato da una retta passante per O e formante con l'asse delle t un angolo la cui tangente è uguale alla velocità della particella. Essendo c la piú grande velocità possibile, esiste allora un angolo massimo che questa retta può formare con l'asse delle t. Nella fig. 2 sono tracciate due rette che rappresentano la propagazione di due segnali (alla velocità della luce) in due direzioni opposte passanti per l'evento O (cioè passanti per il punto $x = 0$ quando $t = 0$). Tutte le rette rappresentanti il moto di particelle possono trovarsi soltanto all'interno delle regioni aOc e dOb. Sulle rette ab e cd abbiamo, evidentemente, $x = \pm ct$. Consideriamo dapprima eventi i cui punti d'universo si trovano all'interno della regione aOc. È facile vedere che in tutti i punti di questa regione $c^2t^2 - x^2 > 0$. In altre parole, gli intervalli tra un qualsiasi evento di questa regione e l'evento O sono del genere tempo. Essendo in questa regione $t > 0$, tutti gli eventi in essa avvengono « dopo » l'evento O. Due eventi separati da un intervallo del genere tempo non possono essere simultanei in alcun sistema di riferimento. Di conseguenza, non è neppure possibile trovare un sistema di riferimento dove qualche evento della regione aOc avvenga « prima » dell'evento O, cioè che si abbia $t < 0$. In tal modo, tutti gli eventi della regione aOc sono posteriori ad O, a prescindere dal sistema di riferimento. Questa regione può quindi essere chiamata regione del « futuro assoluto » rispetto all'evento O.

Analogamente, tutti gli eventi della regione bOd sono nel « passato assoluto » rispetto all'evento O, cioè gli eventi di questa regione sono anteriori ad O in tutti i sistemi di riferimento.

Consideriamo infine le regioni dOa e cOb. L'intervallo tra qualsiasi evento di queste regioni e l'evento O è del genere spazio. Qualunque sia il sistema di riferimento, questi eventi avvengono sempre in differenti punti dello spazio. Queste regioni si possono quindi chiamare « regioni di allontanamento assoluto » rispetto ad O. Tuttavia, i concetti di « simultaneo », « prima » e « dopo » per gli eventi di queste regioni sono relativi. Per ogni evento di queste regioni esistono sistemi di riferimento dove esso è posteriore ad O, altri sistemi dove esso è anteriore ad O ed, infine, un sistema di riferimento dove esso è simultaneo ad O.

Notiamo che se si considerano tutte e tre le coordinate spaziali invece di una sola, in luogo di due rette intersecantisi nella fig. 2 si avrebbe un « cono » $x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0$ nel sistema quadridimensionale con coordinate x, y, z, t; l'asse del cono (chiamato *cono di luce*) coincide con l'asse delle t. Le regioni del « futuro assoluto » e del « passato assoluto » sono rappresentate allora dalle due falde interne di questo cono, rispettivamente.

Due eventi possono essere legati da un rapporto di causalità soltanto nel caso in cui il loro intervallo sia del genere tempo. Questo risultato segue immediatamente dall'impossibilità che qual-

che interazione si propaghi piú velocemente della luce. Come abbiamo appena visto, i concetti di « prima » e « dopo » hanno un senso assoluto solo per questi eventi; questa è una condizione indispensabile perché i concetti di causa e di effetto abbiano senso.

§ 3. *Tempo proprio*

Supponiamo di osservare da un sistema di riferimento inerziale un orologio animato da un moto arbitrario rispetto a noi. In ogni istante questo moto può essere considerato uniforme. Possiamo quindi in ogni istante fissare rigidamente all'orologio un sistema di coordinate che sarà (con l'orologio) un sistema di riferimento inerziale.

In un intervallo di tempo infinitesimo dt (secondo un orologio fisso che si trova cioè nel nostro sistema di riferimento) l'orologio in movimento percorre la distanza

$$\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Si domanda: quale sarà l'intervallo di tempo dt' indicato dall'orologio in moto? Nel sistema di coordinate legato all'orologio in movimento quest'ultimo è fermo, cioè $dx' = dy' = dz' = 0$. In virtú dell'invarianza dell'intervallo,

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2\,dt'^2,$$

donde

$$dt' = dt\sqrt{1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2\,dt^2}}.$$

Ma

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = v^2,$$

dove v è la velocità dell'orologio in moto; perciò

$$dt' = \frac{ds}{c} = dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_2}}. \tag{3,1}$$

L'integrazione di questa espressione dà l'intervallo di tempo indicato dall'orologio in movimento, quando l'orologio fisso indicherà il tempo $t_2 - t_1$:

$$t'_2 - t'_1 = \int_{t_1}^{t_2} dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{3,2}$$

Il tempo indicato da un orologio, solidale con un corpo dato, è detto *tempo proprio* di questo corpo. Le formule (3,1) e (3,2) esprimono il tempo proprio in funzione del tempo misurato nel sistema di riferimento rispetto al quale si considera il moto.

Come risulta dalle formule (3,1) e (3,2), il tempo proprio di un corpo in moto è sempre minore del corrispondente intervallo di tempo nel sistema fisso. In altri termini, un orologio in moto va piú lentamente di un orologio fisso.

Supponiamo ora di avere un altro orologio in moto rettilineo uniforme rispetto ad un sistema di riferimento inerziale K. Il sistema K' solidale con il secondo orologio è anch'esso inerziale. Allora, l'orologio del sistema K', dal punto di vista di un osservatore nel sistema K, ritarda rispetto all'orologio dell'osservatore. E al contrario, dal punto di vista del sistema K', ritarda l'orologio nel sistema K. Per convincerci che non esiste alcuna contraddizione, consideriamo il seguente fatto. Per costatare che l'orologio di K' ritarda su quello di K, procediamo nel modo seguente. Supponiamo che in un certo istante l'orologio di K' incontri quello di K e che in questo istante essi indichino lo stesso tempo. Per confrontare l'andatura degli orologi di K e di K', bisogna nuovamente confrontare le indicazioni dell'orologio di K' con un secondo orologio di K, ossia con quello incontrato dall'orologio di K' in un altro istante. Si scopre cosí che l'orologio di K' ritarda sull'orologio di K con quale viene confrontato. Per poter confrontare l'andatura degli orologi in due sistemi di riferimento, occorrono quindi piú orologi in un sistema e un orologio in un altro sistema.

Risulta perciò che questo processo non è simmetrico rispetto ai due sistemi considerati. In ritardo sarà sempre l'orologio che viene confrontato con differenti orologi dell'altro sistema di riferimento.

Se si prendono due orologi uno dei quali descrive una traiettoria chiusa per tornare alla posizione iniziale (dove si trova l'orologio fisso), risulterà in ritardo proprio l'orologio in moto (rispetto a quello rimasto fisso). Il ragionamento inverso, nel quale i ruoli degli orologi vengono invertiti, non è valido perché l'orologio descrivente la traiettoria chiusa non compie un moto rettilineo e uniforme, e il sistema di riferimento relativo ad esso non è inerziale.

Siccome le leggi della natura sono identiche soltanto in sistemi di riferimento inerziali, i sistemi di riferimento relativi all'orologio fisso (sistema inerziale) e a quello in moto (sistema non inerziale) possiedono proprietà differenti, e il ragionamento secondo il quale l'orologio fisso dovrebbe ritardare è sbagliato.

L'intervallo di tempo indicato da un orologio è uguale all'integrale $\frac{1}{c}\int ds$ preso lungo la linea d'universo di questo orologio. Se l'orologio è fisso, la sua linea d'universo è una retta parallela all'asse del tempo; se invece l'orologio compie un moto non uniforme lungo una traiettoria chiusa e ritorna alla posizione di partenza, la sua linea d'universo è una curva passante per due punti sulla retta d'universo di un orologio fisso, corrispondenti all'inizio ed alla fine del

moto. D'altra parte, abbiamo visto che il tempo indicato da un orologio in quiete è sempre maggiore di quello di un orologio in moto. Si arriva quindi alla conclusione che l'integrale $\int ds$ preso tra due punti d'universo dati ha un valore massimo quando è esteso alla retta d'universo che congiunge questi due punti[1]).

§ 4. *Trasformazione di Lorentz*

Ci proponiamo ora di trovare le formule di trasformazione da un sistema di riferimento inerziale in un altro, cioè le formule che permettono, conoscendo le coordinate x, y, z, t di un evento in un sistema di riferimento K, di trovare le coordinate x', y', z', t' dello stesso evento in un altro sistema inerziale K'.

Questo problema in meccanica classica si risolve molto facilmente. Essendo il tempo assoluto, abbiamo $t = t'$; scegliendo poi le coordinate nel modo solito (facendo cioè coincidere gli assi x ed x', mentre gli assi y, z restano paralleli a y', z' e il moto avviene lungo gli assi x ed x'), le coordinate y e z saranno evidentemente uguali alle coordinate y' e z', mentre le coordinate x ed x' differiranno per la distanza percorsa da un sistema rispetto all'altro; se come origine del tempo si prende l'istante in cui i due sistemi delle coordinate coincidono e se si indica con V la velocità di K' rispetto a K, questa distanza sarà allora Vt. Quindi si ha:

$$x = x' + Vt, \; y = y', \; z = z', \; t = t'. \tag{4,1}$$

Queste sono le formule di *trasformazione di Galilei*. È facile verificare che questa trasformazione, come c'era da aspettarsi, non soddisfa la condizione della teoria della relatività: essa non lascia invariante l'intervallo tra due eventi.

Per cercare le formule di trasformazione relativistiche, partiremo dal requisito che esse lascino invarianti gli intervalli.

Come abbiamo visto nel § 2, l'intervallo tra due eventi si può considerare come la distanza tra i due punti d'universo corrispondenti in un sistema di coordinate quadridimensionale. Possiamo dunque affermare che la trasformazione cercata deve lasciare inalterate tutte le lunghezze nello spazio quadridimensionale x, y, z, t, ct. Tali trasformazioni non possono essere che traslazioni e rotazioni del sistema di coordinate. Le traslazioni del sistema di coordinate non presentano

---

[1]) Si suppone naturalmente che questi punti e le linee che li congiungono siano tali che tutti gli elementi ds su queste linee sono del genere tempo.

Questa proprietà dell'integrale è dovuta al carattere non euclideo della geometria quadridimensionale. In uno spazio euclideo questo integrale sarebbe minimo lungo una retta.

alcun interesse perché si riducono ad un semplice spostamento dell'origine delle coordinate spaziali e ad un cambiamento dell'origine dei tempi. Quindi la trasformazione cercata dev'essere espressa matematicamente come rotazione di un sistema di coordinate quadridimensionale x, y, z, t.

Ogni rotazione in uno spazio quadridimensionale può essere scomposta in sei rotazioni rispettivamente nei piani xy, zy, xz, tx, ty, tz (analogamente una rotazione nello spazio ordinario può essere scomposta in tre rotazioni nei piani xy, zy ed xz). Le tre prime rotazioni trasformano solo le coordinate spaziali; esse corrispondono quindi alle rotazioni ordinarie nello spazio euclideo.

Consideriamo una trasformazione nel piano tx; le coordinate y e z restano invariate. In particolare, questa trasformazione deve lasciare invariata la differenza $(ct)^2 - x^2$, ossia il quadrato della « distanza » del punto (ct, x) dall'origine delle coordinate. La relazione tra le vecchie e le nuove coordinate in questa trasformazione è data dalle formule

$$x = x' \operatorname{ch}\psi + ct' \operatorname{sh}\psi, \quad ct = x' \operatorname{sh}\psi + ct' \operatorname{ch}\psi, \tag{4,2}$$

dove ψ è l'« angolo di rotazione »; è semplice verificare l'uguaglianza $c^2t^2 - x^2 = c^2 t'^2 - x'^2$. Le formule (4,2) si differenziano dalle formule ordinarie di trasformazione nella rotazione degli assi coordinati per la sostituzione delle funzioni trigonometriche con quelle iperboliche. In questo si manifesta la differenza della geometria non euclidea dalla geometria euclidea. Le formule che cerchiamo sono le formule di trasformazione che permettono di passare da un sistema di riferimento inerziale K ad un sistema K' che si muove rispetto a K lungo l'asse x con velocità V. In questo caso è evidente che sono soggetti alla trasformazione soltanto la coordinata x ed il tempo t. Questa trasformazione deve avere la forma (4,2). Resta da determinare l'angolo ψ che può dipendere solo dalla velocità relativa V[1]).

Consideriamo il moto dell'origine delle coordinate di K' nel sistema K. Allora $x' = 0$, e le formule (4,2) si scrivono

$$x = ct' \operatorname{sh}\psi, \quad ct = ct' \operatorname{ch}\psi,$$

o, dividendo membro a membro,

$$\frac{x}{ct} = \operatorname{th}\psi.$$

dove x/t è evidentemente la velocità del sistema K' rispetto a K. Si ha quindi

$$\operatorname{th}\psi = \frac{V}{c},$$

[1]) Per evitare confusione, indicheremo ovunque con V la velocità relativa costante tra due sistemi inerziali e con v la velocità di una particella in moto, che non è necessariamente costante.

da cui

$$\operatorname{sh}\psi = \frac{\frac{V}{c}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad \operatorname{ch}\psi = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

Sostituendo queste ultime espressioni nella (4,2), troviamo:

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \tag{4,3}$$

Queste sono le formule di trasformazione cercate, che sono chiamate formule di *trasformazione di Lorentz*. Queste formule saranno in seguito di importanza fondamentale.

Le formule inverse, esprimenti x', y', z', t' mediante x, y, z, t, si possono ottenere semplicemente operando la sostituzione di V con $-V$ (poiché in questo caso il sistema K si muove relativamente a K' con velocità $-V$). Le stesse formule si possono ottenere direttamente risolvendo le equazioni (4,3) rispetto ad x', y', z', t'.

Dalla (4,3) è facile vedere che, quando si passa alla meccanica classica per $c \to \infty$, le formule di trasformazione di Lorentz si riducono effettivamente alla trasformazione di Galilei.

Se nelle formule (4,3) $V > c$, le coordinate x, t diventano immaginarie; questo corrisponde all'impossibilità di un moto con velocità superiore a quella della luce. Non è nemmeno possibile avere un sistema di riferimento che si muova ad una velocità uguale a quella della luce perché i denominatori delle formule (4,3) si annullerebbero.

Per velocità V, piccole rispetto alla velocità della luce, in luogo delle (4,3) si possono utilizzare le formule approssimate

$$x = x' + Vt', \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t' + \frac{V}{c^2}x'. \tag{4,4}$$

Consideriamo ora un'asta in quiete nel sistema K e disposta parallelamente all'asse x. Sia $\Delta x = x_2 - x_1$ (dove x_2 ed x_1 sono le coordinate delle estremità dell'asta nel sistema K) la sua lunghezza misurata in questo sistema. Cerchiamo ora la sua lunghezza nel sistema K'. A tale scopo bisogna trovare le coordinate delle due estremità (x_2' ed x_1') in questo sistema allo stesso istante t'. Dalle (4,3) abbiamo:

$$x_1 = \frac{x_1' + Vt'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad x_2 = \frac{x_2' + Vt'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

La lunghezza dell'asta nel sistema K' è $\Delta x' = x'_2 - x'_1$ e si ottiene sottraendo x_2 da x_1:

$$\Delta x = \frac{\Delta x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Si chiama *lunghezza propria* di un'asta la sua lunghezza nel sistema di riferimento dove essa è in quiete. Indicando con $l_0 = \Delta x$ la lunghezza propria e con l la lunghezza della stessa asta misurata nel sistema K', otteniamo la relazione:

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}. \tag{4,5}$$

Da questa formula è chiaro che la lunghezza dell'asta è maggiore nel sistema di riferimento dove essa è in quiete. La sua lunghezza, in un sistema in cui si muove con la velocità V, diminuisce nel rapporto di $\sqrt{1 - V^2/c^2}$. Questo risultato della teoria della relatività si chiama *contrazione di Lorentz*.

Poiché le dimensioni trasversali di un corpo in moto non cambiano, il suo volume $\mathscr{V}$ si riduce allo stesso modo:

$$\mathscr{V} = \mathscr{V}_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}, \tag{4,6}$$

dove $\mathscr{V}_0$ è il *volume proprio* del corpo.

Le trasformazioni di Lorentz ci permettono di trovare i già noti risultati, relativi al tempo proprio (§ 3). Consideriamo un orologio in quiete nel sistema K'. Siano dati due eventi che accadono in uno stesso punto x', y', z' dello spazio nel sistema K'. Il tempo che separa questi eventi nel sistema K' è $\Delta t' = t'_2 - t'_1$. Cerchiamo ora il tempo Δt che separa gli stessi eventi nel sistema K. Dalle (4,3) abbiamo:

$$t_1 = \frac{t'_1 + \frac{V}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \qquad t_2 = \frac{t'_2 + \frac{V}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$

o, sottraendo l'uno dall'altro,

$$t_2 - t_1 = \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$

che è in pieno accordo con la (3,1).

Notiamo infine ancora una proprietà delle trasformazioni di Lorentz, che le distingue dalle trasformazioni di Galilei. Quest'ultime possiedono, come si dice, la proprietà commutativa, cioè il

prodotto di due trasformazioni di Galilei successive (con differenti velocità $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{V}_2$) non dipende dall'ordine nel quale queste trasformazioni sono effettuate. Al contrario, il prodotto di due trasformazioni di Lorentz successive dipende, in generale, dal loro ordine di successione. Da un punto di vista puramente matematico, questo è una conseguenza dell'interpretazione formale di queste trasformazioni come rotazioni di un sistema quadridimensionale di coordinate: è notorio che il risultato di due rotazioni (intorno ad assi differenti) dipende dall'ordine nel quale esse sono effettuate. Fanno eccezione soltanto le trasformazioni con vettori $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{V}_2$ paralleli (esse sono equivalenti a rotazioni di un sistema quadridimensionale di coordinate intorno allo stesso asse).

§ 5. *Trasformazione della velocità*

Nel paragrafo precedente abbiamo trovato le formule che permettono di trovare, conoscendo le coordinate di un evento in un sistema di riferimento, le coordinate dello stesso evento in un altro sistema di riferimento. Stabiliamo ora le formule che legano le velocità di una particella materiale in sistemi di riferimento distinti.

Supponiamo ancora una volta che il sistema K' si muova relativamente al sistema K con velocità V lungo l'asse x. Siano $v_x = dx/dt$ la componente della velocità di una particella nel sistema K e $v'_x = dx'/dt'$ la componente della velocità della stessa particella nel sistema K'.

Dalla (4,3) otteniamo:

$$dx = \frac{dx' + V\,dt'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad dy = dy', \; dz = dz, \quad dt = \frac{dt' + \frac{V}{c^2}\,dx'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

Dividendo le prime tre uguaglianze per la quarta ed introducendo le velocità

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \qquad \mathbf{v}' = \frac{d\mathbf{r}'}{dt'},$$

troviamo:

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1+\frac{v'_x V}{c^2}}, \qquad v_y = \frac{v'_y\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1+\frac{v'_x V}{c^2}}, \qquad v_z = \frac{v'_z\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1+\frac{v'_x V}{c^2}}. \quad (5,1)$$

Queste sono le formule di trasformazione delle velocità. Esse esprimono la legge di composizione delle velocità nella teoria della relatività. Nel caso limite in cui $c \to \infty$, esse si trasformano nelle formule $v_x = v'_x + V$, $v_y = v'_y$, $v_z = v'_z$ della meccanica classica.

Nel caso particolare in cui la particella si muove parallelamente all'asse x, abbiamo $v_x = v$, $v_y = v_z = 0$. Allora $v'_y = v'_z = 0$, $v'_x = v'$ e

$$v = \frac{v' + V}{1 + \frac{v'V}{c^2}}. \tag{5,2}$$

È facile verificare che questa somma di due velocità, inferiori o uguali alla velocità della luce, è sempre una velocità non superiore a quella della luce.

Per velocità V, notevolmente inferiori alla velocità della luce (la velocità v può essere arbitraria), con una approssimazione sino ai termini dell'ordine V/c abbiamo:

$$v_x = v'_x + V\left(1 - \frac{v'^2_x}{c^2}\right), \quad v_y = v'_y - v'_x v'_y \frac{V}{c^2}, \quad v_z = v'_z - v'_x v'_z \frac{V}{c^2}.$$

Queste tre formule si possono riunire in una sola formula vettoriale

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V} - \frac{1}{c^2}(\mathbf{V}\mathbf{v}')\,\mathbf{v}'. \tag{5,3}$$

Notiamo che le due velocità componenti $\mathbf{v}'$ e $\mathbf{V}$ entrano nella legge relativistica di composizione delle velocità (5,1) in modo asimmetrico (quando esse non sono dirette tutte e due parallelamente all'asse x). Questo fatto è dovuto naturalmente alla non commutatività delle trasformazioni di Lorentz menzionata nel paragrafo precedente.

Scegliamo gli assi coordinati in maniera tale che la velocità della particella in un istante dato appartenga al piano xy. Le sue componenti nel sistema K saranno allora $v_x = v \cos\theta$, $v_y = v \operatorname{sen}\theta$, e nel sistema K', rispettivamente, $v'_x = v' \cos\theta'$, $v'_y = v' \operatorname{sen}\theta'$ (v, v' e θ, θ' sono i valori assoluti della velocità e gli angoli che essa forma con gli assi x ed x' rispettivamente nei sistemi K e K'). Con l'aiuto delle formule (5,1) troviamo:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{v'\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\operatorname{sen}\theta'}{v'\cos\theta' + V}. \tag{5,4}$$

Questa formula determina il cambiamento di direzione della velocità nel passaggio da un sistema di riferimento ad un altro.

Consideriamo piú in dettaglio un caso particolarmente importante di questa formula, ossia la deviazione della luce nel passaggio da un sistema di riferimento ad un altro, fenomeno detto *aberrazione* della luce. In questo caso si ha $v = v' = c$, e la formula precedente

assume la forma:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{\frac{V}{c}+\cos\theta'}\operatorname{sen}\theta'. \tag{5,5}$$

Le stesse formule di trasformazione (5,1) ci permettono di ottenere facilmente una relazione analoga tra sen θ e cos θ:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1+\frac{V}{c}\cos\theta'}\operatorname{sen}\theta', \qquad \cos\theta = \frac{\cos\theta'+\frac{V}{c}}{1+\frac{V}{c}\cos\theta'}. \tag{5,6}$$

Nel caso in cui $V \ll c$, dalla (5,6) con una approssimazione sino ai termini d'ordine V/c ricaviamo:

$$\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}\theta' = -\frac{V}{c}\operatorname{sen}\theta'\cos\theta'.$$

Introducendo l'angolo $\Delta\theta = \theta' - \theta$ (angolo di aberrazione), troviamo con la stessa approssimazione

$$\Delta\theta = \frac{V}{c}\operatorname{sen}\theta' \tag{5,7}$$

che è la formula elementare ben nota dell'aberrazione della luce.

§ 6. *Quadrivettori*

L'insieme delle coordinate (ct, x, y, z) di un evento può essere considerato come le componenti di un raggio vettore quadridimensionale (o, per brevità, raggio quadrivettore) nello spazio quadridimensionale. Indicheremo con x^i le sue componenti, dove l'indice i assume i valori 0, 1, 2, 3 e dove

$$x^0 = ct,\ x^1 = x,\ x^2 = y,\ x^3 = z.$$

Il quadrato della « lunghezza » di un raggio quadrivettore è dato dall'espressione

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2.$$

Esso non varia per trasformazioni qualsivogliono del sistema di coordinate quadridimensionale, quali sono in particolare le trasformazioni di Lorentz.

In generale, si chiama *quadrivettore* (4-vettore) A^i l'insieme di quattro grandezze A^0, A^1, A^2, A^3, che si trasformano come le componenti x^i di un raggio quadrivettore per trasformazioni del sistema di coordinate quadridimensionale. Le trasformazioni di Lorentz ci

danno:

$$A^0 = \frac{A'^0 + \frac{V}{c} A'^1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \qquad A^1 = \frac{A'^1 + \frac{V}{c} A'^0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad A^2 = A'^2, \; A^3 = A'^3. \qquad (6,1)$$

Il quadrato del valore di ogni quadrivettore è definito analogamente al quadrato di un raggio quadrivettore

$$(A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2.$$

Per rendere piú comoda la scrittura di tali espressioni, introduciamo due « tipi » di componenti dei quadrivettori indicandole rispettivamente con A^i ed A_i aventi l'indice in alto e in basso. Teniamo intanto presente che

$$A_0 = A^0, \quad A_1 = -A^1, \quad A_2 = -A^2, \quad A_3 = -A^3. \qquad (6,2)$$

Le grandezze A^i sono dette componenti *controvarianti* ed A_i componenti *covarianti* del quadrivettore. Il quadrato di un quadrivettore assume allora la forma

$$\sum_{i=0}^{3} A^i A_i = A^0 A_0 + A^1 A_1 + A^2 A_2 + A^3 A_3.$$

Queste somme si scrivono di solito nella forma $A^i A_i$, omettendo il segno di somma. Si adotta in generale la regola secondo la quale con ogni indice ripetuto due volte in una data espressione si sottintende la sommatoria, ma il segno di somma va omesso. Inoltre, in ogni coppia di indici uguali uno deve essere scritto superiormente e l'altro inferiormente. Questo modo di esprimere una sommatoria su indici detti *muti* è molto comodo e semplifica notevolmente la scrittura delle formule.

Nel presente volume con le lettere latine i, k, l,... indicheremo gli indici quadridimensionali che assumono i valori 0, 1, 2, 3.

Per analogia con il quadrato di un quadrivettore il prodotto scalare tra due differenti quadrivettori si definisce:

$$A^i B_i = A^0 B_0 + A^1 B_1 + A^2 B_2 + A^3 B_3.$$

È peraltro evidente che questo prodotto si può denotare sia con $A^i B_i$ che con $A_i B^i$, senza cambiarne il risultato. Secondo una regola piú generale gli indici superiori ed inferiori in ogni coppia di indici muti possono sempre essere scambiati di posto[1]).

Il prodotto $A^i B_i$ è un 4-scalare: esso è invariante rispetto alle rotazioni del sistema di coordinate quadridimensionale. È facile

---

[1]) Nelle pubblicazioni moderne si omettono generalmente gli indici dei quadrivettori, indicando quadrati e prodotti scalari semplicemente con A^2, AB. Nel presente volume tuttavia non adotteremo questo tipo di notazioni.

verificare direttamente questa affermazione[1]), che risulta evidente (per analogia con il quadrato A^iA_i) anche dal fatto che tutti i quadrivettori si trasformano secondo la stessa legge.

La componente A^0 di un quadrivettore si chiama temporale, e le componenti A^1, A^2, A^3 spaziali (per analogia con il raggio quadrivettore). Il quadrato di un quadrivettore può essere positivo, negativo o nullo; si parla allora rispettivamente di quadrivettori *del genere tempo*, *del genere spazio* e *nulli o del genere luce* (la terminologia è la stessa usata per gli intervalli)[2]).

Rispetto alle rotazioni puramente spaziali (cioé alle trasformazioni che non interessano l'asse del tempo) le tre componenti spaziali del quadrivettore A^i compongono un vettore tridimensionale **A**, mentre la quarta componente temporale del quadrivettore rappresenta (rispetto alle stesse trasformazioni) uno scalare a tre dimensioni. Elencando le componenti di un quadrivettore, spesso useremo la seguente notazione:

$$A^i = (A^0, \mathbf{A}),$$

mentre le componenti covarianti dello stesso quadrivettore si scriveranno: $A_i = (A^0, -\mathbf{A})$ e il quadrato del quadrivettore: $A^iA_i = (A^0)^2 - \mathbf{A}^2$. Quindi per un raggio quadrivettore avremo

$$x^i = (ct, \mathbf{r}), \quad x_i = (ct, -\mathbf{r}), \quad x^ix_i = c^2t^2 - \mathbf{r}^2.$$

Poiché non c'è nessun bisogno di distinguere nei vettori tridimensionali (in coordinate x, y, z) le componenti covarianti e controvarianti, ovunque denoteremo (laddove ciò non generi confusione) le sue componenti A_α ($\alpha = x, y, z$) con indici inferiori usando le lettere greche. In particolare, con indici greci ripetuti due volte s'intenderà la sommatoria rispetto a tre valori x, y, z (ad esempio, $\mathbf{AB} = A_\alpha B_\alpha$).

Si chiama tensore quadridimensionale (4-tensore) di rango 2 l'insieme di 16 grandezze A^{ik} che per trasformazione delle coordinate si trasformano come prodotti di componenti di due quadrivettori. Analogamente sono definiti i 4-tensori di rango superiore.

Le componenti dei tensori quadridimensionali di rango 2 possono essere di tre tipi: controvarianti A^{ik}, covarianti A_{ik} e miste $A^i{}_k$ (riguardo a quest'ultime bisogna distinguere $A^i{}_k$ da $A^k{}_i$, cioè tener sem-

---

[1]) È da tener presente che la legge di trasformazione di un quadrivettore, espressa mediante le componenti covarianti, si distingue (per il segno) dalla stessa legge espressa con le componenti controvarianti. Ad esempio, in luogo della (6,1) si avrà evidentemente:

$$A_0 = \frac{A_0' - \frac{V}{c}A_1'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \qquad A_1 = \frac{A_1' - \frac{V}{c}A_0'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \qquad A_2 = A_2', \quad A_3 = A_3'.$$

[2]) I quadrivettori nulli si chiamano anche *isotropi*.

pre presente quale degli indici, il primo o il secondo, sta superiormente o inferiormente. I diversi tipi delle componenti sono legati dalla regola generale seguente: l'innalzamento o l'abbassamento dell'indice temporale (0) non cambia il segno della componente, mentre l'innalzamento o l'abbassamento dell'indice spaziale (1, 2, 3) ne cambia il segno. Per esempio:

$$A_{00} = A^{00}, \quad A_{01} = -A^{01}, \quad A_{11} = A^{11}, \ldots,$$
$$A^0{}_0 = A^{00}, \quad A_0{}^1 = A^{01}, \quad A^0{}_1 = -A^{01}, \quad A_1{}^1 = -A^{11}, \ldots$$

Rispetto alle trasformazioni puramente spaziali le nove componenti A^{11}, A^{12}, . . ., formano un tensore tridimensionale. Le tre componenti A^{01}, A^{02}, A^{03} e le tre componenti A^{10}, A^{20}, A^{30} formano vettori tridimensionali, e la componente A^{00} è uno scalare tridimensionale.

Il tensore A^{ik} si chiama simmetrico se $A^{ik} = A^{ki}$, e antisimmetrico se $A^{ik} = -A^{ki}$. Un tensore antisimmetrico ha tutte le componenti diagonali nulle (cioè le componenti A^{00}, A^{11}, . . .) perché, per esempio, dev'essere $A^{00} = -A^{00}$. Per un tensore simmetrico A^{ik} le componenti miste $A^i{}_k$ ed $A_k{}^i$ evidentemente coincidono; in questi casi scriveremo A^i_k mettendo gli indici l'uno sopra l'altro.

Ogni uguaglianza tensoriale deve contenere in ambo i membri indici liberi, ossia non muti, uguali ed ugualmente disposti (superiormente o inferiormente). Gli indici liberi nelle uguaglianze tensoriali si possono spostare (superiormente o inferiormente), ma è obbligatorio che vengano spostati contemporaneamente in tutti i termini dell'uguaglianza. Non è però « legittimo » uguagliare le componenti controvarianti o covarianti dei tensori diversi; tale uguaglianza, anche avvenuta per caso in qualche sistema di riferimento, non sarebbe valida in un altro sistema.

Con le componenti di ogni tensore A^{ik} si può formare uno scalare scrivendo la somma

$$A^i{}_i = A^0{}_0 + A^1{}_1 + A^2{}_2 + A^3{}_3$$

(dove naturalmente $A^i{}_i = A_i{}^i$). Tale somma è chiamata *traccia* del tensore, e l'operazione *contrazione* o *semplificazione* del tensore.

Il prodotto scalare di due quadrivettori considerato sopra si presenta come un'operazione di contrazione: è la formazione dello scalare A^iB_i dal tensore A^iB_k. In generale, ogni contrazione per una coppia di indici diminuisce di 2 il rango del tensore. Per esempio, $A^i{}_{kli}$ è un tensore di rango due, $A^i{}_kB^k$ un 4-vettore, $A^{ik}{}_{ik}$ uno scalare, ecc. Si chiama 4-tensore unità il tensore δ^i_k definito dall'uguaglianza

$$\delta^k_i A^i = A^k \tag{6,3}$$

per qualsiasi quadrivettore A^i. È evidente che le componenti di questo tensore sono

$$\delta_i^k = \begin{cases} 1, & \text{se } i = k, \\ 0, & \text{se } i \neq k. \end{cases} \tag{6,4}$$

La sua traccia è $\delta_i^i = 4$.

Innalzando o abbassando uno degli indici del tensore δ_i^k, si ottiene un tensore controvariante o covariante che indicheremo, rispettivamente, con g^{ik} o g_{ik}. I tensori g^{ik} e g_{ik}, detti *tensori metrici*, hanno componenti uguali che si possono rappresentare sotto forma di tabella:

$$(g^{ik}) = (g_{ik}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{6,5}$$

(l'indice i indica le righe e l'indice k le colonne nell'ordine 0, 1, 2, 3). È evidente che

$$g_{ik}A^k = A_i, \quad g^{ik}A_k = A^i. \tag{6,6}$$

Possiamo quindi scrivere il prodotto scalare di due quadrivettori nella forma

$$A^iA_i = g_{ik}A^iA^k = g^{ik}A_iA_k. \tag{6,7}$$

I tensori δ_k^i, g_{ik}, g^{ik} sono particolari nel senso che le loro componenti sono uguali in tutti i sistemi di coordinate. Della stessa proprietà gode il tensore unità completamente antisimmetrico di rango quattro e^{iklm}, vale a dire il tensore le cui componenti differenti da zero sono uguali a ± 1 e cambiano di segno scambiando tra loro due indici qualsiasi. Dall'antisimmetria segue che tutte le componenti di questo tensore che hanno almeno due indici uguali sono nulle; sono differenti da zero soltanto quelle componenti nelle quali tutti e quattro gli indici sono diversi. Ponendo

$$e^{0123} = +1 \tag{6,8}$$

(e quindi $e_{0123} = -1$), tutte le componenti e^{iklm} differenti da zero sono uguali a $+1$ oppure a -1, a seconda che sia pari o dispari il numero di permutazioni (trasposizioni) necessario per riportare gli indici nella successione naturale 0, 1, 2, 3. Il numero di tali componenti è $4! = 24$. Perciò

$$e^{iklm}e_{iklm} = -24. \tag{6,9}$$

Rispetto alle rotazioni del sistema di coordinate le grandezze e^{iklm} si comportano come le componenti di un tensore; se invece una delle tre coordinate cambia di segno, le componenti e^{iklm}, essendo identiche in

tutti i sistemi di coordinate, non cambiano, mentre, come è noto, le componenti di un tensore dovrebbero cambiare di segno. Risulta quindi che e^{iklm} non è un tensore vero e proprio, ma uno pseudotensore. Gli *pseudotensori* di rango qualsiasi, in particolare gli *pseudoscalari*, si comportano come tensori in ogni trasformazione di coordinate, ad eccezione di quelle trasformazioni che non possono essere ridotte a rotazioni, ossia ad eccezione delle inversioni di assi non riducibili a rotazioni.

I prodotti $e^{iklm}e^{prst}$ formano un vero 4-tensore di rango otto; con la contrazione di una o piú coppie di indici esso si riduce a tensori di rango sei, quattro e due. Tutti questi tensori hanno una forma identica in ogni sistema di coordinate. Per guesto le loro componenti debbono esprimersi sotto forma di combinazioni di prodotti delle componenti del tensore unità δ^i_k, che è l'unico vero tensore le cui componenti sono identiche in tutti i sistemi. Tali combinazioni si compongono facilmente partendo dalle proprietà di simmetria rispetto alle trasposizioni degli indici, proprie di tali combinazioni[1]).

Se A^{ik} è un tensore antisimmetrico, il tensore A^{ik} e lo pseudotensore $A^{*ik} = \frac{1}{2} e^{iklm}A_{lm}$ sono detti *duali*. Analogamente $e^{iklm}A_m$ è uno pseudotensore antisimmetrico del terzo ordine, duale del vettore A^i. Il prodotto di due tensori duali $A^{ik}A^*_{ik}$ è evidentemente uno pseudoscalare.

In relazione a quanto appena esposto, ricordiamo qualche proprietà analoga dei vettori e dei tensori tridimensionali. Si chiama pseudotensore unità completamente antisimmentrico di rango tre un insieme di grandezze $e_{\alpha\beta\gamma}$ che cambiano di segno quando si trasponе una coppia qualunque di indici. Sono differenti da zero soltanto le componenti di $e_{\alpha\beta\gamma}$ con i tre indici diversi. Ponendo la componente $e_{xyz} = 1$, le altre sono uguali ad 1 oppure a -1 a seconda che

---

[1]) Riportiamo qui a titolo di informazione le formule corrispondenti:

$$e^{iklm}e_{prst} = -\begin{vmatrix} \delta^i_p & \delta^i_r & \delta^i_s & \delta^i_t \\ \delta^k_p & \delta^k_r & \delta^k_s & \delta^k_t \\ \delta^l_p & \delta^l_r & \delta^l_s & \delta^l_t \\ \delta^m_p & \delta^m_r & \delta^m_s & \delta^m_t \end{vmatrix}, \qquad e^{iklm}e_{prsm} = -\begin{vmatrix} \delta^i_p & \delta^i_r & \delta^i_s \\ \delta^k_p & \delta^k_r & \delta^k_s \\ \delta^l_p & \delta^l_r & \delta^l_s \end{vmatrix},$$

$$e^{iklm}e_{prlm} = -2(\delta^i_p\delta^k_r - \delta^i_r\delta^k_p), \quad e^{iklm}e_{pklm} = -6\delta^i_p.$$

Il risultato della contrazione completa data dalla (6,9) permette di verificare i coefficienti generali in queste formule.

La prima di queste formule dà come conseguenza:

$$e^{prst}A_{ip}A_{kr}A_{ls}A_{mt} = -Ae_{iklm}, \quad e^{iklm}e^{prst}A_{ip}A_{kr}A_{ls}A_{mt} = 24A,$$

dove A è il determinante composto di grandezze A_{ik}.

sia pari o dispari il numero di trasposizioni necessario per ricondurre la successione α, β, γ alla successione x, y, z[1]).

I prodotti $e_{\alpha\beta\gamma}e_{\lambda\mu\nu}$ formano un vero tensore tridimensionale di rango sei e per questo si esprimono sotto forma di combinazioni di prodotti delle componenti del tensore unità tridimensionale $\delta_{\alpha\beta}$[2]).

Invertendo il sistema di coordinate, cioè cambiando di segno tutte le coordinate, cambiano di segno le componenti di un vettore tridimensionale ordinario. Vettori di questo tipo sono detti *polari*. Le componenti di un vettore, che può essere rappresentato come il prodotto vettoriale di due vettori polari, non cambiano di segno nell'inversione. Questi vettori sono chiamati *assiali*. Il prodotto scalare di un vettore polare e di un vettore assiale non è un vero scalare, ma uno pseudoscalare: esso cambia di segno nell'inversione delle coordinate. Un vettore assiale è uno pseudovettore, duale di un tensore antisimmetrico. Per esempio, se $\mathbf{C} = [\mathbf{AB}]$, si ha

$$C_\alpha = \frac{1}{2} e_{\alpha\beta\gamma} C_{\beta\gamma}, \quad \text{dove} \quad C_{\beta\gamma} = A_\beta B_\gamma - A_\gamma B_\beta.$$

Torniamo ai 4-tensori. Le componenti spaziali ($i, k, \ldots = 1, 2, 3$) di un 4-tensore antisimmetrico A^{ik} formano un tensore tridimensionale antisimmetrico rispetto alle trasformazioni puramente spaziali; secondo quanto detto sopra, le sue componenti si esprimono mediante le componenti di un vettore assiale tridimensionale. Le componenti A^{01}, A^{02}, A^{03} formano, invece, rispetto alle stesse trasformazioni un vettore tridimensionale polare. Le componenti di un 4-tensore antisimmetrico possono essere qui rappresentate dalla seguente tabella:

$$(A^{ik}) = \begin{pmatrix} 0 & p_x & p_y & p_z \\ -p_x & 0 & -a_z & a_y \\ -p_y & a_z & 0 & -a_x \\ -p_z & -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix}, \tag{6,10}$$

dove **p** ed **a** sono rispettivamente un vettore polare e un vettore assiale rispetto alle trasformazioni spaziali. Per indicare le componenti di

---

[1]) L'invarianza delle componenti del 4-tensore e^{iklm} in rotazioni del sistema di coordinate quadridimensionale e l'invarianza delle componenti del 3-tensore $e_{\alpha\beta\gamma}$ in rotazioni degli assi coordinati spaziali rappresentano casi particolari della regola generale: ogni tensore completamente antisimmetrico di rango uguale al numero di dimensioni dello spazio, dove esso è definito, è invariante in rotazioni del sistema di coordinate in questo spazio.

[2]) Riportiamo le formule corrispondenti:

$$e_{\alpha\beta\gamma}e_{\lambda\mu\nu} = \begin{vmatrix} \delta_{\alpha\lambda} & \delta_{\alpha\mu} & \delta_{\alpha\nu} \\ \delta_{\beta\lambda} & \delta_{\beta\mu} & \delta_{\beta\nu} \\ \delta_{\gamma\lambda} & \delta_{\gamma\mu} & \delta_{\gamma\nu} \end{vmatrix}.$$

Contraendo questo tensore su una, due e tre coppie di indici, otteniamo:

$$e_{\alpha\beta\gamma}e_{\lambda\mu\gamma} = \delta_{\alpha\lambda}\delta_{\beta\mu} - \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\lambda}, \quad e_{\alpha\beta\gamma}e_{\lambda\beta\gamma} = 2\delta_{\alpha\lambda}, \quad e_{\alpha\beta\gamma}e_{\alpha\beta\gamma} = 6.$$

un 4-tensore antisimmetrico, le denoteremo:

$$A^{ik} = (\mathbf{p}, \mathbf{a});$$

le componenti covarianti dello stesso tensore saranno allora:

$$A_{ik} = (-\mathbf{p}, \mathbf{a}).$$

Soffermiamoci, infine, su alcune operazioni differenziali ed integrali dell'analisi tensoriale quadridimensionale.

Il 4-gradiente dello scalare φ è il quadrivettore

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x^i} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \nabla\varphi\right).$$

È necessario tener presente che le derivate scritte vanno considerate come le componenti covarianti di un quadrivettore. Infatti, il differenziale di uno scalare

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x^i} dx^i$$

è pure uno scalare; l'asserzione fatta risulta chiaramente dalla sua forma (prodotto scalare di due quadrivettori).

In generale gli operatori di derivazione rispetto alle coordinate $x^i, \partial/\partial x^i$ vanno considerati come componenti covarianti di un operatore quadrivettoriale. Perciò la divergenza di un quadrivettore $\partial A^i/\partial x^i$, dove si derivano le componenti controvarianti A^i, è uno scalare[1]).

Nello spazio tridimensionale, l'integrazione può esser estesa ad un volume, ad una superficie e ad una curva. Nello spazio quadridimensionale sono possibili i quattro casi d'integrazione.

---

[1]) Se la derivazione è fatta rispetto alle « coordinate covarianti » x_i, le derivate

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = g^{ik}\frac{\partial\varphi}{\partial x^k} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}, -\nabla\varphi\right)$$

costituiscono le componenti controvarianti di un quadrivettore. Ricorreremo a tale notazione solo in rarissimi casi $\left(\text{ad esempio, per scrivere il quadrato del 4-gradiente } \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}.\right)$

Notiamo che le derivate parziali rispetto alle coordinate vengono scritte spesso con i simboli abbreviati

$$\partial^i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad \partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Gli operatori di derivazione scritti in questa forma mostrano chiaramente il carattere controvariante o covariante delle grandezze che essi contribuiscono a formare. Lo stesso vantaggio si ha utilizzando un'altra notazione abbreviata delle derivate, cioè mediante gli indici preceduti da una virgola:

$$\varphi_{,i} = \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}, \qquad \varphi^{,i} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}.$$

1) Integrale esteso a una curva dello spazio quadridimensionale. L'elemento d'integrazione è un elemento di lunghezza, cioè il quadrivettore dx^i.

2) Integrale esteso a una superficie (bidimensionale) dello spazio quadridimensionale. È noto che nello spazio tridimensionale le proiezioni dell'area di un parallelogrammo, costruito con due vettori $d\mathbf{r}$ e $d\mathbf{r}'$, sui piani coordinati $x_\alpha x_\beta$ sono uguali a $dx_\alpha dx'_\beta - dx_\beta dx'_\alpha$. Per analogia, nello spazio quadridimensionale l'elemento infinitesimo di superficie è determinato dal tensore antisimmetrico di rango due $df^{ik} = dx^i dx'^k - dx^k dx'^i$; le sue componenti sono uguali alle proiezioni dell'area dell'elemento sui piani coordinati. Nello spazio tridimensionale, come è noto, in luogo del tensore $df_{\alpha\beta}$ si prende per elemento di superficie il vettore df_α, duale del tensore $df_{\alpha\beta}$: $df_\alpha = \frac{1}{2} e_{\alpha\beta\gamma} df_{\beta\gamma}$. Da un punto di vista geometrico esso è un vettore normale all'elemento di superficie e avente per lunghezza l'area di questo elemento. Nello spazio quadridimensionale è impossibile costruire un tale vettore, ma si può costruire un tensore df^{*ik}, duale del tensore df^{ik}, cioè

$$df^{*ik} = \frac{1}{2} e^{iklm} df_{lm}. \tag{6,11}$$

Esso esprime geometricamente un elemento di superficie uguale e « normale » all'elemento df^{ik}; tutti i segmenti di retta di questo elemento sono ortogonali a quelli dell'elemento df^{ik}. È evidente che $df^{ik} df^*_{ik} = 0$.

3) Integrale esteso a una ipersuperficie, cioé a una varietà tridimensionale. In uno spazio tridimensionale, il volume del parallelepipedo costruito su tre vettori è uguale, come è noto, al determinante del terzo ordine formato dalle componenti di questi vettori. In uno spazio quadridimensionale le proiezioni del volume del « parallelepipedo » (cioè l' « area » della ipersuperficie) costruito sui tre quadrivettori dx^i, dx'^i, dx''^i si esprimono analogamente: esse sono definite dai determinanti

$$dS^{ikl} = \begin{vmatrix} dx^i & dx'^i & dx''^i \\ dx^k & dx'^k & dx''^k \\ dx^l & dx'^l & dx''^l \end{vmatrix},$$

che formano un tensore del terzo rango, antisimmetrico rispetto ai tre indici. Per elemento di integrazione su una ipersuperficie è piú comodo prendere il quadrivettore dS^i, duale del tensore dS^{ikl}

$$dS^i = -\frac{1}{6} e^{iklm} dS_{klm}, \quad dS_{klm} = e_{nklm} dS^n, \tag{6,12}$$

dove

$$dS^0 = dS^{123}, \quad dS^1 = dS^{023}, \ \ldots$$

Dal punto di vista geometrico dS^i è un quadrivettore avente per lunghezza l' « area » dell'elemento dell'ipersuperficie e per direzione la normale a questo elemento (cioè perpendicolare a tutte le rette tracciate in questo elemento della ipersuperficie). In particolare, $dS^0 = dx\,dy\,dz$, cioè rappresenta un elemento di volume dV a tre dimensioni, ossia la proiezione della ipersuperficie sull'iperpiano $x^0 =$ costante.

4) Integrale esteso a un volume quadridimensionale; l'elemento d'integrazione è il prodotto di differenziali:

$$d\Omega = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = c\,dt\,dV. \tag{6,13}$$

Questo elemento è scalare: è evidente che l'elemento di volume dello spazio quadridimensionale non cambia per una rotazione del sistema di coordinate[1]).

Per analogia con i teoremi di Gauss e di Stokes per l'analisi vettoriale tridimensionale, esistono teoremi che permettono di trasformare gli integrali quadridimensionali.

Un integrale esteso a una ipersuperficie chiusa può essere trasformato in integrale esteso al volume quadridimensionale da essa limitato, sostituendo all'elemento d'integrazione dS_i l'operatore

$$dS_i \to d\Omega \frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{6,14}$$

Per esempio, per l'integrale di un vettore A^i si ha:

$$\oint A^i\,dS_i = \int \frac{\partial A^i}{\partial x^i}\,d\Omega. \tag{6,15}$$

Questa formula è una generalizzazione del teorema di Gauss.

Un integrale esteso a una superficie ordinaria si trasforma in un integrale esteso alla ipersuperficie da essa « inviluppata », sostituendo all'elemento d'integrazione df^*_{ik} l'operatore

$$df^*_{ik} \to dS_i \frac{\partial}{\partial x^k} - dS_k \frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{6,16}$$

Per esempio, per l'integrale del tensore antisimmetrico A^{ik} si ha:

$$\frac{1}{2}\int A^{ik}\,df^*_{ik} = \frac{1}{2}\int \left(dS_i \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^k} - dS_k \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^i}\right) = \int dS_i \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^k}. \tag{6,17}$$

---

[1]) Sostituendo le variabili d'integrazione x^0, x^1, x^2, x^3 con le nuove variabili x'^0, x'^1, x'^2, x'^3, l'elemento d'integrazione $d\Omega$ viene sostituito, come è noto, con $J\,d\Omega'$, dove $d\Omega' = dx'^0 dx'^1 dx'^2 dx'^3$ e

$$J = \frac{\partial(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)}$$

è lo jacobiano di trasformazione. Per una trasformazione lineare tipo $x'^i = \alpha^i_k x^k$ lo jacobiano J coincide con il determinante $|\alpha^i_k|$ ed è uguale (per rotazioni del sistema di coordinate) all'unità; in ciò consiste appunto l'invarianza di $d\Omega$.

Un integrale esteso a una curva chiusa quadridimensionale si trasforma in un integrale esteso alla superficie che essa limita facendo la sostituzione

$$dx^i \to df^{ki} \frac{\partial}{\partial x^k}. \tag{6,18}$$

Per esempio, per l'integrale di un vettore si ha:

$$\oint A_i \, dx^i = \int df^{ki} \frac{\partial A_i}{\partial x^k} = \frac{1}{2} \int df^{ki} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \right), \tag{6,19}$$

che rappresenta una generalizzazione del teorema di Stokes.

PROBLEMI

1. Stabilire la legge di trasformazione delle componenti del 4-tensore simmetrico A^{ik} nelle trasformazioni di Lorentz (6,1).

Soluzione. Considerando le componenti del 4-tensore come il prodotto di due componenti di un quadrivettore, otteniamo:

$$A^{00} = \frac{1}{1-\frac{V^2}{c^2}} \left(A'^{00} + 2\frac{V}{c} A'^{01} + \frac{V^2}{c^2} A'^{11} \right),$$

$$A^{11} = \frac{1}{1-\frac{V^2}{c^2}} \left(A'^{11} + 2\frac{V}{c} A'^{01} + \frac{V^2}{c^2} A'^{00} \right),$$

$$A^{22} = A'^{22}, \quad A^{23} = A'^{23}, \quad A^{12} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \left(A'^{12} + \frac{V}{c} A'^{02} \right),$$

$$A^{01} = \frac{1}{1-\frac{V^2}{c^2}} \left[A'^{01} \left(1 + \frac{V^2}{c^2} \right) + \frac{V}{c} A'^{00} + \frac{V}{c} A'^{11} \right],$$

$$A^{02} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \left(A'^{02} + \frac{V}{c} A'^{12} \right)$$

e formule analoghe per A^{33}, A^{13}, A^{03}.

2. Risolvere lo stesso problema per il tensore antisimmetrico A^{ik}.

Soluzione. Poiché le coordinate x^2, x^3 non cambiano, non cambia nemmeno la componente del tensore A^{23} mentre le componenti A^{12}, A^{13} ed A^{02}, A^{03} si trasformano come x^1 ed x^0:

$$A^{23} = A'^{23}, \qquad A^{12} = \frac{A'^{12} + \frac{V}{c} A'^{02}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \qquad A^{02} = \frac{A'^{02} + \frac{V}{c} A'^{12}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},$$

analogamente per A^{13}, A^{03}.

Rispetto alle rotazioni del sistema di due coordinate nel piano x^0x^1 (tali sono le trasformazioni considerate) le componenti $A^{01} = -A^{10}$, $A^{00} = A^{11} = 0$

formano un tensore antisimmetrico di ordine uguale al numero di dimensioni dello spazio. Quindi (vedi nota alla pag. 36) queste componenti non cambiano nelle trasformazioni considerate:

$$A^{01} = A'^{01}.$$

§ 7. *Quadrivelocità*

Partendo da un vettore velocità tridimensionale ordinario si può formare un quadrivettore. Il vettore

$$u^i = \frac{dx^i}{ds}. \tag{7,1}$$

costituisce la *quadrivelocità* (4-velocità) di una particella.

Per trovarne le componenti, osserviamo che, secondo la (3,1),

$$ds = c\,dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},$$

dove v è la velocità tridimensionale ordinaria della particella. Perciò

$$u^1 = \frac{dx^1}{ds} = \frac{dx}{c\,dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{v_x}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

ecc. Quindi,

$$u^i = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\ \frac{\mathbf{v}}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right). \tag{7,2}$$

Notiamo che la quadrivelocità è una grandezza adimensionale.

Le componenti della quadrivelocità non sono indipendenti. Notando che $dx_i dx^i = ds^2$, abbiamo:

$$u^i u_i = 1. \tag{7,3}$$

Dal punto di vista geometrico u^i è il quadrivettore unitario tangente alla linea d'universo della particella.

Analogamente alla definizione della quadrivelocità, si può chiamare la derivata seconda

$$w^i = \frac{d^2x^i}{ds^2} = \frac{du^i}{ds}$$

4-accelerazione. Derivando la relazione (7,3), troviamo:

$$u_i w^i = 0, \tag{7,4}$$

cioè i quadrivettori velocità ed accelerazione sono ortogonali.

PROBLEMA

Determinare il moto relativistico uniformemente accelerato, cioè un moto rettilineo nel corso del quale l'accelerazione w resta costante nel proprio sistema di riferimento (in ogni istante).

Soluzione. Nel sistema di riferimento dove la velocità della particella è $v = 0$, le componenti della 4-accelerazione sono uguali a $w^i = (0, w/c^2, 0, 0)$ (dove w è l'accelerazione tridimensionale ordinaria diretta lungo l'asse delle x). La condizione relativisticamente invariante di accelerazione uniforme dev'essere rappresentata sotto forma di un 4-scalare costante coincidente con w^2 nel proprio sistema di riferimento:

$$w^i w_i = \text{costante} \equiv -\frac{w^2}{c^4}.$$

Nel sistema di riferimento « immobile » rispetto al quale si considera il moto, sviluppando l'espressione $w^i w_i$ si trova l'equazione.

$$\frac{d}{dt}\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = w \quad \text{oppure} \quad \frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = wt + \text{costante}.$$

Ponendo $v = 0$ per $t = 0$, si ha costante $= 0$, cosicché

$$v = \frac{wt}{\sqrt{1+\frac{w^2t^2}{c^2}}}.$$

Integrando ancora una volta e ponendo $x = 0$ per $t = 0$, si ottiene:

$$x = \frac{c^2}{w}\left(\sqrt{1+\frac{w^2t^2}{c^2}} - 1\right).$$

Per $wt \ll c$ queste formule si trasformano nelle espressioni classiche $v = wt$, $x = wt^2/2$. Per $wt \to \infty$ la velocità tende al valore costante di c.

Il tempo proprio di una particella animata da un moto uniformemente accelerato è dato dall'integrale

$$\int_0^t \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\, dt = \frac{c}{w}\,\mathrm{Arsh}\,\frac{wt}{c}.$$

Quando $t \to \infty$, esso cresce molto piú lentamente di t secondo la legge $\frac{c}{w}\ \ln\ \frac{2wt}{c}$.

Capitolo II

MECCANICA RELATIVISTICA

§ 8. *Principio di minima azione*

Per studiare il moto delle particelle materiali partiremo dal principio di minima azione. Secondo questo principio, per ogni sistema meccanico esiste un integrale S, detto azione, che è minimo per il moto effettivo e la cui variazione δS è, di conseguenza, nulla[1]).

Definiamo l'integrale d'azione per una particella materiale libera, non soggetta cioè all'azione di forze esterne.

È opportuno notare che questo integrale non deve dipendere dalla scelta del sistema di riferimento, cioè esso dev'essere invariante per trasformazioni di Lorentz. È evidente quindi che esso deve essere l'integrale di uno scalare. È chiaro inoltre che sotto il segno d'integrazione ci debbono essere differenziali del primo ordine. Il solo scalare di questo tipo che si può formare per una particella materiale libera è l'intervallo ds o $\alpha\, ds$, dove α è una costante.

L'azione per una particella libera deve essere quindi della forma

$$S = -\alpha \int_a^b ds,$$

dove l'integrale è esteso alla linea d'universo compresa tra due eventi dati a e b che rappresentano le posizioni iniziale e finale occupate dalla particella in istanti determinati t_1 e t_2, vale a dire tra i punti d'universo dati; α è una costante che caratterizza la particella data. È facile constatare che α deve essere una grandezza positiva per tutte le particelle. Infatti, nel § 3 abbiamo visto che l'integrale $\int_a^b ds$ ha un valore massimo quando è esteso ad una retta d'universo; esso può essere reso arbitrariamente piccolo, integrando lungo una curva d'universo.

---

[1]) A rigore, il principio di minima azione asserisce che l'integrale S deve essere minimo solo su piccoli archi della linea d'integrazione. Per linee di lunghezza arbitraria, si può affermare solo che l'integrale S ha un estremo che non è necessariamente un minimo (vedi vol. I, *Meccanica*, § 2).

In tal modo, l'integrale preceduto dal segno positivo non può avere un minimo; l'integrale preceduto dal segno opposto ha un minimo lungo la retta d'universo.

L'azione si può rappresentare sotto forma di un integrale nel tempo:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\, dt.$$

Il coefficiente di dt L è, come è noto, la *funzione di Lagrange* o *la lagrangiana* del sistema meccanico dato. Con l'aiuto della (3,1) troviamo

$$S = -\int_{t_1}^{t_2} \alpha c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt,$$

dove v è la velocità della particella materiale. La lagrangiana per la particella è quindi

$$L = -\alpha c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Come abbiamo già notato, la grandezza α caratterizza la particella data. Ogni praticella è caratterizzata in meccanica classica dalla sua massa m. Stabiliamo la relazione tra le grandezze α ed m, che può essere trovata imponendo che nel passaggio al limite per $c \to \infty$ la nostra espressione di L si trasformi nell'espressione classica

$$L = mv^2/2.$$

Per realizzare questo passaggio, sviluppiamo L in serie di potenze di v/c. Trascurando i termini di ordine superiore, si ottiene:

$$L = -\alpha c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx -\alpha c + \frac{\alpha v^2}{2c}.$$

I termini costanti della lagrangiana non incidono sulle equazioni del moto e si possono quindi omettere. Omettendo la costante αc in L e confrontando con l'espressione classica $L = mv^2/2$, troviamo che $\alpha = mc$.

L'azione per una particella materiale libera è quindi

$$S = -mc \int_a^b ds, \tag{8,1}$$

e la lagrangiana

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{8,2}$$

§ 9. *Energia ed impulso*

L'*impulso* di una particella è, come è noto, il vettore $\mathbf{p} = \partial L/\partial \mathbf{v}$ ($\partial L/\partial \mathbf{v}$ esprime simbolicamente un vettore le cui componenti sono le derivate di L rispetto alle componenti corrispondenti di $\mathbf{v}$). La formula (8,2) ci permette di trovare

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{9,1}$$

Per velocità piccole ($v \ll c$) o nel limite per $c \to \infty$, questa espressione si trasforma in quella classica $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. Per $v = c$, l'impulso diventa infinito.

La derivata dell'impulso rispetto al tempo è la forza agente sulla particella. Supponiamo ora che varii soltanto la direzione della velocità, cioè che la forza sia perpendicolare alla velocità. Allora

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d\mathbf{v}}{dt}. \tag{9,2}$$

Se invece varia soltanto il modulo della velocità, cioè la forza e la velocità sono collineari, si ha allora

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{m}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\frac{d\mathbf{v}}{dt}. \tag{9,3}$$

Vediamo che nei due casi la relazione tra forza e accelerazione è differente.

Si chiama *energia* $\mathscr{E}$ della particella la grandezza

$$\mathscr{E} = \mathbf{p}\mathbf{v} - L$$

(vedi vol. I, *Meccanica*, § 6). Sostituendo le espressioni (8,2) e (9,1), rispettivamente, con L e $\mathbf{p}$, otteniamo:

$$\mathscr{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{9,4}$$

Questa formula di grande importanza indica, in particolare, che in meccanica relativistica l'energia di una particella libera non si annulla per $v = 0$, ma prende il valore finito

$$\mathscr{E} = mc^2. \tag{9,5}$$

Questa è l'*energia di riposo* della particella.

Per velocità piccole ($v \ll c$), sviluppando in serie di potenze di v/c, si ha:

$$\mathscr{E} \approx mc^2 + \frac{mv^2}{2},$$

che rappresenta, se si sottrae l'energia di riposo, l'espressione classica dell'energia cinetica di una particella.

Sottolineiamo, che pur parlando qui di una « particella», non utilizziamo mai il suo carattere « elementare ». Di conseguenza, le formule ottenute sono ugualmente applicabili ad ogni corpo complesso, costituito da un gran numero di particelle; m rappresenterà allora la massa totale e v la velocità del corpo in blocco. In particolare, la formula (9,5) è valida anche per ogni corpo che in blocco è in quiete. Notiamo che l'energia di un corpo libero (cioè l'energia di qualsiasi sistema isolato), in meccanica relativistica, è una grandezza del tutto determinata, sempre positiva, direttamente legata alla massa del corpo. Ricordiamo a questo proposito che l'energia di un corpo è determinata, in meccanica classica, con un'approssimazione a meno di una costante additiva e può essere sia positiva che negativa.

L'energia di un corpo in quiete comprende, oltre all'energia di riposo delle particelle che lo compongono, l'energia cinetica delle particelle e la loro energia di interazione. In altri termini, mc^2 non è uguale alla somma $\sum m_a c^2$ (m_a sono le masse delle particelle) e, di conseguenza, nemmeno m è uguale a $\sum m_a$. Quindi nella meccanica relativistica la legge di conservazione della massa non sussiste: la massa di un corpo composto non è uguale alla somma delle masse delle sue componenti. Resta valida soltanto la legge di conservazione dell'energia, che comprende anche l'energia di riposo della particella.

Elevando al quadrato le espressioni (9,1) e (9,4) e confrontandole, troviamo la seguente relazione tra l'energia e l'impulso di una particella:

$$\frac{\mathscr{E}^2}{c^2} = p^2 + m^2c^2. \tag{9,6}$$

L'energia espressa in funzione dell'impulso è detta, come si sa, *funzione di Hamilton* o *hamiltoniana*:

$$\mathscr{H} = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}. \tag{9,7}$$

Per velocità piccole, $p \ll mc$, si ha approssimativamente

$$\mathscr{H} \approx mc^2 + \frac{p^2}{2m},$$

cioè, sottraendo l'energia di riposo, si ottiene la nota espressione classica della funzione di Hamilton.

Dalle espressioni (9,1) e (9,4) deriva anche la seguente relazione tra l'energia, l'impulso e la velocità di una particella libera:

$$\mathbf{p} = \frac{\mathscr{E}\mathbf{v}}{c^2}. \tag{9,8}$$

Per $v = c$, l'impulso e l'energia della particella diventano infiniti. Questo significa che una particella di massa m non nulla non può muoversi alla velocità della luce. In meccanica relativistica possono tuttavia esistere particelle con massa nulla, che si muovono alla velocità della luce[1]). La formula (9,8) per tali particelle assume la forma:

$$p = \frac{\mathscr{E}}{c}. \tag{9,9}$$

Questa formula è valida anche per particelle di massa non nulla nel caso, detto *ultrarelativistico*, in cui l'energia della particella $\mathscr{E}$ è grande rispetto alla sua energia di riposo mc^2.

Scriviamo ora tutte le relazioni ottenute in notazioni quadridimensionali. Secondo il principio di minima azione,

$$\delta S = -mc\delta \int_a^b ds = 0.$$

Al fine di esplicitare l'espressione di δS, osserviamo che $ds = \sqrt{dx_i dx^i}$ e, di conseguenza,

$$\delta S = -mc \int_a^b \frac{dx_i \delta\, dx^i}{ds} = -mc \int_a^b u_i\, dx^i.$$

Integrando per parti, troviamo:

$$\delta S = -mcu_i \delta x^i \Big|_a^b + mc \int_a^b \delta x^i \frac{du_i}{ds}\, ds. \tag{9,10}$$

Come è noto, per stabilire le equazioni del moto si confrontano diverse traiettorie passanti per due punti dati, cioè ai limiti $(\delta x^i)_a = (\delta x^i)_b = 0$. La traiettoria effettiva si deduce dalla condizione $\delta S = 0$. La formula (9,10) ci dà allora l'equazione $du_i/ds = 0$, che esprime la costanza della velocità di una particella libera nello spazio quadridimensionale.

Per trovare la variazione dell'azione come funzione delle coordinate, bisogna fissare solo il punto a, porre cioè $(\delta x^i)_a = 0$. Il secondo punto invece va supposto variabile, tenendo però presente che si devono considerare soltanto le traiettorie reali, cioè che soddisfano le equazioni del moto. L'integrale nell'espressione (9,10) per δS è

---

[1]) Per esempio i quanti luminosi, ossia i fotoni, e anche il neutrino.

quindi nullo. In luogo di $(\delta x^i)_b$ scriviamo semplicemente δx^i e troviamo:

$$\delta S = -mcu_i \delta x^i. \tag{9,11}$$

Il quadrivettore

$$p_i = -\frac{\partial S}{\partial x^i} \tag{9,12}$$

è detto *4-impulso*. Come è noto dalla meccanica, le derivate $\partial S/\partial x$, $\partial S/\partial y$, $\partial S/\partial z$ sono le tre componenti del vettore impulso **p** della particella, e la derivata $\partial S/\partial t$ è l'energia $\mathscr{E}$ della particella. Per questo le componenti covarianti del 4-impulso sono $p_i = (\mathscr{E}/c, -\mathbf{p})$ e le componenti controvarianti[1])

$$p^i = \left(\frac{\mathscr{E}}{c}, \mathbf{p}\right). \tag{9,13}$$

Dalla (9,11) risulta che le componenti del 4-impulso di una particella libera sono

$$p^i = mcu^i. \tag{9,14}$$

Sostituendo le componenti della 4-velocità con le corrispondenti espressioni (7,2) si vede facilmente che si ottengono per **p** ed $\mathscr{E}$ le formule (9,1) e (9,4).

In meccanica relativistica l'impulso e l'energia sono quindi le componenti di uno stesso quadrivettore. Ne derivano immediatamente le formule di trasformazione dell'impulso e dell'energia nel passaggio da un sistema di riferimento inerziale ad un altro. Riportando nelle formule generali di trasformazione di un quadrivettore (6,1) le espressioni (9,13), troviamo:

$$p_x = \frac{p'_x + \frac{V}{c^2}\mathscr{E}'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad p_y = p'_y, \quad p_z = p'_z, \quad \mathscr{E} = \frac{\mathscr{E}' + Vp'_x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \tag{9,15}$$

dove p_x, p_y, p_z sono le componenti del vettore tridimensionale **p**.

Dalla definizione del 4-impulso (9,14) e dall'identità $u^i u_i = 1$ otteniamo per il quadrato del 4-impulso di una particella libera:

$$p^i p_i = m^2c^2. \tag{9,16}$$

Sostituendovi le espressioni (9,13), ritorniamo alla relazione (9,6).

Per analogia con la definizione ordinaria di forza, il quadrivettore forza si può definire come la derivata

$$g^i = \frac{dp^i}{ds} = mc\frac{du^i}{ds}. \tag{9,17}$$

---

[1]) Citiamo la regola mnemonica che permette di ricordare la definizione dei quadrivettori fisici: le componenti controvarianti sono collegate ai vettori tridimensionali (**r** per x^i, **p** per p^i, ecc.) preceduti dal « giusto » segno positivo.

Le sue componenti soddisfano l'identità $g_i u^i = 0$. Le componenti di questo quadrivettore si esprimono mediante il vettore forza tridimensionale ordinario $\mathbf{f} = d\mathbf{p}/dt$ secondo l'espressione

$$g^i = \left(\frac{\mathbf{f}\mathbf{v}}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\mathbf{f}}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right). \tag{9,18}$$

La componente temporale risulta legata al lavoro della forza.

L'equazione relativistica di Hamilton-Jacobi si ottiene sostituendo p_i nella (9,16) con le derivate $-\partial S/\partial x^i$:

$$\frac{\partial S}{\partial x_i} \frac{\partial S}{\partial x^i} \equiv g^{ik} \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial S}{\partial x^k} = m^2 c^2, \tag{9,19}$$

oppure, scrivendo la somma in forma esplicita:

$$\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 = m^2 c^2. \tag{9,20}$$

Il passaggio limite alla meccanica classica nell'equazione (9,20) si può eseguire nel modo seguente. Bisogna innanzitutto tener presente, come per il passaggio corrispondente nella (9,7), che in meccanica relativistica l'energia di una particella contiene il termine mc^2, assente in meccanica classica. Siccome l'azione S è legata all'energia dall'espressione $\mathscr{E} = -\partial S/\partial t$, nel passaggio alla meccanica classica bisogna introdurre in luogo di S una nuova azione S' che soddisfi la relazione

$$S = S' - mc^2 t.$$

Sostituendo nella (9,20), troviamo:

$$\frac{1}{2mc^2} \left(\frac{\partial S'}{\partial t} \right)^2 - \frac{\partial S'}{\partial t} - \frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S'}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S'}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S'}{\partial z} \right)^2 \right] = 0.$$

Quando $c \to \infty$, questa equazione si trasforma nella nota equazione di Hamilton-Jacobi della meccanica classica.

§ 10. *Trasformazione della funzione di distribuzione*

Nello studio di diversi problemi di fisica si ha a che fare con un fascio di particelle aventi differenti impulsi. La struttura di questo fascio, il suo spettro in impulso, è caratterizzato dalla *funzione di distribuzione* delle particelle in impulso: $f(\mathbf{p})\, dp_x dp_y dp_z$ è il numero di particelle aventi impulsi con componenti compresi negli intervalli dp_x, dp_y, dp_z (o, come si dice piú brevemente, il numero di particelle nell'elemento di volume $d^3p \equiv dp_x dp_y dp_z$ dello « spazio degli impulsi »). Sorge allora il problema di determinare la legge di trasformazione della funzione di distribuzione $f(\mathbf{p})$ nel passaggio da un sistema di riferimento ad un altro.

Per trovare la soluzione del problema posto, studiamo innanzitutto le proprietà dell'« elemento di volume » $dp_x dp_y dp_z$ rispetto alle trasformazioni di Lorentz. Se si prende un sistema di coordinate quadridimensionale su cui assi si pongono le quattro componenti del 4-impulso della particella, si può allora considerare $dp_x dp_y dp_z$ come la quarta componente dell'elemento della ipersuperficie definita dall'equazione $p^i p_i = m^2c^2$. Elemento della ipersuperficie è un quadrivettore orientato lungo la sua normale; nel caso considerato, la direzione della normale coincide evidentemente con quella del quadrivettore p_i. Il rapporto

$$\frac{dp_x\, dp_y\, dp_z}{\mathscr{E}}, \tag{10,1}$$

in quanto rapporto di componenti uguali di due quadrivettori paralleli, è una grandezza invariante[1]).

Il numero di particelle $f\, dp_x dp_y dp_z$, non dipendente dalla scelta del sistema di riferimento, è evidentemente anch'esso un invariante. Scrivendolo nella forma

$$f(\mathbf{p})\, \mathscr{E} \frac{dp_x\, dp_y\, dp_z}{\mathscr{E}}$$

e tenendo conto dell'invarianza delle relazioni (10,1), deduciamo l'invarianza del prodotto $f(\mathbf{p})\mathscr{E}$. Ne segue che la funzione di distribuzione nel sistema K' è legata alla funzione di distribuzione nel sistema K dalla relazione

$$f'(\mathbf{p}') = \frac{f(\mathbf{p})\, \mathscr{E}}{\mathscr{E}'}, \tag{10,2}$$

dove $\mathbf{p}$ ed $\mathscr{E}$ debbono essere espresse in funzione di $\mathbf{p}'$ e $\mathscr{E}'$ con l'aiuto delle formule di trasformazione (9,15).

Torniamo all'espressione invariante (10,1). Introducendo le « coordinate sferiche » nello spazio degli impulsi, l'elemento di volume $dp_x dp_y dp_z$ sarà sostituito con $p^2 dp\, do$, dove do è l'elemento d'angolo solido attorno alla direzione del vettore $\mathbf{p}$. Notando che $p\, dp =$

---

[1]) L'integrazione sull'elemento (10,1) può essere rappresentata in forma quadridimensionale con l'aiuto della funzione δ (vedi nota alla pag. 100) come l'integrazione su

$$\frac{2}{c}\, \delta(p^i p_i - m^2c^2)\, d^4p, \quad d^4p = dp^0\, dp^1\, dp^2\, dp^3. \tag{10,1a}$$

Le quattro componenti p^i sono considerate qui come variabili indipendenti (p^0 prende soltanto valori positivi). La formula (10,1a) risulta evidente dalla seguente rappresentazione della funzione δ da essa contenuta:

$$\delta(p^i p_i - m^2c^2) = \delta\left(p_0^2 - \frac{\mathscr{E}^2}{c^2}\right) = \frac{c}{2\mathscr{E}}\left[\delta\left(p_0 + \frac{\mathscr{E}}{c}\right) + \delta\left(p_0 - \frac{\mathscr{E}}{c}\right)\right], \tag{10,1b}$$

dove $\mathscr{E} = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}$. A sua volta, questa formula segue dalla formula (5) citata nella nota alla pag. 100.

$= \mathscr{E} d\mathscr{E}/c^2$ [in virtú della (9,6)], abbiamo:

$$\frac{p^2\, dp\, do}{\mathscr{E}} = \frac{p\, d\mathscr{E}\, do}{c^2}.$$

Si vede quindi che anche l'espressione

$$p d\mathscr{E} do \tag{10,3}$$

è invariante.

Il concetto di funzione di distribuzione è presente, sotto un altro aspetto, nella teoria cinetica dei gas: il prodotto $f(\mathbf{r}, \mathbf{p})\, dp_x dp_y dp_z dV$ è il numero di particelle contenute nell'elemento di volume dV dato e aventi impulsi compresi negli intervalli dp_x, dp_y, dp_z dati. La funzione $f(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ è detta funzione di distribuzione nello *spazio delle fasi* (spazio delle coordinate e degli impulsi di una particella), e il prodotto dei differenziali $d\tau = d^3p\, dV$, elemento di volume di questo spazio. Troviamo la legge di trasformazione di questa funzione.

Introduciamo, accanto ai sistemi di riferimento K e K', ancora un altro sistema K_0 nel quale le particelle dell'impulso considerato sono in quiete; proprio rispetto a questo sistema viene determinato il volume proprio dV_0 dell'elemento occupato dalle particelle date. Per definizione le velocità dei sistemi K e K' coincidono, rispetto al sistema K_0, con le velocità v e v' delle particelle nei sistemi K e K'. In virtú della (4,6) si ha quindi:

$$dV = dV_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad dV' = dV_0 \sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}},$$

donde

$$\frac{dV}{dV'} = \frac{\mathscr{E}'}{\mathscr{E}}.$$

Moltiplicando questa uguaglianza per l'uguaglianza $d^3p/d^3p' = \mathscr{E}/\mathscr{E}'$, troviamo che

$$d\tau = d\tau', \tag{10,4}$$

cioè l'elemento del volume delle fasi è invariante. Siccome per definizione è invariante anche il numero di particelle $f\, d\tau$, da quanto esposto deduciamo l'invarianza della funzione di distribuzione nello spazio delle fasi:

$$f'(\mathbf{r}', \mathbf{p}') = f(\mathbf{r}, \mathbf{p}), \tag{10,5}$$

dove $\mathbf{r}'$, $\mathbf{p}'$ sono legati a $\mathbf{r}$, $\mathbf{p}$ dalle formule di trasformazione di Lorentz.

§ 11. *Decadimento di particelle*

Consideriamo il decadimento spontaneo di un corpo di massa M in due parti di massa m_1 ed m_2. La legge di conservazione dell'energia per questo processo, nel sistema di riferimento dove il corpo

è in quiete, è data da[1])

$$M = \mathscr{E}_{10} + \mathscr{E}_{20}, \tag{11,1}$$

dove $\mathscr{E}_{10}$ ed $\mathscr{E}_{20}$ sono le rispettive energie dei due frammenti. Essendo $\mathscr{E}_{10} > m_1$ ed $\mathscr{E}_{20} > m_2$, l'uguaglianza (11,1) può aver luogo soltanto se $M > m_1 + m_2$, e il corpo può quindi decadere spontaneamente in parti la cui massa totale è inferiore alla massa del corpo stesso. Al contrario, se $M < m_1 + m_2$, il corpo è stabile (relativamente al processo considerato) e non può decadere spontaneamente. Per realizzare il decadimento, bisognerebbe in questo caso comunicare al corpo un'energia dall'esterno tale che sia almeno uguale alla sua « energia di legame » $(m_1 + m_2 - M)$.

Nel decadimento, insieme alla legge di conservazione dell'energia, deve essere valida anche la legge di conservazione dell'impulso, cioè la somma degli impulsi dei frammenti, come anche l'impulso iniziale del corpo, deve essere nulla: $\mathbf{p}_{10} + \mathbf{p}_{20} = 0$. Ne segue che $p_{10}^2 = p_{20}^2$, oppure

$$\mathscr{E}_{10}^2 - m_1^2 = \mathscr{E}_{20}^2 - m_2^2. \tag{11,2}$$

Le due equazioni (11,1) e (11,2) determinano univocamente le energie dei frammenti prodotti dalla scissione:

$$\mathscr{E}_{10} = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M}, \quad \mathscr{E}_{20} = \frac{M^2 - m_1^2 + m_2^2}{2M}. \tag{11,3}$$

Il problema risulta in un certo senso inverso allorché si calcola l'energia totale M di due particelle in collisione in un sistema di riferimento dove il loro impulso totale è nullo (oppure, come si dice brevemente, nel *sistema del centro di massa* o « sistema c »). Il calcolo di questa grandezza dà un criterio per dedurre la possibilità di realizzazione di diversi processi di collisioni anelastiche accompagnate da cambiamenti di stato delle particelle collidenti o da « creazione » di nuove particelle. Ogni processo di questo genere può aver luogo alla sola condizione che la somma delle masse di tutti i « prodotti di reazione » non sia superiore ad M.

Supponiamo che nel sistema iniziale di riferimento (detto *sistema del laboratorio*) una particella di massa m_1 e di energia $\mathscr{E}_1$ collida con una particella in quiete di massa m_2. L'energia totale di ambedue le

---

[1]) Nei §§ 11-13 poniamo $c = 1$. In altri termini, la velocità della luce è scelta come unità di misura delle velocità (la dimensione della lunghezza e del tempo è allora la stessa). Tale scelta è del tutto naturale in meccanica relativistica e semplifica la scrittura delle formule. Ciò nondimeno, non faremo uso di questo sistema nel presente volume (in gran parte dedicato alla teoria non relativistica); ogni qual volta si ricorrerà a questo sistema di unità di misura, lo si preciserà.

Se in qualche formula è posto $c = 1$, non sarà difficile ritornare alle unità di misura ordinarie: la velocità della luce si introduce in maniera tale da assicurare la consistenza dimensionale.

particelle è

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2 = \mathscr{E}_1 + m_2,$$

e l'impulso totale $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1$. Consideriamo le due particelle come un unico sistema composto; la velocitá del « sistema » si può determinare con l'aiuto della (9,8)

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{p}}{\mathscr{E}} = \frac{\mathbf{p}_1}{\mathscr{E}_1 + m_2}. \tag{11,4}$$

Tale è la velocità del moto del sistema c rispetto al sistema del laboratorio (sistema l).

Per la determinazione della massa incognita M non c'è però bisogno di effettuare di fatto la trasformazione da un sistema di riferimento in un altro. Si può invece applicare direttamente la formula (9,6), valida sia per il sistema composto sia per ogni particella presa separatamente. In tal modo, si ha:

$$M^2 = \mathscr{E}^2 - p^2 = (\mathscr{E}_1 + m_2)^2 - (\mathscr{E}_1^2 - m_1^2),$$

donde

$$M^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2m_2\mathscr{E}_1. \tag{11,5}$$

PROBLEMI

1. Una particella che si muove con velocità V decade « in volo » in due Trovare la relazione tra gli angoli di deflessione di queste particelle e le loro energie.

Soluzione. Siano $\mathscr{E}_0$ l'energia di una delle particelle di decadimento nel sistema c [cioè $\mathscr{E}_{10}$ o $\mathscr{E}_{20}$ data dalla (11,3)], $\mathscr{E}$ l'energia di questa particella nel sistema l e θ l'angolo di deflessione nel sistema l (formato con la direzione $\mathbf{V}$). Le formule di trasformazione (9,15) ci danno:

$$\mathscr{E}_0 = \frac{\mathscr{E} - Vp\cos\theta}{\sqrt{1-V^2}},$$

donde

$$\cos\theta = \frac{\mathscr{E} - \mathscr{E}_0\sqrt{1-V^2}}{V\sqrt{\mathscr{E}^2 - m^2}}. \tag{1}$$

Ricavando di qui $\mathscr{E}$ in funzione di $\cos\theta$, otteniamo una equazione di secondo grado (rispetto ad $\mathscr{E}$):

$$\mathscr{E}^2(1 - V^2\cos^2\theta) - 2\mathscr{E}\mathscr{E}_0\sqrt{1-V^2} + \mathscr{E}_0^2(1-V^2) + V^2m^2\cos^2\theta = 0, \tag{2}$$

avente una radice positiva (quando la velocità della particella di decadimento nel sistema c è $v_0 > V$) o due radici positive (quando $v_0 < V$).

La seguente costruzione grafica chiarirà le due possibilità indicate. Conformemente alla (9,15), la componente dell'impulso nel sistema l si esprime mediante le grandezze relative al sistema c come segue:

$$p_x = \frac{p_0\cos\theta_0 + \mathscr{E}_0 V}{\sqrt{1-V^2}}, \quad p_y = p_0 \operatorname{sen}\theta_0.$$

Eliminando θ_0 abbiamo:

$$p_y^2 + (p_x\sqrt{1-V^2} - \mathscr{E}_0 V)^2 = p_0^2.$$

Quest'ultima è, rispetto alle variabili p_x e p_y, l'equazione di un'ellisse di semiassi $p_0/\sqrt{1-V^2}$, p_0 e di centro (il punto O sulla fig. 3) spostato alla distanza $\mathscr{E}_0 V/\sqrt{1-V^2}$ dal punto $\mathbf{p} = 0$ (il punto A sulla fig. 3) [1].

Se $V > p_0/\mathscr{E}_0 = v_0$, il punto A si trova al di fuori dell'ellisse (fig. 3, *b*) e, per un angolo θ fissato, il vettore $\mathbf{p}$ (e con esso l'energia $\mathscr{E}$) può prendere due valori distinti. Dalla figura si vede anche che in questo caso l'angolo θ può prendere solamente valori che non superino un valore determinato θ_{max} (posizione

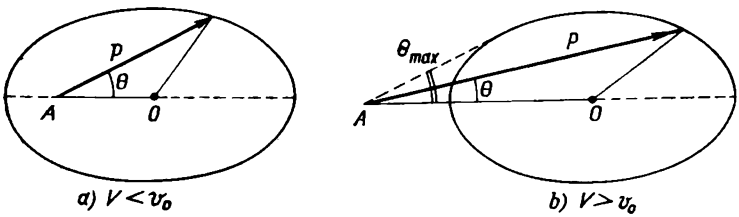

Fig. 3

per la quale il vettore $\mathbf{p}$ è tangente all'ellisse). Il valore θ_{max} viene determinato piú semplicemente in modo analitico, eliminando il discriminante nell'equazione di secondo grado (2) e trovando che

$$\operatorname{sen}\theta_{max} = \frac{p_0\sqrt{1-V^2}}{mV}.$$

2. Trovare la distribuzione in energia delle particelle di decadimento nel sistema *l*.

Soluzione. Nel sistema *c* le particelle di decadimento sono distribuite uniformemente in tutte le direzioni, cioè la quantità di particelle nell'elemento d'angolo solido $do_0 = 2\pi \operatorname{sen}\theta_0 d\theta_0$ è

$$dN = \frac{1}{4\pi}\,do_0 = \frac{1}{2}\,|\,d\cos\theta_0\,|. \tag{1}$$

L'energia nel sistema *l* è legata alle grandezze corrispondenti nel sistema *c* dalla relazione

$$\mathscr{E} = \frac{\mathscr{E}_0 + p_0 V\cos\theta_0}{\sqrt{1-V^2}}$$

e prende i valori compresi tra

$$\frac{\mathscr{E}_0 - Vp_0}{\sqrt{1-V^2}} \quad \text{e} \quad \frac{\mathscr{E}_0 + Vp_0}{\sqrt{1-V^2}}.$$

Esprimendo $|\,d\cos\theta_0\,|$ in funzione di $d\mathscr{E}$, troviamo la distribuzione in energia, normalizzata all'unità (per ciascuna delle particelle di decadimento):

$$dN = \frac{1}{2Vp_0}\sqrt{1-V^2}\,d\mathscr{E}.$$

3. Determinare l'intervallo dei valori che può prendere nel sistema *l* l'angolo tra le due particelle di decadimento nel caso di particelle identiche.

[1]) Nel limite classico, l'ellisse diventa un cerchio (vedi vol. I, *Meccanica*, § 16).

Soluzione. Nel sistema c le particelle si allontanano in versi opposti, quindi $\theta_{10} = \pi - \theta_{20} \equiv \theta_0$. Il legame tra gli angoli nel sistema c e nel sistema l è dato, in virtú della (5,4), dalle formule

$$\operatorname{ctg}\theta_1 = \frac{v_0 \cos\theta_0 + V}{v_0 \operatorname{sen}\theta_0 \sqrt{1-V^2}}, \quad \operatorname{ctg}\theta_2 = \frac{-v_0\cos\theta_0 + V}{v_0 \operatorname{sen}\theta_0 \sqrt{1-V^2}}$$

(nel dato caso $v_{10} = v_{20} \equiv v_0$). L'angolo cercato è $\Theta = \theta_1 + \theta_2$; un semplice calcolo ci dà il suo valore:

$$\operatorname{ctg}\Theta = \frac{V^2 - v_0^2 + V^2 v_0^2 \operatorname{sen}^2\theta_0}{2Vv_0\sqrt{1-V^2}\operatorname{sen}\theta_0}.$$

Lo studio degli estremi di questa espressione ci conduce ai seguenti intervalli di valori possibili di Θ:

se $V < v_0$: $\quad 2\operatorname{arctg}\left(\frac{v_0}{V}\sqrt{1-V^2}\right) < \Theta < \pi$;

se $v_0 < V < \frac{v_0}{\sqrt{1-v_0^2}}$: $\quad 0 < \Theta < \operatorname{arcsen}\sqrt{\frac{1-V^2}{1-v_0^2}} < \frac{\pi}{2}$;

se $V > \frac{v_0}{\sqrt{1-v_0^2}}$: $\quad 0 < \Theta < 2\operatorname{arctg}\left(\frac{v_0}{V}\sqrt{1-V^2}\right) < \frac{\pi}{2}$.

4. Trovare, nel sistema l, la distribuzione angolare per particelle di decadimento di massa nulla.

Soluzione. Il legame tra gli angoli di diffusione nei sistemi c e l per una particella di massa $m = 0$ è dato, in virtú della (5,6), dalla formula

$$\cos\theta_0 = \frac{\cos\theta - V}{1 - V\cos\theta}.$$

Riportando questa espressione nella formula (1) del problema 2, otteniamo:

$$dN = \frac{(1-V^2)\,do}{4\pi(1-V\cos\theta)^2}.$$

5. Trovare, nel sistema l, la distribuzione angolare rispetto all'angolo tra due particelle nel caso in cui esse abbiano massa nulla.

Soluzione. Il legame tra gli angoli di diffusione θ_1, θ_2 nel sistema l e gli angoli $\theta_{10} \equiv \theta_0$, $\theta_{20} = \pi - \theta_0$ nel sistema c è dato dalle formule (5,6), dopo di che troviamo per l'angolo cercato $\Theta = \theta_1 + \theta_2$:

$$\cos\Theta = \frac{2V^2 - 1 - V^2\cos^2\theta_0}{1 - V^2\cos^2\theta_0}$$

o risolvendo rispetto a $\cos\theta_0$:

$$\cos\theta_0 = \sqrt{1 - \frac{1-V^2}{V^2}\operatorname{ctg}^2\frac{\Theta}{2}}.$$

Sostituendo questa espressione nella formula (1) del problema 2, otteniamo:

$$dN = \frac{1-V^2}{16\pi V}\,\frac{do}{\operatorname{sen}^3\frac{\Theta}{2}\sqrt{V^2 - \cos^2\frac{\Theta}{2}}}.$$

L'angolo Θ prende i valori da π a $\Theta_{\min} = 2\arccos V$.

6. Determinare l'energia massima che può competere a una delle particelle di decadimento quando una particella fissa di massa M decade in tre particelle di masse m_1, m_2, m_3.

Soluzione. La particella m_1 possiede l'energia massima allorché il sistema delle due altre particelle m_2 ed m_3 ha la massa minima possibile; quest'ultima è uguale alla somma $m_2 + m_3$ (caso in cui queste due particelle si muovono insieme alla stessa velocità). Riducendo cosí il problema al decadimento di un corpo in due parti, conformemente alla (11,3), otteniamo:

$$\mathscr{E}_{1\,\max} = \frac{M^2 + m_1^2 - (m_2 + m_3)^2}{2M}.$$

§ 12. *Sezione d'urto invariante*

Come è noto, i differenti processi di diffusione sono caratterizzati dalle loro *sezioni d'urto* (o, brevemente, *sezioni*) che determinano il numero di urti che avvengono nei fasci di particelle in collisione.

Supponiamo di avere due fasci in collisione. Indichiamo con n_1 ed n_2 le densità di particelle in essi (cioè il numero di particelle nell'unità di volume), e con $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ le velocità delle particelle. Nel sistema di riferimento dove le particelle *2* sono in quiete (o, brevemente, nel *sistema di quiete* delle particelle *2*) il fascio delle particelle *1* urta contro un bersaglio immobile. Secondo la definizione ordinaria della sezione d'urto σ, il numero di urti avvenuti nel volume dV nel tempo dt è

$$d\nu = \sigma v_{\text{rel}} n_1 n_2\, dV\, dt,$$

dove v_{rel} è la velocità delle particelle *1* nel sistema di quiete delle particelle *2* (questa è la definizione della velocità relativa di due particelle in meccanica relativistica).

Il numero $d\nu$ è, di per se stesso, una grandezza invariante. Ci proponiamo ora di esprimerla in una forma che sia applicabile a qualsiasi sistema di riferimento:

$$d\nu = A n_1 n_2 dV dt, \tag{12,1}$$

dove A è una grandezza da determinare; si sa che nel sistema di quiete di una delle particelle essa è uguale a $v_{\text{rel}}\sigma$. Sottolineiamo che considereremo sempre σ come sezione d'urto nel sistema di quiete di una delle particelle, che, per definizione, è invariante. Per definizione, è invariante anche la velocità relativa v_{rel}.

Il prodotto $dV\,dt$ dell'espressione (12,1) è una grandezza invariante. Di conseguenza, deve essere invariante anche il prodotto An_1n_2.

È facile trovare la legge di trasformazione della densità delle particelle n, se notiamo che il numero di particelle $n\,dV$ nell'elemento di volume dato dV è un invariante. Scrivendo $n\,dV = n_0 dV_0$ (l'indice zero significa il sistema di quiete delle particelle) e serven-

doci della formula (4,6) per trasformare il volume, troviamo:

$$n = \frac{n_0}{\sqrt{1-v^2}}, \tag{12,2}$$

oppure $n = n_0\mathscr{E}/m$, dove $\mathscr{E}$ è l'energia ed m la massa delle particelle.

Ne deriva che l'invarianza del prodotto An_1n_2 è equivalente all'invarianza dell'espressione $A\mathscr{E}_1\mathscr{E}_2$. È piú comodo esprimere questa condizione nella forma

$$A\frac{\mathscr{E}_1\mathscr{E}_2}{p_{1i}p_2^i} = A\frac{\mathscr{E}_1\mathscr{E}_2}{\mathscr{E}_1\mathscr{E}_2 - \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2} = \text{invariante}, \tag{12,3}$$

dove la grandezza a denominatore, essendo il prodotto dei 4-impulsi delle due particelle è anch'essa invariante.

Nel sistema di quiete delle particelle *2* abbiamo $\mathscr{E}_2 = m_2$ e $\mathbf{p}_2 = 0$, quindi la grandezza invariante (12,3) si riduce ad A. D'altra parte, in questo sistema $A = \sigma v_{\text{rel}}$. Di conseguenza, in un sistema di riferimento arbitrario si ha:

$$A = \sigma v_{\text{rel}} \frac{p_{1i}p_2^i}{\mathscr{E}_1\mathscr{E}_2}. \tag{12,4}$$

Per dare a questa espressione una forma definitiva, esprimiamo v_{rel} mediante gli impulsi o le velocità delle particelle in un sistema di riferimento arbitrario. Notiamo a questo proposito che nel sistema di quiete delle particelle *2* l'invariante è

$$p_{1i}p_2^i = \frac{m_1}{\sqrt{1-v_{\text{rel}}^2}} m_2.$$

Quindi

$$v_{\text{rel}} = \sqrt{1 - \frac{m_1^2 m_2^2}{(p_{1i}p_2^i)^2}}. \tag{12,5}$$

Esprimendo la grandezza $p_{1i}p_2^i = \mathscr{E}_1\mathscr{E}_2 - \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2$ in funzione delle velocità $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ mediante le formule (9,1) e (9,4):

$$p_{1i}p_2^i = m_1m_2 \frac{1 - \mathbf{v}_1\mathbf{v}_2}{\sqrt{(1-v_1^2)(1-v_2^2)}}$$

e sostituendo nella (12,5), dopo semplici trasformazioni otteniamo per la velocità relativa la seguente espressione:

$$v_{\text{rel}} = \frac{\sqrt{(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 - [\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2]^2}}{1 - \mathbf{v}_1\mathbf{v}_2} \tag{12,6}$$

(notiamo che questa espressione è simmetrica rispetto a $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$, cioè la grandezza della velocità relativa non dipende da quale delle due particelle essa sia determinata).

Sostituendo la (12,5) o la (12,6) nella (12,4) e poi nella (12,1), otterremo le formule definitive che permettono di risolvere il problema posto:

$$d\nu = \sigma \frac{\sqrt{(p_{1i}p^i_2)^2 - m_1^2 m_2^2}}{\mathscr{E}_1 \mathscr{E}_2} n_1 n_2 \, dV \, dt \tag{12,7}$$

ossia

$$d\nu = \sigma \sqrt{(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 - [\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2]^2} \, n_1 n_2 \, dV \, dt \tag{12,8}$$

(*W. Pauli*, 1933).

Se le velocità $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono collineari, si ha allora $[\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2] = 0$, e la formula (12,8) diventa

$$d\nu = \sigma \, | \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 | \, n_1 n_2 \, dV \, dt. \tag{12,9}$$

PROBLEMA

Trovare l'« elemento di lunghezza » nello « spazio delle velocità » relativistico.

Soluzione. L'« elemento di lungehzza » dl_v cercato rappresenta la velocità relativa di due punti con velocità $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$, rispettivamente. Quindi dalla (12,6) ricaviamo:

$$dl_v^2 = \frac{(d\mathbf{v})^2 - [\mathbf{v} \, d\mathbf{v}]^2}{(1 - v^2)^2} = \frac{dv^2}{(1 - v^2)^2} + \frac{v^2}{(1 - v^2)} (d\theta^2 + \operatorname{sen}^2 \theta \, d\varphi^2),$$

dove θ, φ sono l'angolo polare e l'angolo azimutale del vettore $\mathbf{v}$. Se in luogo di v si introduce la nuova variabile χ, facendo la sostituzione $v = \operatorname{th} \chi$, l'elemento di lunghezza assumerà la forma

$$dl_v^2 = d\chi^2 + \operatorname{sh}^2 \chi \, (d\theta^2 + \operatorname{sen}^2 \theta \, d\varphi^2).$$

Dal punto di vista geometrico, questo è l'elemento di lunghezza nello spazio tridimensionale di Lobacevski, ossia lo spazio a curvatura costante negativa [cfr. (111,8)].

§ 13. *Urti elastici tra particelle*

Consideriamo, dal punto di vista della meccanica relativistica, un *urto elastico* tra particelle. Indichiamo con $\mathbf{p}_1$, $\mathscr{E}_1$ e $\mathbf{p}_2$, $\mathscr{E}_2$ gli impulsi e le energie delle due particelle in collisione (di masse m_1 ed m_2); i valori delle grandezze dopo l'urto verranno indicati con gli apici.

Le leggi di conservazione dell'energia e dell'impulso nell'urto si possono scrivere sotto forma di una equazione di conservazione del 4-impulso:

$$p_1^i + p_2^i = p_1'^i + p_2'^i. \tag{13,1}$$

Sulla base di questa equazione quadrivettoriale troviamo le relazioni invarianti che ci serviranno per ulteriori calcoli. A tale scopo scrivia-

mo l'equazione (13,1) nella forma

$$p_1^i + p_2^i - p_1'^i = p_2'^i$$

ed eleviamo al quadrato i due membri dell'uguaglianza (cioè scriviamo i loro quadrati scalari). Notando che i quadrati dei 4-impulsi p_1^i e $p_1'^i$ sono uguali ad m_1^2, e i quadrati di p_2^i e $p_2'^i$ ad m_2^2, otteniamo:

$$m_1^2 + p_{1i}p_2^i - p_{1i}p_1'^i - p_{2i}p_1'^i = 0. \tag{13,2}$$

Analogamente, elevando al quadrato l'uguaglianza $p_1^i + p_2^i - p_2'^i = p_1'^i$, otteniamo:

$$m_2^2 + p_{1i}p_2^i - p_{2i}p_2'^i - p_{1i}p_2'^i = 0. \tag{13,3}$$

Consideriamo l'urto in un sistema di riferimento (sistema l) dove prima dell'urto una delle particelle (particella m_2) è in quiete. In questo caso, $\mathbf{p}_2 = 0$, $\mathscr{E}_2 = m_2$ e i prodotti scalari della formula (13,2) sono:

$$p_{1i}p_2^i = \mathscr{E}_1 m_2, \quad p_{2i}p_1'^i = m_2\mathscr{E}_1',$$
$$p_{1i}p_1'^i = \mathscr{E}_1\mathscr{E}_1' - \mathbf{p}_1\mathbf{p}_1' = \mathscr{E}_1\mathscr{E}_1' - p_1p_1'\cos\theta_1, \tag{13,4}$$

dove θ_1 è l'angolo di diffusione della particella incidente m_1. Riportando queste espressioni nella (13,2), otteniamo:

$$\cos\theta_1 = \frac{\mathscr{E}_1'(\mathscr{E}_1 + m_2) - \mathscr{E}_1 m_2 - m_1^2}{p_1p_1'}. \tag{13,5}$$

Analogamente, dalla (13,3) racaviamo:

$$\cos\theta_2 = \frac{(\mathscr{E}_1 + m_2)(\mathscr{E}_2' - m_2)}{p_1p_2'}, \tag{13,6}$$

dove θ_2 è l'angolo formato dall'impulso di reazione $\mathbf{p}_2'$ con l'impulso $\mathbf{p}_1$ della particella incidente.

Le formule (13,5) e (13,6) legano gli angoli di diffusione di ambedue le particelle nel sistema l alle variazioni delle loro energie nell'urto. Invertendo queste formule si possono esprimere le energie $\mathscr{E}_1'$, $\mathscr{E}_2'$ mediante l'angolo θ_1 o θ_2. Per esempio, sostituendo nella (13,6) $p_1 = \sqrt{\mathscr{E}_1^2 - m_1^2}$, $p_2' = \sqrt{\mathscr{E}_2'^2 - m_2^2}$ ed elevando l'uguaglianza al quadrato, dopo un semplice calcolo si ottiene:

$$\mathscr{E}_2' = m_2 \frac{(\mathscr{E}_1 + m_2)^2 + (\mathscr{E}_1^2 - m_1^2)\cos^2\theta_2}{(\mathscr{E}_1 + m_2)^2 - (\mathscr{E}_1^2 - m_1^2)\cos^2\theta_2}. \tag{13,7}$$

L'inversione della formula (13,5) conduce generalmente ad un'espressione assai complicata di $\mathscr{E}_1'$ in funzione dell'angolo θ_1.

Notiamo che se $m_1 > m_2$, cioè se la particella incidente è piú pesante di quella in quiete, l'angolo di diffusione θ_1 non può superare un determinato valore massimo. Con un calcolo elementare è facile

stabilire che questo valore massimo è determinato dall'uguaglianza

$$\operatorname{sen}\theta_{1\,\max} = \frac{m_2}{m_1}, \tag{13,8}$$

che coincide esattamente con il noto risultato della meccanica classica.

Le formule (13,5) e (13,6) possono essere semplificate nel caso in cui la particella incidente è di massa nulla: $m_1 = 0$ e, di conseguenza, $p_1 = \mathscr{E}_1$, $p_1' = \mathscr{E}_1'$. In questo caso scriviamo la formula dell'energia della particella incidente dopo l'urto, espressa in funzione dell'angolo di diffusione:

$$\mathscr{E}_1' = \frac{m_2}{1 - \cos\theta_1 + \frac{m_2}{\mathscr{E}_1}}. \tag{13,9}$$

Torniamo ora al caso generale di urti di particelle di masse arbitrarie. L'urto si presenta in forma piú semplice nel sistema c. Indicando con l'indice 0 i valori delle grandezze in questo sistema, abbiamo qui $\mathbf{p}_{10} = -\mathbf{p}_{20} \equiv \mathbf{p}_0$. In virtú della conservazione dell'impulso, in un urto, gli impulsi di ambedue le particelle non fanno altro che cambiare direzione restando uguali in grandezza ed opposti in verso. Inoltre, i valori assoluti di ciascun impulso, per la legge di conservazione dell'energia, restano invariati.

Indichiamo con χ l'angolo di diffusione nel sistema c, cioè l'angolo di rotazione degli impulsi $\mathbf{p}_{10}$ e $\mathbf{p}_{20}$ dopo l'urto. Questa grandezza determina completamente il processo di diffusione nel sistema del centro di massa e, di conseguenza, in qualsiasi altro sistema di riferimento. Questa grandezza è comoda anche per la descrizione degli urti nel sistema l scegliendola come l'unico parametro che resterà indeterminato dopo aver tenuto conto delle leggi di conservazione dell'energia e dell'impulso.

Esprimiamo mediante questo parametro le energie finali delle due particelle nel sistema l. A questo scopo, torniamo alla relazione (13,2), sviluppando però il prodotto $p_{1i}p_1'^i$ nel sistema c:

$$p_{1i}p_1'^i = \mathscr{E}_{10}\mathscr{E}_{10}' - \mathbf{p}_{10}\mathbf{p}_{10}' = \mathscr{E}_{10}^2 - p_0^2\cos\chi = p_0^2(1 - \cos\chi) + m_1^2$$

(nel sistema c l'energia di ciascuna delle particelle non cambia nell'urto: $\mathscr{E}_{10}' = \mathscr{E}_{10}$). Sviluppando gli altri due prodotti della (13,2) nel sistema l, utilizzando cioè la (13,4), otteniamo:

$$\mathscr{E}_1' - \mathscr{E}_1 = -\frac{p_0^2}{m_2}(1 - \cos\chi).$$

Resta ancora da esprimere p_0^2 in funzione delle grandezze relative al sistema l. Per fare questo uguagliamo i valori dell'invariante $p_{1i}p^i{}_2$ nei sistemi c ed l:

$$\mathscr{E}_{10}\mathscr{E}_{20} - \mathbf{p}_{10}\mathbf{p}_{20} = \mathscr{E}_1 m_2,$$

ovvero

$$\sqrt{(p_0^2+m_1^2)(p_0^2+m_2^2)}=\mathscr{E}_1 m_2-p_0^2.$$

Risolvendo questa equazione rispetto a p_0^2, otteniamo:

$$p_0^2=\frac{m_2^2(\mathscr{E}_1^2-m_1^2)}{m_1^2+m_2^2+2m_2\mathscr{E}_1}. \tag{13,10}$$

Abbiamo quindi:

$$\mathscr{E}_1'=\mathscr{E}_1-\frac{m_2(\mathscr{E}_1^2-m_1^2)}{m_1^2+m_2^2+2m_2\mathscr{E}_1}(1-\cos\chi). \tag{13,11}$$

L'energia della seconda particella si ottiene dalla legge di conservazione: $\mathscr{E}_1+m_2=\mathscr{E}_1'+\mathscr{E}_2'$. Si ha quindi

$$\mathscr{E}_2'=m_2+\frac{m_2(\mathscr{E}_1^2-m_1^2)}{m_1^2+m_2^2+2m_2\mathscr{E}_1}(1-\cos\chi). \tag{13,12}$$

Nel secondo membro delle (13,11) e (13,12) il secondo termine rappresenta rispettivamente la variazione di energia delle particelle 1 e 2. L'energia trasferita è massima per $\chi=\pi$ ed è uguale a

$$\mathscr{E}_{2\,\max}'-m_2=\mathscr{E}_1-\mathscr{E}_{1\,\min}'=\frac{2m_2(\mathscr{E}_1^2-m_1^2)}{m_1^2+m_2^2+2m_2\mathscr{E}_1}. \tag{13,13}$$

Il rapporto fra l'energia cinetica minima della particella incidente dopo l'urto e la sua energia cinetica iniziale è:

$$\frac{\mathscr{E}_{1\,\min}'-m_1}{\mathscr{E}_1-m_1}=\frac{(m_1-m_2)^2}{m_1^2+m_2^2+2m_2\mathscr{E}_1}. \tag{13,14}$$

Nel caso limite di velocità piccole (quando $\mathscr{E}\approx m+mv^2/2$) questo rapporto tende ad un limite costante che è uguale a

$$\left(\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\right)^2.$$

Nel limite opposto di grandi energie $\mathscr{E}_1$ il rapporto (13,14) tende a zero, mentre la stessa grandezza $\mathscr{E}_{1\min}'$ tende ad un limite costante dato dall'uguaglianza:

$$\mathscr{E}_{1\,\min}'=\frac{m_1^2+m_2^2}{2m_2}.$$

Supponiamo che $m_2\gg m_1$, cioè che la massa della particella incidente sia piccola rispetto alla massa della particella in quiete. Secondo la meccanica classica, la particella leggera potrebbe comunicare a quella pesante soltanto una minima parte della sua energia (vedi vol. I, *Meccanica*, § 17). Ciò non si verifica nella teoria relativistica. Dalla formula (13,14) si vede che per energie $\mathscr{E}_1$ sufficientemente grandi la parte di energia ceduta può diventare prossima a 1. Tuttavia, non è sufficiente che la velocità della particella m_1 sia vicina a 1, ma, come è facile vedere, occorrono energie

$$\mathscr{E}_1\sim m_2,$$

cioè la particella leggera deve avere un'energia dell'ordine di grandezza dell'energia a riposo della particella pesante.

Una situazione analoga ha luogo per $m_2 \ll m_1$, cioè quando la particella pesante va ad urtare contro quella leggera. Anche in questo caso, però, secondo la meccanica classica, l'energia ceduta dovrebbe essere minima. La parte di energia ceduta comincia ad essere notevole soltanto a partire da energie

$$\mathscr{E}_1 \sim \frac{m_1^2}{m_2}.$$

Notiamo che qui non si tratta semplicemente di velocità dell'ordine di quella della luce, bensí di energie grandi rispetto a m_1, cioè si tratta di un caso ultrarelativistico.

PROBLEMI

1. Nella fig. 4, il triangolo ABC è formato dal vettore impulso $\mathbf{p}_1$ della particella incidente e dagli impulsi $\mathbf{p}_1'$, $\mathbf{p}_2'$ di ambedue le particelle dopo l'urto. Trovare il luogo geometrico dei punti C corrispondenti a tutti i valori possibili di $\mathbf{p}_1'$, $\mathbf{p}_2'$.

Soluzione. La curva cercata rappresenta un'ellisse i cui semiassi si possono calcolare direttamente con le formule dedotte nel problema 1 del § 11. Infatti,

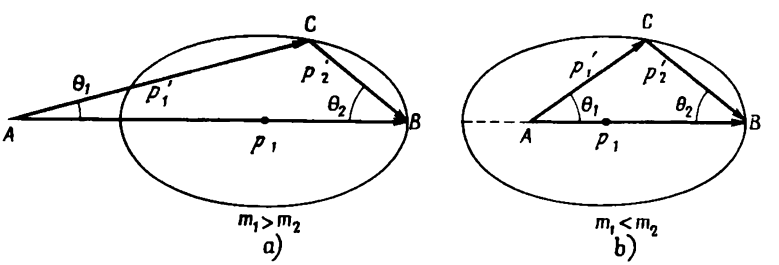

Fig. 4

la costruzione fatta per quel problema consiste nella determinazione del luogo geometrico delle estremità dei vettori $\mathbf{p}$ nel sistema l ottenuti da vettori $\mathbf{p}_0$ arbitrariamente orientati, di lunghezza data p_0 nel sistema c.

Tenendo presente che i valori assoluti degli impulsi delle particelle in collisione nel sistema c sono identici e restano invariati dopo l'urto, abbiamo a che fare nel nostro caso con una costruzione analoga a quella del vettore $\mathbf{p}_1'$ per il quale nel sistema c si ha

$$p_0 \equiv p_{10} = p_{20} = \frac{m_2 V}{\sqrt{1-V^2}},$$

dove V è la velocità della particella m_2 nel sistema l che coincide in grandezza con la velocità del centro di massa uguale a $V = p_1/(\mathscr{E}_1 + m_2)$ [vedi la (11,4)].

Troviamo in definitiva che i semiassi minore e maggiore sono, rispettivamente,

$$p_0 = \frac{m_2 p_1}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_2\mathscr{E}_1}},$$

$$\frac{p_0}{\sqrt{1-V^2}} = \frac{m_2 p_1 (\mathscr{E}_1 + m_2)}{m_1^2 + m_2^2 + 2m_2\mathscr{E}_1}$$

(la prima di queste espressioni coincide naturalmente con la (13,10)).

Per $\theta_1 = 0$, il vettore $\mathbf{p}_1'$ coincide con $\mathbf{p}_1$, per cui la distanza AB è uguale a $\mathbf{p}_1$. Confrontando p_1 con l'asse maggiore dell'ellisse,

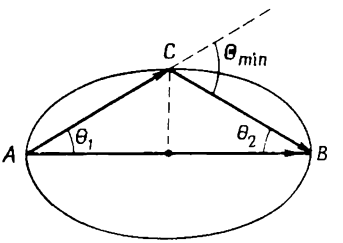

Fig. 5

è facile vedere che il punto A si trova all'esterno dell'ellisse se $m_1 > m_2$ (fig. 4,*a*), e all'interno se $m_1 < m_2$ (fig. 4, *b*).

2. Determinare l'angolo minimo Θ_{min} sotto il quale due particelle di massa uguale ($m_1 = m_2 \equiv m$) si allontanano dopo l'urto.

Soluzione. Per $m_1 = m_2$, il punto A del diagramma si trova sull'ellisse, e l'angolo minimo cercato corrisponde alla posizione in cui il punto C si trova all'estremità del semiasse minore (fig. 5). Dalla costruzione risulta evidente che tg $(\Theta_{min}/2)$ è data dal rapporto dei semiassi:

$$\operatorname{tg}\frac{\Theta_{min}}{2} = \sqrt{\frac{2m}{\mathscr{E}_1 + m}},$$

ossia

$$\cos\Theta_{min} = \frac{\mathscr{E}_1 - m}{\mathscr{E}_1 + 3m}.$$

3. Per l'urto di due particelle di massa uguale m esprimere $\mathscr{E}_1'$, $\mathscr{E}_2'$, χ in funzione dell'angolo di diffusione θ_1 nel sistema *l*.

Soluzione. L'inversione della formula (13,5) ci dà in questo caso:

$$\mathscr{E}_1' = \frac{(\mathscr{E}_1 + m) + (\mathscr{E}_1 - m)\cos^2\theta_1}{(\mathscr{E}_1 + m) - (\mathscr{E}_1 - m)\cos^2\theta_1} m,$$

$$\mathscr{E}_2' = m + \frac{(\mathscr{E}_1^2 - m^2)\operatorname{sen}^2\theta_1}{2m + (\mathscr{E}_1 - m)\operatorname{sen}^2\theta_1}.$$

Confrontando con l'espressione di $\mathscr{E}_1'$ in funzione di χ

$$\mathscr{E}_1' = \mathscr{E}_1 - \frac{\mathscr{E}_1 - m}{2}(1 - \cos\chi),$$

troviamo l'angolo di diffusione nel sistema *c*:

$$\cos\chi = \frac{2m - (\mathscr{E}_1 + 3m)\operatorname{sen}^2\theta_1}{2m + (\mathscr{E}_1 + m)\operatorname{sen}^2\theta_1}.$$

§ 14. *Momento angolare*

Si sa dalla meccanica classica che per un sistema isolato, oltre all'energia e l'impulso, si conserva anche il momento angolare, cioè il vettore

$$\mathbf{M} = \sum [\mathbf{rp}]$$

(**r** e **p** sono il raggio vettore e l'impulso della particella; la sommatoria è estesa a tutte le particelle facenti parte del sistema). La conservazione del momento angolare è dovuta al fatto che, in virtú dell'isotropia dello spazio, la funzione di Lagrange di un sistema isolato non varia per rotazioni del sistema in blocco.

Con un ragionamento analogo applicato allo spazio quadridimensionale si può determinare l'espressione relativistica del momento angolare. Siano x^i le coordinate di una delle particelle del sistema. Facciamo una rotazione infinitesima nello spazio quadridimensionale. In questa trasformazione le coordinate x^i assumono valori nuovi x'^i, e le differenze $x'^i - x^i$ sono funzioni lineari:

$$x'^i - x^i = x_k \delta\Omega^{ik}, \tag{14,1}$$

dove $\delta\Omega_{ik}$ sono coefficienti infinitesimi. Le componenti del 4-tensore $\delta\Omega_{ik}$ sono legate dalle relazioni che assicurano l'invarianza della lunghezza del raggio 4-vettore nella rotazione, cioè $x'_i x'^i = x_i x^i$. Sostituendovi x'^i con la (14,1) e trascurando i quadrati di $\delta\Omega_{ik}$ come infinitesimi d'ordine superiore, troviamo:

$$x^i x^k \delta\Omega_{ik} = 0.$$

Questa uguaglianza deve sussistere per ogni x^i. Essendo $x^i x^k$ un tensore simmetrico, le $\delta\Omega_{ik}$ debbono formare un tensore antisimmetrico (il prodotto di un tensore simmetrico per un tensore antisimmetrico è identicamente nullo):

$$\delta\Omega_{ki} = -\delta\Omega_{ik}. \tag{14,2}$$

La variazione dell'azione, allorché le coordinate variano di un infinitesimo, assume la forma [vedi la (9,11)]:

$$\delta S = -\sum p^i \delta x_i$$

(la sommatoria è estesa a tutte le particelle del sistema). Nel caso della rotazione considerata, abbiamo $\delta x_i = \delta\Omega_{ik} x^k$. Quindi

$$\delta S = -\delta\Omega_{ik} \sum p^i x^k.$$

Se scomponiamo il tensore $\sum p^i x^k$ in due parti: simmetrica ed antisimmetrica, la prima di esse essendo moltiplicata per un tensore antisimmetrico annulla identicamente il prodotto. Estraendo da $\sum p^i x^k$ la parte antisimmetrica, possiamo scrivere la precedente

uguaglianza nella forma

$$\delta S = -\delta\Omega_{ik}\frac{1}{2}\sum(p^i x^k - p^k x^i). \tag{14,3}$$

Per un sistema isolato, in virtú dell'isotropia dello spazio e del tempo, la lagrangiana è invariante per rotazione nello spazio quadridimensionale, cioè i parametri $\delta\Omega_{ik}$ di questa rotazione sono coordinate cicliche. Di conseguenza, gli impulsi generalizzati si conservano. Questi impulsi sono rappresentati da $\partial S/\partial\Omega_{ik}$. Dalla (14,3) otteniamo:

$$\frac{\partial S}{\partial\Omega_{ik}} = -\frac{1}{2}\sum(p^i x^k - p^k x^i).$$

Vediamo perciò che per un sistema isolato si conserva il tensore

$$M^{ik} = \sum(x^i p^k - x^k p^i). \tag{14,4}$$

Questo tensore antisimmetrico è detto 4-tensore *momento angolare*.

Le componenti spaziali di questo tensore momento coincidono con le componenti del vettore momento angolare tridimensionale $\mathbf{M} = \sum[\mathbf{rp}]$:

$$M^{23} = M_x, \quad -M^{13} = M_y, \quad M^{12} = M_z.$$

Le componenti M^{01}, M^{02}, M^{03} formano invece il vettore $\sum(t\mathbf{p} - \mathscr{E}\mathbf{r}/c^2)$. Quindi, le componenti del tensore M^{ik} si possono scrivere nella forma

$$M^{ik} = \left(\sum c\left(t\mathbf{p} - \frac{\mathscr{E}\mathbf{r}}{c^2}\right), \ -\mathbf{M}\right) \tag{14,5}$$

[cfr. la (6,10)].

In virtú della conservazione del tensore M^{ik} per un sistema isolato, in particolare si ha:

$$\sum\left(t\mathbf{p} - \frac{\mathscr{E}\mathbf{r}}{c^2}\right) = \text{costante}.$$

Poichè, d'altra parte, anche l'energia totale $\sum\mathscr{E}$ si conserva, la precedente uguaglianza si può scrivere nella forma

$$\frac{\sum\mathscr{E}\mathbf{r}}{\sum\mathscr{E}} - t\frac{c^2\sum\mathbf{p}}{\sum\mathscr{E}} = \text{costante}.$$

Di qui si vede che il punto di raggio vettore

$$\mathbf{R} = \frac{\sum\mathscr{E}\mathbf{r}}{\sum\mathscr{E}}, \tag{14,6}$$

si muove uniformemente con velocità

$$\mathbf{V} = \frac{c^2\sum\mathbf{p}}{\sum\mathscr{E}}, \tag{14,7}$$

che rappresenta la velocità del sistema considerato come un insieme unico (corrispondente, secondo la formula (9,8), alla sua energia e al suo impulso totali). La formula (14,6) dà la definizione relativistica delle coordinate del centro di massa del sistema. Se le velocità di tutte le particelle sono piccole rispetto a c, si può porre approssimativamente $\mathscr{E} \approx mc^2$, e la (14,6) assume allora la forma dell'espressione classica[1])

$$\mathbf{R} = \frac{\sum m\mathbf{r}}{\sum m}.$$

Osserviamo che le componenti del vettore (14,6) non formano componenti spaziali di un 4-vettore e, di conseguenza, per una trasformazione del sistema di riferimento, non si trasformano in coordinate di un punto. Quindi il centro di massa di uno stesso sistema di particelle ha una posizione diversa nei diversi sistemi di riferimento.

PROBLEMA

Trovare la relazione tra il momento angolare $\mathbf{M}$ di un corpo (di un sistema di particelle) nel sistema di riferimento K, dove questo corpo si muove con velocità $\mathbf{V}$, e il suo momento $\mathbf{M}^{(0)}$ nel sistema di riferimento K_0, dove il corpo è in quiete; in ambedue i casi il momento va determinato rispetto allo stesso punto, ossia rispetto al centro di massa nel sistema K_0[2]).

Soluzione. Il sistema K_0 si muove relativamente a K con velocità $\mathbf{V}$; facciamo coincidere la sua direzione con l'asse delle x. Le componenti del tensore M^{ik} si trasformano secondo le seguenti formule (vedi problema 2 del § 6):

$$M^{12} = \frac{M^{(0)12} + \frac{V}{c} M^{(0)02}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad M^{13} = \frac{M^{(0)13} + \frac{V}{c} M^{(0)03}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad M^{23} = M^{(0)23}.$$

Siccome per origine delle coordinate è stato scelto il centro di massa del corpo (nel sistema K_0), si ha allora in questo sistema $\sum \mathscr{E}\mathbf{r} = 0$; essendo in questo stesso sistema anche $\sum \mathbf{p} = 0$, si ha $M^{(0)02} = M^{(0)03} = 0$. Tenendo conto della relazione tra le componenti di M^{ik} e il vettore $\mathbf{M}$, troviamo per quest'ultimo:

$$M_x = M_x^{(0)}, \quad M_y = \frac{M_y^{(0)}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad M_z = \frac{M_z^{(0)}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

---

[1]) Mentre la formula classica per il centro di massa si riferisce ai sistemi di particelle sia non interagenti che interagenti, la formula (14,6) è valida soltanto se l'interazione è trascurata. In meccanica relativistica, la determinazione del centro di massa di un sistema di particelle interagenti richiede che siano presi esplicitamente in considerazione anche l'impulso e l'energia del campo creato dalle particelle.

[2]) Notiamo che sebbene nel sistema K_0 (dove $\sum \mathbf{p} = 0$) il momento angolare non dipenda dalla scelta del punto rispetto al quale esso è determinato, nel sistema K (dove $\sum \mathbf{p} \neq 0$) il momento dipende da questa scelta (vedi vol. I *Meccanica*, § 9).

Capitolo III

CARICA IN UN CAMPO ELETTROMAGNETICO

§ 15. *Particelle elementari nella teoria della relatività*

L'interazione tra particelle si può descrivere mediante il concetto di *campo* di forza. Invece di dire che una particella agisce su un'altra, si può dire che essa crea attorno a sé un campo; ogni altra particella che si trova in questo campo sarà soggetta all'azione di una forza. In meccanica classica, il campo non è che un mezzo per descrivere il fenomeno fisico dell'interazione tra particelle. Nella teoria della relatività, invece, in conseguenza del fatto che la velocità di propagazione delle interazioni è finita, la situazione cambia sostanzialmente. Le forze agenti nell'istante dato su una particella non sono determinate dalla posizione delle particelle in questo istante. Il cambiamento di posizione di una delle particelle produce un effetto sulle altre soltanto dopo un certo intervallo di tempo. Ciò significa che il campo diventa una realtà fisica intrinseca. Non possiamo parlare di un'interazione diretta tra particelle separate da una certa distanza. Un'interazione può aver luogo ad ogni istante soltanto tra due punti vicini dello spazio (azione di contatto diretto). Dobbiamo parlare quindi dell'interazione di una particella con il campo e dell'interazione successiva del campo con un'altra particella.

Considereremo due tipi di campi: campi gravitazionali e campi elettromagnetici. Ai campi gravitazionali sono dedicati i capitoli X-XIV. Negli altri capitoli saranno considerati esclusivamente i campi elettromagnetici.

Prima di passare allo studio delle interazioni tra particelle e campo elettromagnetico, facciamo qualche considerazione generale sul concetto di « particella » in meccanica relativistica.

In meccanica classica, si può introdurre il concetto di corpo assolutamente rigido, cioè corpo indeformabile a nessuna condizione. Nella teoria della relatività, con corpo assolutamente rigido si dovrebbe intendere quindi un corpo, le cui dimensioni restano invariate nel sistema di riferimento dove esso è in quiete. È facile tuttavia vedere che la teoria della relatività rende in generale impossibile l'esistenza di corpi assolutamente rigidi.

Consideriamo, per esempio, un disco che ruota intorno al suo asse e supponiamolo assolutamente rigido. È chiaro che il sistema di riferimento solidale a questo disco non è inerziale. Tuttavia, è possi-

bile fissare a ciascun piccolo elemento del disco un sistema di riferimento rispetto al quale questo elemento sarà nell'istante dato in quiete; per diversi elementi del disco, aventi differenti velocità, questi sistemi di riferimento saranno naturalmente diversi. Consideriamo un raggio del disco come costituito di piccoli segmenti. Essendo il disco assolutamente rigido, le lunghezze di questi segmenti nei rispettivi sistemi di riferimento inerziali sono le stesse che per il disco immobile. Le stesse lunghezze saranno misurate anche da un'osservatore fisso davanti al quale all'istante dato passa il raggio considerato del disco, poiché essendo ciascun segmento perpendicolare alla propria velocità, non avviene la contrazione di Lorentz. L'intero raggio quindi, misurato dall'osservatore fisso come la somma dei segmenti che lo costituiscono, sarà della stessa lunghezza del raggio del disco immobile. D'altra parte, gli elementi d'arco della circonferenza passanti all'istante dato davanti all'osservatore fisso sono alterati dalla contrazione di Lorentz, cosicché la lunghezza dell'intera circonferenza (misurata dall'osservatore fisso come la somma dei suoi elementi d'arco) sarà inferiore alla lunghezza della circonferenza del disco immobile. Siamo giunti dunque al risultato che per un disco che ruota il rapporto (misurato dall'osservatore fisso) fra la lunghezza della circonferenza e il raggio, invece di restare uguale a 2π, dovrebbe cambiare. L'assurdità di questo risultato prova che in realtà il disco non può essere assolutamente rigido e che nella rotazione è inevitabilmente soggetto ad una deformazione complessa, dipendente dalle proprietà elastiche del materiale di cui il disco è fabbricato.

Ci sono altri modi per convincersi dell'impossibilità dell'esistenza di corpi assolutamente rigidi. Ammettiamo che un corpo rigido qualunque venga messo in moto da una causa esterna agente su uno dei suoi punti. Se il corpo fosse assolutamente rigido, tutti i suoi punti dovrebbero mettersi in moto contemporaneamente al punto sottoposto all'azione; contrariamente, il corpo si deformerebbe. Tuttavia, la teoria della relatività rende impossibile la prima ipotesi perché l'azione alla quale è sottoposto un punto si propaga verso gli altri punti con velocità finita, e perciò i punti non possono muoversi tutti contemporaneamente.

Quello che è stato detto permette di trarre alcune conclusioni relative alle particelle *elementari*, cioè particelle il cui stato meccanico può essere completamente descritto da tre coordinate date e dalle tre componenti della velocità del moto.

È evidente che se una particella elementare avesse dimensioni finite, cioè avesse un'estensione, essa non potrebbe deformarsi, perché il concetto di deformazione è legato alla possibilità di movimenti indipendenti delle diverse parti di un corpo. Come abbiamo visto prima, però, la teoria della relatività non ammette l'esistenza di corpi assolutamente rigidi.

Nella meccanica relativistica classica (non quantistica) non si possono attribuire dimensioni finite alle particelle elementari. In altri termini, nel quadro della teoria classica, le particelle elementari vanno considerate puntiformi[1]).

16. Quadripotenziale del campo

L'azione di una particella in moto in un campo elettromagnetico è composta di due termini: dell'azione (8,1) della particella libera e di un termine descrivente l'interazione della particella con il campo. Quest'ultimo deve contenere sia le grandezze che caratterizzano la particella, sia quelle che caratterizzano il campo.

Risulta che[2]) le proprietà della particella sono definite, per quanto concerne la sua interazione con il campo ellettromagnetico, da un solo parameto, detto *carica* della particella e, che può essere sia positiva che negativa (o nulla). Le proprietà del campo sono invece caratterizzate da un quadrivettore A_i, detto *4-potenziale* le cui componenti sono funzioni delle coordinate e del tempo. Queste grandezze entrano nell'azione tramite il termine

$$-\frac{e}{c}\int_a^b A_i\,dx^i,$$

dove le funzioni A^i sono prese in punti della linea d'universo della particella. Il fattore $1/c$ è stato introdotto qui per ragioni di comodità. Notiamo che fino a quando non abbiamo formule che permettano di collegare la carica o i potenziali a grandezze già note, le unità di misura possono essere scelte arbitrariamente[3]).

L'azione, per una carica in un campo elettromagnetico, assume quindi la forma

$$S=\int_a^b\left(-mc\,ds-\frac{e}{c}A_i\,dx^i\right). \tag{16,1}$$

---

[1]) Benché nella meccanica quantistica la situazione cambi sostanzialmente, la teoria della relatività rende molto difficile l'introduzione del concetto di interazione non puntiforme.

[2]) Le affermazioni fatte qui sono da considerarsi, in misura notevole, come il risultato di dati sperimentali. La forma dell'azione per una particella in un campo elettromagnetico non può essere stabilita solamente sulla base di considerazioni generali, come la condizione d'invarianza relativistica (quest'ultima ammetterebbe, per esempio, la presenza nell'azione anche di un termine tipo $\int A\,ds$, dove A è una funzione scalare).

Ricordiamo, a scanso di equivoci, che si tratta ovunque della teoria classica (non quantistica) e, di conseguenza, sono ovunque trascurati gli effetti legati allo spin delle particelle.

[3]) Per la scelta di queste unità vedi § 27.

Le tre componenti spaziali del quadrivettore A^i costituiscono un vettore tridimensionale **A**, detto *potenziale vettore* del campo. La componente temporale, che indicheremo con $A^0 = \varphi$, è detta *potenziale scalare*. In tal modo,

$$A^i = (\varphi, \mathbf{A}). \tag{16,2}$$

L'integrale dell'azione può quindi essere scritto nella forma:

$$S = \int_a^b \left(-mc\,ds + \frac{e}{c}\mathbf{A}\,d\mathbf{r} - e\varphi\,dt \right),$$

oppure, introducendo la velocità $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ della particella ed integrando rispetto al tempo,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left(-mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c}\mathbf{A}\mathbf{v} - e\varphi \right) dt. \tag{16,3}$$

L'espressione integranda è la lagrangiana per una carica in un campo elettromagnetico:

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c}\mathbf{A}\mathbf{v} - e\varphi. \tag{16,4}$$

Questa espressione differisce dalla lagrangiana (8,2) per una particella libera per i termini $\frac{e}{c}\mathbf{A}\mathbf{v} - e\varphi$ che descrivono l'interazione della carica con il campo.

La derivata $\partial L/\partial \mathbf{v}$ è l'impulso generalizzato della particella, che indicheremo con **P**. Derivando troviamo:

$$\mathbf{P} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{e}{c}\mathbf{A} = \mathbf{p} + \frac{e}{c}\mathbf{A}. \tag{16,5}$$

Qui abbiamo indicato con **p** l'impulso ordinario della particella, che in seguito chiameremo semplicemente impulso.

A partire dalla lagrangiana, si può trovare l'hamiltoniana di una particella in un campo secondo la nota formula generale

$$\mathscr{H} = \mathbf{v}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} - L.$$

Sostituendo la (16,4) in quest'ultima, troviamo:

$$\mathscr{H} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + e\varphi. \tag{16,6}$$

Tuttavia, l'hamiltoniana deve essere espressa non mediante la velocità, bensí mediante l'impulso generalizzato della particella.

Dalle formule (16,5) e (16,6) si vede che la relazione tra $\mathscr{H} - e\varphi$ e $\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A}$ è la stessa che tra $\mathscr{H}$ e $\mathbf{p}$ in assenza del campo, cioè

$$\left(\frac{\mathscr{H}-e\varphi}{c}\right)^2 = m^2c^2 + \left(\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2, \tag{16,7}$$

o altrimenti:

$$\mathscr{H} = \sqrt{m^2c^4 + c^2(\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A})^2} + e\varphi. \tag{16,8}$$

Per velocità piccole, cioè nel caso della meccanica classica, la lagrangiana (16,4) si trasforma in

$$L = \frac{mv^2}{2} + \frac{e}{c}\mathbf{A}\mathbf{v} - e\varphi. \tag{16,9}$$

In questa approssimazione,

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A},$$

e per l'hamiltoniana troviamo la seguente espressione:

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2m}\left(\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 + e\varphi. \tag{16,10}$$

Scriviamo infine l'equazione di Hamilton-Jacobi per una particella in un campo elettromagnetico, che può essere ottenuta sostituendo nell'hamiltoniana l'impulso generalizzato $\mathbf{P}$ con $\partial S/\partial \mathbf{r}$ e la stessa funzione $\mathscr{H}$ con $-\partial S/\partial t$. In tal modo dalla (16,7) deduciamo

$$\left(\operatorname{grad} S - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t} + e\varphi\right)^2 + m^2c^2 = 0. \tag{16,11}$$

§ 17. Equazioni del moto di una carica in un campo

Una carica che si trova in un campo non soltanto è influenzata da questo, ma agisce a sua volta sul campo, trasformandolo. Tuttavia, se la carica e non è grande, la sua influenza sul campo può essere trascurata. In questo caso, studiando il moto di una particella in un campo, si può supporre che il campo non dipenda né dalle coordinate, né dalla velocità della carica. Le condizioni esatte alle quali deve soddisfare una carica perché la si possa considerare piccola nel senso suindicato verranno precisate in seguito (vedi § 75). Per ora supporremo soddisfatte queste condizioni.

Dunque, dobbiamo trovare le equzioni del moto di una carica in un campo elettromagnetico. Queste equazioni si ottengono facendo variare l'azione, cioè tramite le equazioni di Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}, \tag{17,1}$$

dove L è determinata dalla formula (16,4).

La derivata $\partial L/\partial \mathbf{v}$ è l'impulso generalizzato della particella secondo la (16,5). Scriviamo poi:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} \equiv \nabla L = \frac{e}{c}\,\mathrm{grad}\,\mathbf{A}\mathbf{v} - e\,\mathrm{grad}\,\varphi.$$

Secondo una formula ben nota dell'analisi vettoriale si ha l'identità:

$$\mathrm{grad}\,\mathbf{ab} = (\mathbf{a}\nabla)\mathbf{b} + (\mathbf{b}\,\nabla)\,\mathbf{a} + [\mathbf{b}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{a}] + [\mathbf{a}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{b}],$$

dove **a** e **b** sone due vettori arbitrari. Applicando questa formula ad **Av** e tenendo presente che la derivazione rispetto ad **r** è fatta per **v** costante, troviamo:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = \frac{e}{c}(\mathbf{v}\nabla)\,\mathbf{A} + \frac{e}{c}\,[\mathbf{v}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A}] - e\,\mathrm{grad}\,\varphi.$$

Di conseguenza, le equazioni di Lagrange assumono la forma:

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{p} + \frac{e}{c}\,\mathbf{A}\right) = \frac{e}{c}(\mathbf{v}\nabla)\,\mathbf{A} + \frac{e}{c}\,[\mathbf{v}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A}] - e\,\mathrm{grad}\,\varphi.$$

Il differenziale totale $\frac{d\mathbf{A}}{dt}\,dt$ è però composto di due parti: la variazione $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\,dt$ del potenziale vettore in funzione del tempo nel punto dato e la variazione che si ha nel passaggio da un punto dello spazio a un altro distante di $d\mathbf{r}$. Questa seconda variazione è uguale a $(d\mathbf{r}\nabla)\,\mathbf{A}$. Abbiamo quindi:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\,\mathbf{A}.$$

Sostituendo questa espressione nell'equazione precedente, otteniamo:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{e}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - e\,\mathrm{grad}\,\varphi + \frac{e}{c}\,[\mathbf{v}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A}]. \tag{17,2}$$

Questa è l'equazione del moto di una particella in un campo elettromagnetico. A primo membro si ha la derivata dell'impulso rispetto al tempo. Di conseguenza, l'espressione del secondo membro nell'equazione (17,2) rappresenta la forza agente su una particella in un campo elettromagnetico. Si vede che questa forza è composta di due parti. La prima (i due primi termini del secondo membro della (17,2)) non dipende dalla velocità della particella. La seconda parte (il terzo termine) dipende da questa velocità, cioè è proporzionale al suo modulo ed è ad esso perpendicolare.

La forza del primo tipo, riferita a una carica unitaria, è detta *vettore campo elettrico*; indicando questa forza con **E**, per definizione abbiamo:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi. \tag{17,3}$$

Il fattore che moltiplica la velocità, o meglio $\mathbf{v}/c$ nella forza del secondo tipo agente su una carica unitaria, è detto *vettore campo magnetico*; indicandolo con **H**, per definizione abbiamo:

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \tag{17,4}$$

Quando in un campo elettromagnetico $\mathbf{E} \neq 0$ e $\mathbf{H} = 0$, si dice che si ha un *campo elettrico*; quando invece $\mathbf{E} = 0$ e $\mathbf{H} \neq 0$, il campo è detto *magnetico*. Nel caso generale, un campo elettromagnetico è la sovrapposizione di un campo elettrico e di un campo magnetico.

Notiamo che **E** rappresenta un vettore polare ed **H** un vettore assiale.

Possiamo ora scrivere le equazioni del moto di una carica in un campo elettromagnetico nella forma

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{vH}]. \tag{17,5}$$

L'espressione al secondo membro è detta *forza di Lorentz*. Il suo primo termine è la forza con la quale il campo elettrico agisce sulla carica; questa forza non dipende dalla velocità della carica ed è orientata lungo il campo **E**. Il secondo termine è la forza esercitata sulla carica dal campo magnetico; essa è proporzionale alla velocità della carica e perpendicolare a questa velocità e alla direzione del campo magnetico **H**.

Per velocità piccole rispetto alla velocità della luce, l'impulso **p** è approssimativamente uguale alla sua espressione classica $m\mathbf{v}$, e l'equazione del moto (17,5) diventa

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{vH}]. \tag{17,6}$$

Deduciamo ora una equazione che determina la variazione dell'energia cinetica di una particella[1]) con il tempo, cioè la derivata

$$\frac{d\mathscr{E}_{\text{cin}}}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

È facile vedere che

$$\frac{d\mathscr{E}_{\text{cin}}}{dt} = \mathbf{v}\frac{d\mathbf{p}}{dt}.$$

[1]) Qui e piú avanti con « cinetica » intendiamo l'energia (9,4) che include l'energia di quiete.

Sostituendovi $d\mathbf{p}/dt$ ricavata dalla (17,5) e notando che $[\mathbf{vH}]\mathbf{v} = 0$, si ha

$$\frac{d\mathscr{E}_{\text{cin}}}{dt} = e\mathbf{Ev}. \tag{17,7}$$

La variazione dell'energia cinetica con il tempo è il lavoro effettuato dal campo sulla particella (nell'unità di tempo). Dalla formula (17,7) risulta che questo lavoro è uguale al prodotto della velocità della carica per la forza con la quale il campo elettrico agisce sulla carica. Il lavoro compiuto dal campo nell'intervallo di tempo dt, quando la carica si sposta di $d\mathbf{r}$, è uguale ad $e\mathbf{E}d\mathbf{r}$.

Sottolineiamo che solo il campo elettrico compie un lavoro sulla carica, il campo magnetico non compie nessun lavoro sulla carica in moto. Quest'ultima circostanza è dovuta al fatto che la forza con la quale il campo magnetico agisce sulla particella è sempre perpendicolare alla sua velocità.

Le equazioni della meccanica sono invarianti rispetto all'inversione del tempo, cioè rispetto alla sostituzione del futuro con il passato. In altri termini, ambedue i sensi del tempo sono equivalenti in meccanica. Ciò significa che se secondo le equazioni della meccanica qualche moto è possibile, lo è anche il moto inverso, nel quale il sistema passa per gli stessi stati a ritroso.

È facile vedere che lo stesso si verifica per il campo elettromagnetico nella teoria della relatività. Bisogna, tuttavia, cambiare il segno del campo magnetico contemporaneamente alla sostituzione di t con $-t$. Infatti, è facile vedere che le equazioni del moto (17,5) restano invariate nella sostituzione

$$t \to -t, \quad \mathbf{E} \to \mathbf{E}, \quad \mathbf{H} \to -\mathbf{H}. \tag{17,8}$$

Inoltre, secondo le formule (17,3) e (17,4) il potenziale scalare non cambia, mentre il potenziale vettore cambia di segno:

$$\varphi \to \varphi, \quad \mathbf{A} \to -\mathbf{A}. \tag{17,9}$$

Dunque, se in un campo elettromagnetico un moto è possibile, è possibile anche il moto inverso in questo stesso campo che si ottiene invertendo il verso di $\mathbf{H}$.

PROBLEMA

Esprimere l'accelerazione di una particella in funzione della sua velocità e dei vettori dei campi $\mathbf{E}$ ed $\mathbf{H}$.

Soluzione. Sostituiamo $\mathbf{p} = \mathbf{v}\mathscr{E}_{\text{cin}}/c^2$ nell'equazione del moto (17,5) ed esprimiamo $d\mathscr{E}_{\text{cin}}/dt$ secondo la formula (17,7). Troviamo in definitiva:

$$\mathbf{v} = \frac{e}{m}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\left\{\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{vH}] - \frac{1}{c^2}\mathbf{v}(\mathbf{vE})\right\}.$$

§ 18. *Invarianza di gauge*

Consideriamo ora il problema di quanto sia univoca la definizione dei potenziali del campo. A tale scopo si deve tener presente che il campo è caratterizzato dall'azione da esso esercitata sul moto delle cariche che in esso si trovano. Le equazioni del moto (17,5) però contengono non i potenziali, bensì i vettori dei campi **E** ed **H**. Di conseguenza, i due campi sono fisicamente identici se sono caratterizzati dagli stessi vettori **E** ed **H**.

Se sono dati i potenziali **A** e φ, allora **E** ed **H** sono determinati univocamente secondo le formule (17,3) e (17,4), di conseguenza, anche il campo è determinato univocamente. Differenti potenziali tuttavia possono corrispondere ad uno stesso campo. Per convincerci di questo, aggiungiamo a ciascuna componente del potenziale A_k la grandezza $-\partial f/\partial x^k$, dove f è una funzione arbitraria delle coordinate e del tempo. Il potenziale A_k diventa allora

$$A'_k = A_k - \frac{\partial f}{\partial x^k}. \tag{18,1}$$

Questa sostituzione fa comparire nell'integrale dell'azione (16,1) un nuovo termine che rappresenta il differenziale totale:

$$\frac{e}{c}\frac{\partial f}{\partial x^k}\,dx^k = d\left(\frac{e}{c}f\right), \tag{18,2}$$

il quale non influisce sulle equazioni del moto (vedi vol. I, *Meccanica*, § 2).

Se in luogo del quadripotenziale si introducono i potenziali vettore e scalare, e in luogo delle coordinate x^i le coordinate ct, x, y, z, le quattro uguaglianze (18,1) si scriveranno allora nella forma

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' &= \mathbf{A} + \operatorname{grad} f, \\ \varphi' &= \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}. \end{aligned} \tag{18,3}$$

È facile provare che i campi elettrico e magnetico determinati dalle uguaglianze (17,3) e (17,4) non cambiano di fatto se **A** e φ vengono sostituiti con i potenzili $\mathbf{A}'$ e φ' definiti dalla (18,3). La trasformazine dei potenziali (18,1) non cambia quindi il campo. Ne segue che i potenziali non sono definiti univocamente: il potenziale vettore è determinato a meno del gradiente di una funzione arbitraria, e il potenziale scalare a meno della derivata rispetto al tempo della stessa funzione.

In particolare, si può aggiungere al potenziale vettore un qualsiasi vettore costante ed al potenziale scalare una costante arbitraria. Questa è una conseguenza diretta del fatto che nella defini-

zione di **E** ed **H** entrano soltanto le derivate di **A** e di φ, e quindi, **E** ed **H** non cambiano se ad **A** e φ si aggiungono delle costanti.

Poiché solo le grandezze invarianti nella trasformazione dei potenziali (18,3) hanno un significato fisico, tutte le equazioni debbono essere invarianti in questa trasformazione. Questa invarianza è detta *invarianza di gauge*[1]).

La citata non unicità dei potenziali permette sempre di sceglierli in maniera tale da soddisfare una condizione arbitraria supplementare [una sola, perché possiamo scegliere arbitrariamente una funzioe f nella (18,3)]. In particolare, è sempre possibile scegliere i potenziali del campo in maniera tale che il potenziale scalare φ sia nullo. Ma generalmente è impossibile annullare il potenziale vettore, perché la condizione $\mathbf{A} = 0$ rappresenta tre condizioni supplementari (per le tre componenti di **A**).

§ 19. *Campo elettromagnetico costante*

Si chiama campo elettromagnetico *costante* un campo non dipendente dal tempo. È evidente che i potenziali di un campo costante si possono scegliere in modo tale che essi siano funzioni delle sole coordinate, ma non del tempo. Un campo magnetico costante si scrive, come precedentemente, $\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$. Il campo elettrico costante si scrive invece

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi. \tag{19,1}$$

In tal modo, un campo elettrico costante è definito solo da un potenziale scalare, e un campo magnetico solo da un potenziale vettore.

Nel paragrafo precedente abbiamo visto che i potenziali del campo non sono definiti univocamente. Tuttavia, è facile provare che se un campo elettromagnetico costante è descritto mediante potenziali non dipendenti dal tempo, si potrà allora aggiungere al potenziale scalare, senza cambiare il campo, soltanto una costante arbitraria (non dipendente né dalle coordinate, né dal tempo). Di solito sullo scalare φ si pone la condizione supplementare che esso prenda un valore determinato in un punto dato dello spazio; generalmente si sceglie φ in modo che esso sia nullo all'infinito. In questo caso, si può determinare la costante arbitraria suindicata e, di conseguenza, si determina univocamente anche il potenziale scalare del campo costante.

---

[1]) Sottolineiamo che questo risultato è dovuto alla supposta costanza di e nella (18,2). In tal modo, l'invarianza di gauge delle equazioni dell'elettrodimanica e la conservazione della carica sono strettamente collegate tra di loro

Al contrario, il potenziale vettore resta definito non univocamente anche per un campo elettromagnetico costante; ad esso infatti si può aggiungere il gradiente di una funzione delle coordinate arbitraria.

Calcoliamo l'energia di una carica in un campo elettromagnetico costante. Essendo il campo costante, la lagrangiana per una carica non dipende esplicitamente dal tempo. Come è noto, in questo caso l'energia si conserva e coincide con l'hamiltoniana.

Conformemente alla (16,6), si ha:

$$\mathscr{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + e\varphi. \tag{19,2}$$

Si vede che, in presenza di un campo, all'energia della particella viene aggiunto il termine $e\varphi$ che è l'energia potenziale della carica nel campo. Notiamo il fatto fondamentale che l'energia dipende solo dal potenziale scalare e non dal potenziale vettore. In altri termini, il campo magnetico non influisce sull'energia delle cariche; soltanto il campo elettrico può cambiare l'energia di una particella. Ciò è dovuto al fatto che, contrariamente al campo elettrico, il campo magnetico non compie lavoro su una carica.

Quando l'intensità del campo è la stessa in tutti i punti dello spazio, si dice che il campo è *uniforme*. Il potenziale scalare di un campo elettrico uniforme può essere espresso mediante il vettore **E** come segue:

$$\varphi = -\mathbf{Er}. \tag{19,3}$$

In effetti, per $\mathbf{E}$ = costante abbiamo $\operatorname{grad}(\mathbf{Er}) = (\mathbf{E}\nabla)\mathbf{r} = \mathbf{E}$.

Quanto al potenziale vettore di un campo magnetico uniforme, esso si esprime mediante **H** nella forma

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}[\mathbf{Hr}]. \tag{19,4}$$

In effetti, per $\mathbf{H}$ = costante le formule ben note dell'analisi vettoriale ci danno:

$$\operatorname{rot}[\mathbf{Hr}] = \mathbf{H}\operatorname{div}\mathbf{r} - (\mathbf{H}\nabla)\mathbf{r} = 2\mathbf{H}$$

(ricordiamo che $\operatorname{div}\mathbf{r} = 3$).

Il potenziale vettore di un campo magnetico uniforme si può scegliere altrimenti, per esempio nel modo seguente:

$$A_x = -Hy,\ A_y = A_z = 0 \tag{19,5}$$

(l'asse delle z è diretto lungo **H**). È facile vedere che anche per una tale scelta di **A** sussiste l'uguaglianza $\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$. In base alle formule di trasformazione (18,3), i potenziai (19,4) e (19,5) differiscono l'uno dall'altro per il gradiente di una certa funzione: la (19,5) si ottiene aggiungendo ∇f alla (19,4), dove $f = -xyH/2$.

PROBLEMA

Scrivere, in meccanica relativistica, il principio variazionale per la traiettoria di una particella (principio di Maupertuis) in un campo elettromagnetico costante.

Soluzione. Il principio di Maupertuis afferma che se l'energia totale di una particella si conserva (moto in un campo costante), la sua traiettoria può essere determinata partendo dall'equazione variazionale

$$\delta \int \mathbf{P}\, d\mathbf{r} = 0,$$

dove $\mathbf{P}$ è l'impulso generalizzato della particella espresso mediante l'energia e i differenziali delle coordinate; l'integrale è esteso alla traiettoria della particella (vedi vol. I, *Meccanica*, § 44). Sostituendo $\mathbf{P} = \mathbf{p} + \frac{e}{c}\mathbf{A}$ e tenendo presente che le direzioni $\mathbf{p}$ e $d\mathbf{r}$ coincidono, abbiamo:

$$\delta \int \left(p\, dl + \frac{e}{c}\mathbf{A}\, d\mathbf{r} \right) = 0,$$

dove $dl = \sqrt{d\mathbf{r}^2}$ è un elemento d'arco. Ricavando p da $p^2 + m^2c^2 = (\mathscr{E} - e\varphi)^2/c^2$, troviamo in definitiva:

$$\delta \int \left\{ \sqrt{\frac{1}{c^2}(\mathscr{E} - e\varphi)^2 - m^2c^2}\, dl + \frac{e}{c}\mathbf{A}\, d\mathbf{r} \right\} = 0.$$

§ 20. *Moto in un campo elettrico uniforme e costante*

Consideriamo il moto di una carica e in un campo elettrico uniforme e costante $\mathbf{E}$. Per asse delle x prendiamo la direzione del campo. Il moto avverrà, evidentemente, in un piano che noi facciamo coincidere con il piano xy. In questo caso, le equazioni del moto (17,5) assumeranno la forma

$$\dot{p}_x = eE, \quad \dot{p}_y = 0$$

(il punto su una lettera indica derivazione rispetto a t), donde

$$p_x = eEt, \; p_y = p_0. \tag{20,1}$$

Per origine dei tempi abbiamo scelto l'istante in cui $p_x = 0$; p_0 è l'impulso della particella in questo istante.

L'energia cinetica di una particella (senza l'energia potenziale nel campo) è $\mathscr{E}_{\text{cin}} = c\sqrt{m^2c^2 + p^2}$. Sostituendovi la (20,1), troviamo nel nostro caso:

$$\mathscr{E}_{\text{cin}} = \sqrt{m^2c^4 + c^2p_0^2 + (ceEt)^2} = \sqrt{\mathscr{E}_0^2 + (ceEt)^2}, \tag{20,2}$$

dove $\mathscr{E}_0$ è l'energia all'istante $t = 0$.

Secondo la formula (9,8), la velocità della particella è $\mathbf{v} = \mathbf{p}c^2/\mathscr{E}_{\text{cin}}$. Per la velocità $\mathbf{v}_x = \dot{x}$ abbiamo

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p_x c^2}{\mathscr{E}_{\text{cin}}} = \frac{c^2 eEt}{\sqrt{\mathscr{E}_0^2 + (ceEt)^2}}.$$

Integrando otteniamo:

$$x = \frac{1}{eE}\sqrt{\mathscr{E}_0^2 + (ceEt)^2} \tag{20,3}$$

(la costante d'integrazione è stata posta uguale a zero)[1]).

Per la determinazione di y abbiamo:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{p_y c^2}{\mathscr{E}_{\text{cin}}} = \frac{p_0 c^2}{\sqrt{\mathscr{E}_0^2 + (ceEt)^2}},$$

donde

$$y = \frac{p_0 c}{eE}\,\text{Arsh}\,\frac{ceEt}{\mathscr{E}_0}. \tag{20,4}$$

Esprimendo nella (20,4) t in funzione di y e sostituendo nella (20,3), troviamo l'equazione della traiettoria:

$$x = \frac{\mathscr{E}_0}{eE}\,\text{ch}\,\frac{eEy}{p_0 c}. \tag{20,5}$$

La carica in moto descrive dunque una catenaria in un campo elettrico uniforme.

Se la velocità di una particella è $v \ll c$, si può porre $p_0 = mv_0$, $\mathscr{E}_0 = mc^2$; sviluppando la (20,5) secondo le potenze di $1/c$, otteniamo a meno di termini d'ordine superiore:

$$x = \frac{eE}{2mv_0^2}\,y^2 + \text{costante},$$

cioè la carica in moto descrive una parabola, risultato già noto dalla meccanica classica.

§ 21. *Moto in un campo magnetico uniforme e costante*

Consideriamo ora il moto di una carica e in un campo magnetico uniforme $\mathbf{H}$. Per direzione del campo prendiamo l'asse delle z. Le equazioni del moto

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{e}{c}[\mathbf{vH}]$$

[1]) Questo risultato (per $p_0 = 0$) coincide con la soluzione del problema del moto relativistico con « accelerazione propria » costante $w_0 = eE/m$ (vedi problema del § 7). La costanza di questa accelerazione è dovuta, nel nostro caso, al fatto che il campo elettrico è invariante rispetto alle trasformazioni di Lorentz con velocità $\mathbf{V}$ dirette lungo il campo (vedi § 24).

riscriviamo in un altra forma sostituendo l'impulso con l'espressione

$$\mathbf{p} = \frac{\mathscr{E}\mathbf{v}}{c^2},$$

dove $\mathscr{E}$ è l'energia della particella che in un campo magnetico rimane costante. Le equazioni del moto assumono allora la forma

$$\frac{\mathscr{E}}{c^2}\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{e}{c}[\mathbf{vH}], \tag{21,1}$$

oppure, sviluppando il prodotto vettoriale:

$$\dot{v}_x = \omega v_y, \quad \dot{v}_y = -\omega v_x, \quad \dot{v}_z = 0, \tag{21,2}$$

dove abbiamo posto

$$\omega = \frac{ecH}{\mathscr{E}}. \tag{21,3}$$

Moltiplicando la seconda delle equazioni (21,2) per i e sommandola alla prima otteniamo:

$$\frac{d}{dt}(v_x + iv_y) = -i\omega(v_x + iv_y),$$

da cui

$$v_x + iv_y = ae^{-i\omega t},$$

dove a è una costante complessa, che può essere scritta nella forma $a = v_{0t}e^{-i\alpha}$, dove v_{0t} ed α sono reali. Allora

$$v_x + iv_y = v_{0t}e^{-i(\omega t+\alpha)},$$

e, separando le parti reale ed immaginaria, troviamo:

$$v_x = v_{0t}\cos(\omega t + \alpha), \quad v_y = -v_{0t}\operatorname{sen}(\omega t + \alpha). \tag{21,4}$$

Le costanti v_{0t} ed α sono determinate dalle condizioni iniziali, α è la fase iniziale; per v_{0t}, dalla (21,4) abbiamo:

$$v_{0t} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2},$$

cioè v_{0t} è la velocità della particella nel piano xy che resta costante durante il moto.

Integrando ancora una volta, dalla (21,4) ricaviamo:

$$x = x_0 + r\operatorname{sen}(\omega t + \alpha), \; y = y_0 + r\cos(\omega t + \alpha), \tag{21,5}$$

dove

$$r = \frac{v_{0t}}{\omega} = \frac{v_{0t}\mathscr{E}}{ecH} = \frac{cp_t}{eH} \tag{21,6}$$

(p_t è la proiezione dell'impulso sul piano xy). Dalla terza equazione (21,2) ricaviamo $v_z = v_{0z}$ e

$$z = z_0 + v_{0z}t. \tag{21,7}$$

Dalle formule (21,5) e (21,7) si vede che la carica in moto in un campo magnetico uniforme descrive una elica, il cui asse è diretto lungo il campo magnetico, e il cui raggio r è definito dalla (21,6). Inoltre, la velocità della particella è costante in grandezza. Nel caso particolare in cui $v_{0z} = 0$ (cioè la componente della velocità nella direzione del campo è nulla), la carica descrive una circonferenza in un piano perpendicolare al campo.

La grandezza ω, come si vede dalle formule, è la frequenza ciclica di rotazione della particella in un piano perpendicolare al campo.

Nel caso in cui la velocità della particella è piccola, possiamo approssimativamente porre $\mathscr{E} = mc^2$. La frequenza ω diventa allora

$$\omega = \frac{eH}{mc}. \tag{21,8}$$

Supponiamo ora che il campo magnetico, restando uniforme, varii lentamente in intensità e in direzione. Osserviamo come cambia il moto della particella carica.

È noto che per una variazione lenta delle condizioni del moto i cosiddetti invarianti adiabatici restano costanti. Essendo periodico il moto in un piano perpendicolare al campo magnetico, un invariante adiabatico sarrà l'integrale

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint \mathbf{P}_t \, d\mathbf{r},$$

preso su periodo completo del moto (circolare nel nostro caso), dove $\mathbf{P}_t$ è la proiezione dell'impulso generalizzato sul piano indicato[1]). Sostituendo $\mathbf{P}_t$ con $\mathbf{p}_t + \frac{e}{c}\mathbf{A}$, si ha:

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint \mathbf{p}_t \, d\mathbf{r} + \frac{e}{2\pi c} \oint \mathbf{A} \, d\mathbf{r}.$$

Notiamo che nel primo termine $\mathbf{p}_t$ è costante in valore assoluta e collineare con $d\mathbf{r}$; applicando il teorema di Stokes al secondo termine e sostituendo rot $\mathbf{A} = \mathbf{H}$, otteniamo:

$$I = rp_t - \frac{e}{2c} Hr^2 = \frac{cp_t^2}{2eH} \tag{21,9}$$

---

[1]) Vedi vol. I, *Meccanica*, § 49. Gli invarianti adiabatici sono in generale gli integrali $\oint p \, dq$ presi su periodo di variazione della coordinata q data. Nel caso considerato, i periodi relativi alle due coordinate x, y — nel piano perpendicolare ad H — coincidono, e l'integrale I rappresenta la somma dei due corrispondenti invarianti adiabatici. Tuttavia, ciascuno di questi invarianti preso separatamente non ha un senso particolare, perché dipende dalla scelta non univoca del potenziale vettore del campo. La non' univocità degli invarianti adiabatici che ne deriva è dovuta al fatto seguente: considerando un campo magnetico come iniforme in tutto lo spazio, è impossibile, in linea di massima, determinare il campo elettrico generato dalla variazione di H, perché esso dipende in realtà da condizioni concrete all'infinito.

(seguendo la direzione in cui la carica in moto per una data direzione **H** descrive il contorno, vediamo che ciò avviene nel senso antiorario per cui il segno meno nel secondo termine).

Di qui si vede che, per una variazione lenta di H, l'impulso trasversale p_t varia proporzionalmente a $\sqrt{H}$.

Questo risultato può essere applicato ad un altro caso, allorché la particella in moto descrive una elica in un campo magnetico costante, ma non del tutto uniforme (un campo che varia poco per distanze dell'ordine del raggio e del passo dell'orbita elicoidale). Tale moto si può considerare come un moto su un'orbita circolare la quale si sposta col tempo, mentre il campo, rispetto a questa orbita, sembra di variare col tempo, rimanendo però uniforme. Si può allora affermare che la componente trasversale (rispetto alla direzione del campo) dell'impulso varia secondo la legge $p_t = \sqrt{CH}$, dove C è una costante ed H una funzione data delle coordinate. D'altra parte, come per il moto in ogni campo magnetico costante, l'energia della particella (e con essa il quadrato del suo impulso p^2) resta costante. Di conseguenza, la componente longitudinale dell'impulso varia secondo la legge

$$p_l^2 = p^2 - p_t^2 = p^2 - CH(x, y, z). \qquad (21,10)$$

Poiché deve essere sempre $p_l^2 \geqslant 0$, ne segue che la particella non può penetrare in regioni di un campo sufficientemente forte ($CH > p^2$). Quando il moto avviene nel verso in cui il campo cresce, il raggio della traiettoria elicoidale decresce proporzionalmente a p_t/H (cioè proporzionalmente ad $1/\sqrt{H}$), e il suo passo decresce proporzionalmente a p_l. Raggiunta la frontiera sulla quale p_l si annulla, la particella si riflette su di essa: continuando a ruotare nella stessa direzione, essa comincia a muoversi in verso opposto al gradiente del campo.

La non uniformità del campo genera anche un altro fenomeno, ossia un lento spostamento trasversale (*deriva*) del centro guida della traiettoria elicoidale della particella (cosí si chiama il centro dell'orbita circolare); questo fenomeno verrà esaminato nel problema 3 del prossimo paragrafo.

PROBLEMA

Determinare pulsazione di un oscillatore spaziale carico che si trova in un campo magnetico uniforme costante; la frequenza propria dell'oscillatore (in assenza del campo) è ω_0.

Soluzione. Le equazioni delle oscillazioni forzate in un campo magnetico (orientato lungo l'asse delle z) sono della forma

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{eH}{mc}\dot{y}, \quad \ddot{y} + \omega_0^2 y = -\frac{eH}{mc}\dot{x}, \quad \ddot{z} + \omega_0^2 z = 0.$$

Moltiplicando la seconda equazione per i ed aggiungendola alla prima, otteniamo:

$$\ddot{\xi}+\omega_0^2\xi=-i\frac{eH}{mc}\dot{\xi},$$

dove $\xi=x+iy$. Troviamo di qui che le pulsazioni dell'oscillatore nel piano perpendicolare al campo sono

$$\omega=\sqrt{\omega_0^2+\frac{1}{4}\left(\frac{eH}{mc}\right)^2}\pm\frac{eH}{2mc}.$$

Se il campo H è debole, questa formula diventa

$$\omega=\omega_0\pm\frac{eH}{2mc}.$$

Le oscillazioni lungo la direzione del campo non variano.

§ 22. *Moto di una carica in campi elettrico e magnetico uniformi e costanti*

Consideriamo il moto di una carica nel caso della presenza contemporanea di un campo elettrico e di un campo magnetico uniformi e costanti. Ci limiteremo al caso non relativistico in cui la velocità della carica è $v \ll c$ e, di conseguenza, il suo impulso è $\mathbf{p}=m\mathbf{v}$; come vedremo dopo, affinché questa condizione sia soddisfatta è necessario che il campo elettrico sia piccolo rispetto al campo magnetico.

Come direzione di $\mathbf{H}$ scegliamo l'asse delle z e come piano passante per i vettori $\mathbf{H}$ ed $\mathbf{E}$ il piano yz. Le equazioni del moto

$$m\dot{\mathbf{v}}=e\mathbf{E}+\frac{e}{c}[\mathbf{vH}]$$

si scriveranno allora

$$\begin{aligned} m\ddot{x}&=\frac{e}{c}\dot{y}H,\\ m\ddot{y}&=eE_y-\frac{e}{c}\dot{x}H,\\ m\ddot{z}&=eE_z. \end{aligned} \tag{22,1}$$

La terza di queste equazioni mostra che lungo l'asse delle z la carica compie un moto uniformemente accelerato, cioè

$$z=\frac{eE_z}{2m}t^2+v_{0z}t. \tag{22,2}$$

Moltiplicando la seconda delle equazioni (22,1) per i e sommandola alla prima, troviamo:

$$\frac{d}{dt}(\dot{x}+i\dot{y})+i\omega(\dot{x}+i\dot{y})=i\frac{e}{m}E_y$$

($\omega = eH/mc$). L'integrale di questa equazione, dove l'incognita è $\dot{x} + i\dot{y}$, è uguale alla somma dell'integrale dell'omogenea associata e di un integrale particolare dell'equazione stessa. Per il primo di questi integrali abbiamo $a^{-i\omega t}$, e per il secondo $eE_y/m\omega = cE_y/H$. Quindi

$$\dot{x} + i\dot{y} = ae^{-i\omega t} + \frac{cE_y}{H}.$$

Poiché generalmente la costante a è complessa, è comodo scriverla nella forma $a = be^{i\alpha}$, dove b ed α sono reali. Siccome a viene moltiplicata per $e^{-i\omega t}$, con una scelta adeguata dell'origine del tempo si può dare alla fase α un valore qualsiasi. Scegliamo α in maniera tale che a sia reale. Separando quindi nell'espressione $\dot{x} + i\dot{y}$ la parte reale e la parte immaginaria, troviamo:

$$\dot{x} = a\cos\omega t + c\frac{E_y}{H}, \quad \dot{y} = -a\,\mathrm{sen}\,\omega t. \tag{22,3}$$

Inoltre, all'istante $t = 0$ la velocità è diretta lungo l'asse delle x. Le componenti della velocità della particella sono evidentemente funzioni periodiche del tempo; i loro valori medi sono

$$\bar{\dot{x}} = \frac{cE_y}{H}, \quad \bar{\dot{y}} = 0.$$

Questa velocità media del moto di una carica in campi elettrico e magnetico è chiamata spesso velocità di *deriva* elettrica. La sua direzione è perpendicolare ad ambedue i campi e non dipende dal segno della carica. In forma vettoriale abbiamo:

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{c\,[\mathbf{EH}]}{H^2}. \tag{22,4}$$

Tutte le formule di questo paragrafo sono applicabili se la velocità della particella è piccola rispetto alla velocita della luce; a questo scopo è necessario, in particolare, che i campi elettrico e magnetico soddisfino la condizione

$$\frac{E_y}{H} \ll 1, \tag{22,5}$$

mentre le grandezze assolute E_y ed H possono essere arbitrarie.

Integrando ancora una volta le equazioni (22,3) e scegliendo la costante d'integrazione in maniera tale che per $t = 0$ si abbia $x = y = 0$, otteniamo:

$$\begin{aligned} x &= \frac{a}{\omega}\,\mathrm{sen}\,\omega t + \frac{cE_y}{H}t, \\ y &= \frac{a}{\omega}(\cos\omega t - 1). \end{aligned} \tag{22,6}$$

Queste equazioni, considerate come equazioni parametriche di una curva, rappresentano la cosiddetta trocoide. Qualora il valore assoluto di a sia superiore od inferiore al valore assoluto di cE_y/H, la proiezione della traiettoria della particella sul piano xy ha la forma rappresentata rispettivamente nella fig. 6,a e nella fig. 6,b.

Se $a = -cE/_yH$, le formule (22,6) diventano

$$x = \frac{cE_y}{\omega H}(\omega t - \operatorname{sen} \omega t), \qquad y = \frac{cE_y}{\omega H}(1 - \cos \omega t), \tag{22,7}$$

cioè la proiezione della traiettoria sul piano xy è una cicloide (fig. 6, c).

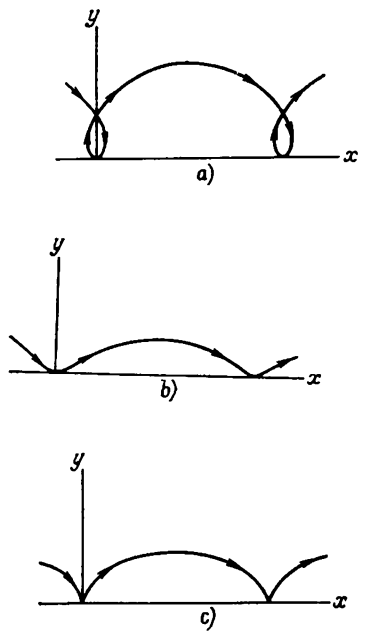

Fig. 6

PROBLEMI

1. Determinare il moto relativistico di una carica in un campo elettrico ed in un campo magnetico uniformi paralleli.

Soluzione. Il campo magnetico non influisce sul moto nella direzione comune E ed H (asse z); il moto di conseguenza avviene sotto l'azione del solo campo elettrico; per quanto detto al § 20, abbiamo

$$z = \frac{\mathscr{E}_{\text{cin}}}{eE}, \qquad \mathscr{E}_{\text{cin}} = \sqrt{\mathscr{E}_0^2 + (ceEt)^2}.$$

Per il moto nel piano xy abbiamo le equazioni:

$$\dot{p}_x = \frac{e}{c} H v_y, \quad \dot{p}_y = -\frac{e}{c} H v_x,$$

oppure

$$\frac{d}{dt}(p_x + ip_y) = -i\frac{eH}{c}(v_x + iv_y) = -\frac{ieHc}{\mathscr{E}_{\text{cin}}}(p_x + ip_y),$$

da cui

$$p_x + ip_y = p_t e^{-i\varphi},$$

dove p_t è il valore costante della proiezione dell'impulso sul piano xy, e dove la grandezza ausiliaria φ è stata ricavata dalla relazione

$$d\varphi = eHc\,\frac{dt}{\mathscr{E}_{\text{cin}}},$$

da cui

$$ct = \frac{\mathscr{E}_0}{eE} \operatorname{sh} \frac{E}{H}\varphi. \tag{1}$$

Scriviamo poi:

$$p_x + ip_y = p_t e^{-i\varphi} = \frac{\mathscr{E}_{\text{cin}}}{c^2}(\dot{x} + i\dot{y}) = \frac{eH}{c}\frac{d(x+iy)}{d\varphi},$$

da cui

$$x = \frac{cp_t}{eH}\operatorname{sen}\varphi, \qquad y = \frac{cp_t}{eH}\cos\varphi. \tag{2}$$

Le formule (1) e (2) con la formula

$$z = \frac{\mathscr{E}_0}{eE}\operatorname{ch}\frac{E}{H}\varphi \tag{3}$$

determinano il moto della particella in forma parametrica. La traiettoria rappresenta un'elica di raggio cp_t/eH e di passo crescente in modo monotono; la particella descrive l'elica ad una velocità angolare decrescente $\varphi = eHc/\mathscr{E}_{\text{cin}}$ e la proiezione della velocità sull'asse delle z tende a c.

2. Determinare il moto relativistico di una carica in un campo elettrico e in un campo magnetico mutuamente perpendicolari e di uguale intensità [1]).

Soluzione. Dirigiamo l'asse delle z lungo H e l'asse delle y lungo E, ponendo $E = H$: le equazioni del moto sono:

$$\frac{dp_x}{dt} = \frac{e}{c}Ev_y, \qquad \frac{dp_y}{dt} = eE\left(1 - \frac{v_x}{c}\right), \qquad \frac{dp_z}{dt} = 0$$

dalle quali ricaviamo l'equazione (17,7):

$$\frac{d\mathscr{E}_{\text{cin}}}{dt} = eEv_y.$$

Da queste equazioni abbiamo

$$p_z = \text{costante}, \qquad \mathscr{E}_{\text{cin}} - cp_x = \text{costante} \equiv \alpha.$$

Utilizzando anche l'uguaglianza

$$\mathscr{E}_{\text{cin}} - c^2p_x^2 = (\mathscr{E}_{\text{cin}} + cp_x)(\mathscr{E}_{\text{cin}} - cp_x) = c^2p_y^2 + \varepsilon^2$$

(dove $\varepsilon^2 = m^2c^4 + c^2p_z^2 = \text{costante}$), troviamo

$$\mathscr{E}_{\text{cin}} + cp_x = \frac{1}{\alpha}(c^2p_y^2 + \varepsilon^2),$$

e quindi

$$\mathscr{E}_{\text{cin}} = \frac{\alpha}{2} + \frac{c^2p_y^2 + \varepsilon^2}{2\alpha},$$

$$p_x = -\frac{\alpha}{2c} + \frac{c^2p_y^2 + \varepsilon^2}{2\alpha c}.$$

Scriviamo ancora

$$\mathscr{E}_{\text{cin}}\frac{dp_y}{dt} = eE\left(\mathscr{E}_{\text{cin}} - \frac{\mathscr{E}_{\text{cin}}v_x}{c}\right) = eE(\mathscr{E}_{\text{cin}} - cp_x) = eE\alpha,$$

---

[1]) Il problema del moto in campi E ed H, reciprocamente perpendicolari ma di intensità differenti, si riduce, con un cambiamento appropriato del sistema di riferimento, al problema di un moto in un campo puramente elettrico o magnetico (vedi § 25).

da cui

$$2eEt = \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{\alpha^2}\right) p_y + \frac{c^2}{3\alpha^2} p_y^3. \tag{1}$$

Per la determinazione della traiettoria nelle equazioni

$$\frac{dx}{dt} = \frac{c^2 p_x}{\mathscr{E}_{\text{cin}}}, \ \ldots$$

passiamo alla variabile p_y usando l'equazione $dt = \mathscr{E}_{\text{cin}} dp_y / eE\alpha$ e poi integrando, otteniamo:

$$\begin{gathered} x = \frac{c}{2eE}\left(-1 + \frac{\varepsilon^2}{\alpha^2}\right) p_y + \frac{c^3}{6\alpha^2 eE} p_y^3, \\ y = \frac{c^2}{2\alpha eE} p_y^2, \qquad z = \frac{p_z c^2}{eE\alpha} p_y. \end{gathered} \tag{2}$$

Le formule (1) e (2) determinano completamente, in forma parametrica (parametro p_y), il moto della particella. Notiamo che la velocità del moto cresce piú rapidamente nella direzione perpendicolare ad **E** ed **H** (asse delle x).

3. Determinare la velocità di deriva del centro guida dell'orbita di una particella non relativistica carica in un campo magnetico costante quasi uniforme (*H. Alfven*, 1940).

Soluzione. Supponiamo dapprima che la particella si muova su un'orbita circolare, cioè la sua velocità non abbia componente longitudinale (lungo il campo). Scriviamo l'equazione della traiettoria della particella nella forma $\mathbf{r} = \mathbf{R}(t) + \boldsymbol{\zeta}(t)$, dove $\mathbf{R}(t)$ è il raggio vettore del centro guida (funzione del tempo che varia lentamente) e $\boldsymbol{\zeta}(t)$ è una grandezza rapidamente oscillante che rappresenta il moto rotatorio intorno al centro quida. Prendiamo la media della forza $\frac{e}{c}[\dot{\mathbf{r}}\mathbf{H}(\mathbf{r})]$, agente sulla particella, rispetto al periodo del moto oscillatorio (circolare) (vedi vol. I, *Meccanica*, § 30). Sviluppiamo la funzione $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ secondo le potenze di $\boldsymbol{\zeta}$:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}(\mathbf{R}) + (\boldsymbol{\zeta}\nabla)\mathbf{H}(\mathbf{R}).$$

Quando si prende il valore medio, i termini del primo ordine rispetto alla grandezza oscillante $\boldsymbol{\zeta}(t)$ si annullano, e il termine del secondo ordine genera una forza supplementare

$$\mathbf{f} = \frac{e}{c}\,\overline{[\dot{\boldsymbol{\zeta}}(\boldsymbol{\zeta}\nabla)\mathbf{H}]}.$$

Per un moto circolare abbiamo

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}} = \omega[\boldsymbol{\zeta}\mathbf{n}], \qquad \zeta = \frac{v_\perp}{\omega},$$

dove $\mathbf{n}$ è un vettore unitario nella direzione $\mathbf{H}$; la frequenza è $\omega = eH/mc$; $v_\perp$ è la velocità della particella nel suo moto circolare. Il valore medio dei prodotti delle componenti del vettore $\boldsymbol{\zeta}$ che ruota in un piano (perpendicolare ad $\mathbf{n}$) è

$$\overline{\zeta_\alpha \zeta_\beta} = \frac{1}{2}\zeta^2 \delta_{\alpha\beta},$$

dove $\delta_{\alpha\beta}$ è il tensore unitario in questo piano. Otteniamo in definitiva:

$$\mathbf{f} = -\frac{mv_\perp^2}{2H}[[\mathbf{n}\nabla]\mathbf{H}].$$

In virtú delle equazioni div $\mathbf{H} = 0$, rot $\mathbf{H} = 0$ che sono soddisfatte dal campo costante $\mathbf{H}$ ($\mathbf{R}$), abbiamo:

$$[[\mathbf{n}\nabla]\,\mathbf{H}] = -\mathbf{n}\,\mathrm{div}\,\mathbf{H} + (\mathbf{n}\nabla)\,\mathbf{H} + [\mathbf{n}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H}] =$$

$$= (\mathbf{n}\nabla)\,\mathbf{H} = H\,(\mathbf{n}\nabla)\,\mathbf{n} + \mathbf{n}\,(\mathbf{n}\nabla)\,H).$$

La forza trasversale (rispetto ad $\mathbf{n}$) che fa spostare l'orbita è data da

$$\mathbf{f} = -\frac{mv_\perp^2}{2}\,(\mathbf{n}\nabla)\,\mathbf{n} = \frac{mv_\perp^2}{2\rho}\,\mathbf{v},$$

dove ρ è il raggio di curvatura della linea di forza del campo nel dato punto, e $\mathbf{v}$ il vettore unitario diretto dal centro di curvatura verso questo punto.

Il caso in cui la particella abbia anche una velocità longitudinale $v_{\|}$ (lungo $\mathbf{n}$) può essere ridotto al caso precedente passando ad un sistema di riferimento che ruota intorno al centro istantaneo di curvatura della linea di forza (della traiettoria del centro guida) con velocità angolare $v_{\|}/\rho$. In questo sistema la particella è priva di una velocità longitudinale, ma vi sorge una forza trasversale supplementare, cioè la forza centrifuga uguale a $\mathbf{v}mv_{\|}^2/\rho$. In tal modo, la forza trasversale totale è

$$\mathbf{f}_\perp = \mathbf{v}\,\frac{m}{\rho}\left(v_{\|}^2 + \frac{v_\perp^2}{2}\right).$$

Questa forza è equivalente ad un campo elettrico di intensità $\mathbf{f}_\perp/e$. In base alla formula (22,4), essa genera la deriva del centro guida dell'orbita con velocità

$$\mathbf{v}_d = \frac{1}{\omega\rho}\left(v_{\|}^2 + \frac{v_\perp^2}{2}\right)[\mathbf{v}\mathbf{n}].$$

Il segno di questa velocità dipende dal segno della carica.

§ 23. *Tensore del campo elettromagnetico*

Nel § 17 abbiamo introdotto le equazioni del moto di una carica in un campo, partendo dalla funzione di Lagrange (16,4) scritta in forma tridimensionale. Deduciamo ora le stesse equazioni dall'azione (16,1) scritta in notazioni quadridimensionali.

Il principio di minima azione afferma:

$$\delta S = \delta \int_a^b \left(-mc\,ds - \frac{e}{c}\,A_i\,dx^i\right) = 0. \qquad (23,1)$$

Tenendo presente che $ds = \sqrt{dx_i dx^i}$, troviamo (per brevità, ometterremo in seguito gli estremi d'integrazione a e b):

$$\delta S = -\int \left(mc\,\frac{dx_i\,d\delta x^i}{ds} + \frac{e}{c}\,A_i\,d\delta x^i + \frac{e}{c}\,\delta A_i\,dx^i\right) = 0.$$

Integrando per parti i due primi termini dell'espressione ed introducendo inoltre nel primo termine la 4-velocità $dx_1/ds = u_i$,

abbiamo

$$\int \left(mc\, du_i\, \delta x^i + \frac{e}{c}\, \delta x^i\, dA_i - \frac{e}{c}\, \delta A_i\, dx^i\right) - \left(mcu_i + \frac{e}{c} A_i\right) \delta x^i \Big| = 0. \tag{23,2}$$

Il secondo termine di questa uguaglianza è nullo, perché l'integrale varia agli estremi per valori dati delle coordinate. D'altra parte:

$$\delta A_i = \frac{\partial A_i}{\partial x^k}\, \delta x^k, \quad dA_i = \frac{\partial A_i}{\partial x^k}\, dx^k,$$

di conseguenza,

$$\int \left(mc\, du_i\, \delta x^i + \frac{e}{c} \frac{\partial A_i}{\partial x^k}\, \delta x^i\, dx^k - \frac{e}{c} \frac{\partial A_i}{\partial x^k}\, dx^i\, \delta x^k\right) = 0.$$

Riscriviamo il primo termine nella forma $du_1 = \frac{du_i}{ds}\, ds$, il secondo e il terzo nella forma $dx^i = u^i ds$. Scambiando poi di posto gli indici i e k nel terzo termine (questa operazione non cambia sostanzialmente niente perché sono indici di sommatoria), otteniamo:

$$\int \left[mc \frac{du_i}{ds} - \frac{e}{c} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}\right) u^k\right] \delta x^i\, ds = 0.$$

Essendo δx^i arbitrarie, ne segue che l'espressione integranda è nulla:

$$mc \frac{du_i}{ds} - \frac{e}{c} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}\right) u^k = 0.$$

Poniamo

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}\,; \tag{23,3}$$

il tensore antisimmetrico F_{ik} è detto *tensore elettromagnetico*. L'equazione ottenuta assumerà allora la forma

$$mc \frac{du^i}{ds} = \frac{e}{c} F^{ik} u_k. \tag{23,4}$$

Questa è l'equazione del moto di una carica in forma quadridimensionale.

È facile esplicitare le singole componenti del tensore F_{ik} sostituendo i valori $A_i = (\varphi - \mathbf{A})$ nella definizione (23,3). Il risultato si può scrivere sotto forma di una tabella, dove l'indice $i = 0$, 1, 2, 3 indica le righe, e l'indice k le colonne:

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}, \qquad F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix} \tag{23,5}$$

Piú brevemente si può scrivere (vedi § 6):

$$F_{ik} = (\mathbf{E}, \mathbf{H}), \quad F^{ik} = (-\mathbf{E}, \mathbf{H}).$$

Cosí, le componenti dei vettori campo elettrico e campo magnetico sono le componenti di un solo 4-tensore elettromagnetico.

Passando alle notazioni tridimensionali, è facile vedere che le tre componenti spaziali ($i = 1, 2, 3$) dell'equazione (23,4) sono identiche all'equazione vettoriale del moto (17,5), e la componente temporale ($i = 0$) all'equazione del lavoro (17,7). Quest'ultima è una conseguenza della equazione del moto; il fatto che delle quattro equazioni (23,4) soltanto tre sono indipendenti, può essere facilmente verificato direttamente: è sufficiente moltiplicare i due membri della (23,4) per u^i. Allora, i due membri dell'uguaglianza si annullano: il primo in virtú dell'ortogonalità dei quadrivettori u^i e du_i/ds, e il secondo in virtú dell'antisimmetria del tensore F_{ik}.

Se nella variazione di δS si prendono in considerazione soltanto le traiettorie reali, il primo termine della (23,2) si annulla identicamente. Allora il secondo termine, nel quale il limite superiore viene considerato variabile, dà il differenziale dell'azione come funzione delle coordinate. Quindi:

$$\delta S = -\left(mcu_i + \frac{e}{c} A_i\right) \delta x^i. \tag{23,6}$$

Da cui

$$-\frac{\partial S}{\partial x^i} = mcu_i + \frac{e}{c} A_i = p_i + \frac{e}{c} A_i. \tag{23,7}$$

$-\partial S/\partial x^i$ è il quadrivettore dell'impulso generalizzato P_i della particella. Sostituendo i valori delle componenti p_i ed A_i, troviamo che

$$P^i = \left(\frac{\mathscr{E}c\mathbf{n} + e\varphi}{c}, \quad \mathbf{p} + \frac{e}{c}\mathbf{A}\right). \tag{23,8}$$

Come c'era da aspettarsi, le componenti spaziali del quadrivettore P_i costituiscono il vettore tridimensionale dell'impulso generalizzato (16,5), e la componente temporale è $\mathscr{E}/c$, dove $\mathscr{E}$ è l'energia totale della carica nel campo.

§ 24. *Trasformazione di Lorentz per il campo*

Scriviamo ora le formule di trasformazione per il campo elettromagnetico, cioè formule che permettono di determinare il campo in un sistema di riferimento inerziale, allorché questo stesso campo è dato in un altro sistema.

Le formule di trasformazione dei potenziali si ricavano direttamente dalle formule generali di trasformazione del quadrivettore

(6,1). Tenendo presente che $A^i = (\varphi, \mathbf{A})$, troviamo:

$$\varphi = \frac{\varphi' + \frac{V}{c} A'_x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad A_x = \frac{A'_x + \frac{V}{c} \varphi'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad A_y = A'_y, \quad A_z = A'_z. \tag{24,1}$$

Le formule di trasformazione per un 4-tensore antisimmetrico di rango due (tale è il tensore F^{ik}) sono già state stabilite nel problema 2 del § 6: le componenti F^{23} ed F^{01} non cambiano nella trasformazione, mentre le componenti F^{02}, F^{03} ed F^{12}, F^{13} si trasformano rispettivamente come x^0 ed x^1. Esprimendo le componenti del tensore F^{ik} in funzione delle componenti dei campi **E** ed **H** conformemente alla (23,5), otteniamo le seguenti formule di trasformazione per il campo elettrico:

$$E_x = E'_x, \quad E_y = \frac{E'_y + \frac{V}{c} H'_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad E_z = \frac{E'_z - \frac{V}{c} H'_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \tag{24,2}$$

e per il campo magnetico:

$$H_x = H'_x, \quad H_y = \frac{H'_y - \frac{V}{c} E'_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad H_z = \frac{H'_z + \frac{V}{c} E'_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \tag{24,3}$$

Il campo elettrico e il campo magnetico sono quindi, come pure la maggior parte delle grandezze fisiche, relativi: le loro proprietà sono differenti in diversi sistemi di riferimento. In particolare, un campo elettrico e un campo magnetico possono essere nulli in un sistema di riferimento ed essere nello stesso tempo presenti in un altro sistema.

Le formule di trasformazione (24,2) e (24,3) si semplificano considerevolmente per il caso in cui $V \ll c$. Abbiamo, approssimando sino ai termini dell'ordine di V/c:

$$E_x = E'_x, \quad E_y = E'_y + \frac{V}{c} H'_z, \quad E_z = E'_z - \frac{V}{c} H'_y;$$

$$H_x = H'_x, \quad H_y = H'_y - \frac{V}{c} E'_z, \quad H_z = H'_z + \frac{V}{c} E'_y.$$

Queste formule si possono scrivere in forma vettoriale:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' + \frac{1}{c} [\mathbf{H}'\mathbf{V}], \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}' - \frac{1}{c} [\mathbf{E}'\mathbf{V}]. \tag{24,4}$$

Le formule della trasformazione inversa da K' a K si ricavano dalle (24,2—4) spostando gli apici e cambiando il segno di V.

Se nel sistema K' il campo magnetico $\mathbf{H}' = 0$, dalle (24,2) e (24,3) si trova che tra i campi elettrico e magnetico nel sistema K esiste la relazione

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c}[\mathbf{VE}]. \tag{24,5}$$

Se invece nel sistema K' il campo $\mathbf{E}' = 0$, nel sistema K si avrà

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}[\mathbf{VH}]. \tag{24,6}$$

Da queste formule è chiaro che, in ambedue i casi, i campi magnetico ed elettrico sono mutuamente perpendicolari nel sistema K.

Queste formule esprimono anche il viceversa: se in un sistema di riferimento K i campi $\mathbf{E}$ ed $\mathbf{H}$ sono mutuamente perpendicolari (ma di intensità differenti), esiste allora un sistema K' dove il campo è puramente elettrico o puramente magnetico. La velocità $\mathbf{V}$ di questo sistema (rispetto a K) è perpendicolare ad $\mathbf{E}$ ed $\mathbf{H}$ e ha per grandezza nel primo caso cH/E (per $H < E$), e nel secondo caso cE/H (per $E < H$).

§ 25. *Invarianti del campo*

Con i vettori campo elettrico e campo magnetico si possono formare grandezze invarianti rispetto alle trasformazioni da un sistema di riferimento inerziale in un altro.

È facile trovare la forma di questi invarianti partendo dalla rappresentazione quadridimensionale del campo mediante il 4-tensore antisimmetrico F^{ik}. È evidente che le componenti di questo tensore permettono di formare le seguenti grandezze invarianti:

$$F_{ik}F^{ik} = \text{invariante}, \tag{25,1}$$

$$e^{iklm}F_{ik}F_{lm} = \text{invariante}, \tag{25,2}$$

dove e^{iklm} è il tensore unità completamente antisimmetrico (vedi § 6). La prima di queste grandezze è un vero scalare, mentre la seconda uno pseudoscalare (il prodotto del tensore F^{ik} per il suo tensore duale)[1]).

Esprimendo le componenti di F^{ik} in funzione delle componenti di $\mathbf{E}$ ed $\mathbf{H}$ in base alla (23,5), è facile vedere che questi

---

[1]) Notiamo che lo pseudoscalare (25,2) può essere scritto in forma di divergenza quadridimensionale:

$$e^{iklm}F_{ik}F_{lm} = 4\frac{\partial}{\partial x^i}\left(e^{iklm}A_k\frac{\partial}{\partial x^l}A_m\right),$$

come è facilmente verificabile tenendo conto della antisimmetria di e^{iklm}.

invarianti in forma tridimensionale assumono la forma:

$$H^2 - E^2 = \text{invariante}, \tag{25,3}$$

$$\mathbf{EH} = \text{invariante}. \tag{25,4}$$

Il carattere pseudoscalare della seconda grandezza risulta evidente dal fatto che essa rappresenta il prodotto del vettore polare **E** per il vettore assiale **H** (mentre un vero scalare è il quadrato $(\mathbf{EH})^2$).

Dall'invarianza delle due espressioni citate deduciamo quanto segue: se in qualche sistema di riferimento i campi elettrico e magnetico sono mutuamente perpendicolari, cioè $\mathbf{EH} = 0$, essi sono perpendicolari in qualsiasi altro sistema di riferimento inerziale; se in qualche sistema di riferimento i valori assoluti di **E** ed **H** sono uguali, essi sono uguali in qualsiasi altro sistema.

Sussistono evidentemente le seguenti disuguaglianze. Se in un sistema di riferimento $E > H$ (o $E < H$), in qualsiasi altro sistema si avrà pure $E > H$ (o $E < H$). Se in un sistema di riferimento i vettori **E** ed **H** formano un angolo acuto (oppure ottuso), essi formeranno un angolo acuto (oppure ottuso) in qualsiasi altro sistema.

La trasformazione di Lorentz permette sempre di assegnare ad **E** ed **H** valori arbitrari soggetti alla sola condizione che $E^2 - H^2$ ed **EH** abbiano valori prefissati. In particolare, si può trovare un sistema di riferimento inerziale in cui i campi elettrico e magnetico sono in un dato punto paralleli. In questo sistema si ha $\mathbf{EH} = EH$, e dalle due equazioni

$$E^2 - H^2 = E_0^2 - H_0^2, \quad EH = \mathbf{E}_0\mathbf{H}_0$$

si possono ricavare i valori di **E** ed **H** in questo sistema ($\mathbf{E}_0$ ed $\mathbf{H}_0$ sono i campi elettrico e magnetico nel sistema di riferimento iniziale).

Fa eccezione il caso in cui i due invarianti sono nulli. Allora **E** ed **H** sono di grandezza uguali e perpendicolari tra loro in tutti i sistemi di riferimento.

Se si ha soltanto $\mathbf{EH} = 0$, si potrà allora trovare un sistema di riferimento in cui $\mathbf{E} = 0$ oppure $\mathbf{H} = 0$ (a seconda che $E^2 - H^2$ sia minore o maggiore di zero), cioè il campo sarà puramente magnetico o puramente elettrico; viceverrsa, se in un sistema di riferimento $\mathbf{E} = 0$ oppure $\mathbf{H} = 0$, essi saranno mutuamente perpendicolari in ogni altro sistema, conclusione corrispondente a quella fatta alla fine del paragrafo precedente.

Per trovare gli invarianti del 4-tensore antisimmetrico procediamo ora in un altro modo. Questo procedimento rende evidente l'unicità dei due invarianti indipendenti (25,3) e (25,4); esso rivela inoltre alcune proprietà matematiche istruttive delle trasformazioni di Lorentz quando esse vengono eseguite su un 4-tensore.

Consideriamo il vettore complesso

$$\mathbf{F} = \mathbf{E} + i\mathbf{H}. \tag{25,5}$$

È facile vedere, utilizzando le formule (24,2) e (24,3), che la trasformazione di Lorentz (lungo l'asse delle x) per questo vettore assume la forma

$$F_x = F'_x, \quad F_y = F'_y \operatorname{ch} \varphi - iF'_z \operatorname{sh} \varphi = F'_y \cos i\varphi - F'_z \operatorname{sen} i\varphi,$$
$$F_z = F'_z \cos i\varphi + F'_y \operatorname{sen} i\varphi, \quad \operatorname{th} \varphi = \frac{V}{c}. \tag{25,6}$$

Vediamo che una rotazione del vettore **F** nel piano xt dello spazio quadridimensionale (tale è la trasformazione di Lorentz considerata) è equivalente ad una rotazione di un angolo immaginario nel piano yz dello spazio tridimensionale L'insieme di tutte le rotazioni possibili nello spazio quadridimensionale (comprese le rotazioni ordinarie degli assi x, y, z) è equivalente all'insieme di tutte le rotazioni possibili di angoli complessi nello spazio tridimensionale (a sei angoli reali di rotazione nello spazio quadridimensionale corrispondono tre angoli complessi di rotazione del sistema tridimensionale).

Il solo invariante del vettore rispetto alle rotazioni è il suo quadrato: $\mathbf{F}^2 = E^2 - H^2 + 2i\mathbf{EH}$. Ne segue che le grandezze reali $E^2 - H^2$ ed **EH** sono i due soli invarianti indipendenti del tensore F_{ik}.

Se $\mathbf{F}^2 \neq 0$, il vettore **F** può essere scritto nella forma $\mathbf{F} = a\mathbf{n}$, dove **n** è un vettore unitario ($\mathbf{n}^2 = 1$) complesso. Con una rotazione complessa appropriata si può dirigere **n** lungo uno degli assi coordinati; **n** diventerà allora reale e determinerà le direzioni dei due vettori **E** ed **H** : $\mathbf{F} = (E + iH)\,\mathbf{n}$. In altri termini, i vettori **E** ed **H** saranno paralleli.

PROBLEMA

Determinare la velocità di un sistema di riferimento dove i campi elettrico e magnetico sono paralleli.

Soluzione. Esiste un'infinità di sistemi di riferimento K' che soddisfano la condizione posta. Trovatone uno ogni altro sistema che si muova relativamente al primo con velocità diretta lungo la direzione comune dei campi **E** ed **H** gode della stessa proprietà. Sarà sufficiente perciò determinare tra questi sistemi un sistema la cui velocità sia perpendicolare ad ambedue i campi. Scegliendo per direzione della velocità l'asse delle x ed utilizzando il fatto che nel sistema K': $E'_x = H'_x = 0$, $E'_y H'_y - E'_z H'_y = 0$, mediante le formule (24,2) e (24,3) per la velocità **V** del sistema K' rispetto al sistema iniziale otteniamo la seguente equazione:

$$\frac{\mathbf{V}/c}{1 + V^2/c^2} = \frac{[\mathbf{EH}]}{E^2 + H^2}$$

(delle due radici dell'equazione di secondo grado deve essere scelta, evidentemente, quella per cui $V < c$).

Capitolo IV

EQUAZIONI DEL CAMPO ELETTROMAGNETICO

§ 26. *Prima coppia delle equazioni di Maxwell*

Dalle espressioni

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi$$

si ricavano facilmente equazioni contenenti soltanto **E** ed **H**. Determiniamo a tale scopo rot **E**:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{A} - \operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi.$$

Il rotore di un gradiente è nullo; quindi

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \tag{26,1}$$

Prendiamo la divergenza dei due membri dell'equazione rot $\mathbf{A} = \mathbf{H}$, tenendo presente che la divergenza di un rotore è nulla; abbiamo quindi:

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0. \tag{26,2}$$

Le equazioni (26,1) e (26,2) costituiscono la prima coppia d'equazioni di Maxwell[1]). Notiamo che queste due equazioni non determinano ancora completamente le proprietà del campo. Questo è evidente anche dal solo fatto che esse determinano la variazione del campo magnetico con il tempo (la derivata $\partial \mathbf{H}/\partial t$), ma non la derivata $\partial \mathbf{E}/\partial t$.

Le equazioni (26,1) e (26,2) possono essere scritte in forma integrale. Applicando il teorema di Gauss otteniamo:

$$\int \operatorname{div} \mathbf{H}\, dV = \oint \mathbf{H}\, d\mathbf{f},$$

dove l'integrale a secondo membro è esteso a tutta la superficie chiusa che limita il volume al quale è esteso l'integrale a primo membro. In virtú della (26,2) abbiamo:

$$\oint \mathbf{H}\, d\mathbf{f} = 0. \tag{26,3}$$

---

[1]) Le equazioni di Maxwell, equazioni fondamentali dell'elettrodinamica, sono state formulate per la prima volta da *James Maxwell* negli anni 1860.

L'integrale di un vettore preso su una superficie è detto *flusso del vettore* attraverso questa superficie. Quindi il flusso di campo magnetico attraverso ogni superficie chiusa è nullo.

Conformemente al teorema di Stokes

$$\int \mathrm{rot}\ \mathbf{E}\, d\mathbf{f} = \oint \mathbf{E}\, d\mathbf{l}.$$

dove l'integrale a secondo membro è preso lungo la curva chiusa che limita la superficie sulla quale è preso l'integrale a primo membro. In virtú della (26,1), integrando i due membri su una superficie troviamo:

$$\oint \mathbf{E}\, d\mathbf{l} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{H}\, d\mathbf{f}. \tag{26,4}$$

L'integrale di un vettore esteso a una curva chiusa è detto *circuitazione* del vettore lungo la curva. La circuitazione del campo elettrico è detta anche *forza elettromotrice* in un contorno dato. In tal modo, la forza elettromotrice in un contorno è uguale alla derivata rispetto al tempo, presa con il segno contrario, del flusso del campo magnetico attraverso la superficie limitata dal contorno.

Le equazioni di Maxwell (26,1) e (26,2) si possono scrivere utilizzando le notazioni quadridimensionali. Partendo dalla definizione del tensore elettromagnetico

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k},$$

è facile vedere che

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} = 0. \tag{26,5}$$

Il primo membro di questa uguaglianza rappresenta un tensore di rango tre, antisimmetrico rispetto a tutti i tre indici. Le sue componenti non sono identicamente nulle soltanto se $i \neq k \neq l$. Ci sono dunque complessivamente quattro equazioni distinte che, come è facile provare sostituendo le espressioni (23,5), coincidono con le equazioni (26,1) e (26,2).

Al 4-tensore antisimmetrico di rango tre si può far corrispondere un quadrivettore duale, ottenuto moltiplicando il tensore per e^{iklm} e contraendo tre coppie di indici (vedi § 6). Si può quindi scrivere la (26,5) nella forma

$$e^{iklm}\frac{\partial F_{lm}}{\partial x^k} = 0, \tag{26,6}$$

la quale esprime chiaramente il fatto che ci sono in tutto soltanto quattro equazioni indipendenti.

§ 27. *L'azione per il campo elettromagnetico*

L'azione S per un sistema composto di un campo elettromagnetico e delle particelle che in esso si trovano deve essere costituita da tre parti:

$$S = S_f + S_m + S_{mf}. \tag{27,1}$$

S_m è la parte dell'azione che dipende solamente dalle proprietà delle particelle, cioè essa è l'azione per le particelle libere. L'azione per una sola particella libera è data dalla formula (8,1). Se si hanno piú particelle, la loro azione totale sarà uguale alla somma delle azioni di ciascuna particella. Quindi avremo:

$$S_m = -\sum mc \int ds. \tag{27,2}$$

S_{mf} è la parte dell'azione dovuta all'interazione delle particelle con il campo. Secondo quanto detto al § 16, per un sistema di particelle abbiamo:

$$S_{mf} = -\sum \frac{e}{c} \int A_k \, dx^k. \tag{27,3}$$

In ciascun termine di questa somma, A_k rappresenta il potenziale del campo all'istante t e nel punto dello spazio in cui si trova la particella corrispondente. La somma $S_m + S_{mf}$ è l'azione per cariche in un campo (16,1) che già conosciamo.

Infine, S_f è la parte dell'azione che dipende esclusivamente dalle proprietà del campo stesso, cioè S_f è l'azione per il campo in assenza di cariche. Finché ci interessavamo solamente al moto delle cariche in un campo elettromagnetico dato, abbiamo trascurato S_f, che non dipende dalle particelle, poiché questo termine non può influire sulle equazioni del moto delle particelle. Esso diventa però indispensabile se vogliamo trovare le equazioni che determinino il campo stesso. Per questo motivo dalla parte d'azione $S_m + S_{mf}$ abbiamo ricavato solo due equazioni (26,1) e (26,2), ancora insufficienti per determinare completamente il campo.

Per stabilire la forma dell'azione del campo S_f, partiremo dalla seguente proprietà, assai importante, dei campi elettromagnetici. Come l'esperienza dimostra, il campo elettromagnetico obbedisce al cosiddetto *principio di sovrapposizione*: il campo generato da un sistema di cariche è la somma dei campi generati separatamente da ciascuna delle cariche. Ciò significa che i vettori campo elettrico e campo magnetico del campo risultante sono uguali in ogni punto alla somma (vettoriale) dei vettori campo elettrico e campo magnetico di ciascuno dei campi considerati.

Ogni soluzione delle equazioni del campo è un campo che può essere realizzato in natura. In virtú del principio di sovrapposizio-

ne, la somma di due campi di questo tipo deve essere anch'essa un campo realizzabile in natura, cioè deve soddisfare le equazioni del campo.

Come è noto, le equazioni differenziali lineari sono contraddistinte appunto dalla proprietà che la somma di due loro soluzioni è ancora soluzione. Di conseguenza, le equazioni di un campo debbono essere equazioni differenziali lineari.

Da quanto detto risulta che sotto il segno d'integrazione dell'azione S_f si deve avere un'espressione quadratica rispetto al campo. Soltanto in questo caso le equazioni del campo saranno lineari (le equazioni del campo si ottengono variando l'azione, abbassando quindi il grado dell'espressione integranda di un'unità).

Dell'espressione per l'azione S_f non possono far parte i potenziali del campo in quanto non sono definiti univocamente (questa non univocità non era sostanziale in S_{mf}). Dunque, S_f deve essere l'integrale di una funzione del tensore elettromagnetico F_{ik}. L'azione deve però essere uno scalare e, di conseguenza, l'integrale di un certo scalare, che può essere soltanto il prodotto $F_{ik}F^{ik}$[1]).

S_f deve quindi avere la forma

$$S_f = a \int\int F_{ik}F^{ik}\, dV\, dt, \quad dV = dx\, dy\, dz,$$

dove l'integrale è preso in tutto lo spazio rispetto alle coordinate, e tra due istanti dati rispetto al tempo; a è una costante arbitraria. Sotto il segno d'integrazione abbiamo l'espressione $F_{ik}F^{ik} = 2\,(H^2 - E^2)$. Il campo **E** contiene la derivata $\partial \mathbf{A}/\partial t$. È facile però vedere che $(\partial \mathbf{A}/\partial t)^2$ deve comparire nell'azione con il segno positivo (per questo anche E^2 avrà il segno positivo). Infatti, se $(\partial \mathbf{A}/\partial t)^2$ entrasse in S_f con il segno negativo, si potrebbe sempre, facendo variare abbastanza velocemente il potenziale con il tempo (nell'intervallo di tempo considerato), rendere S_f negativa con un valore assoluto arbitrariamente grande; S_f non potrebbe quindi avere un minimo, come lo esige il principio di minima azione. Dunque, a deve essere negativo.

---

[1]) La funzione integranda in S_f non deve contenere derivate di F_{ik}, perché nella funzione di Lagrange, oltre alle coordinate del sistema, possono entrare soltanto le loro derivate prime rispetto al tempo, mentre il ruolo di « coordinate » (cioè di variabili rispetto alle quali si fa la variazione nel principio di minima azione) è svolto, in questo caso, dai potenziali del campo A_k; questo è analogo a quanto avviene in meccanica, dove la funzione di Lagrange per un sistema meccanico contiene solamente le coordinate delle particelle e le loro derivate prime rispetto al tempo.

Quanto alla grandezza $e^{iklm}\, F_{ik}F_{lm}$ (§ 25), essa rappresenta (come è stato detto nella nota alla pag. 92) una divergenza quadridimensionale totale e, di conseguenza, la sua aggiunta all'espressione integranda in S_f non influirebbe sulle « equazioni del moto ». È interessante notare che questa grandezza viene esclusa dall'azione, a prescindere dal fatto che essa non è un vero scalare, bensí uno pseudoscalare.

Il valore numerico di a dipende dalla scelta delle unità di misura del campo. Notiamo che, scelto un determinato valore di a, nonché le unità di misura del campo, vengono determinate anche le unità di misura di tutte le altre grandezze elettromagnetiche.

In seguito ci serviremo del *sistema di unità di Gauss*; in questo sistema, a è una grandezza adimensionale, uguale a $-1/16\pi$[1]).

Quindi, l'azione per il campo assume la forma

$$S_f = -\frac{1}{16\pi c}\int F_{ik}F^{ik}\,d\Omega, \quad d\Omega = c\,dt\,dx\,dy\,dz, \tag{27,4}$$

oppure in forma tridimensionale:

$$S_f = \frac{1}{8\pi}\int\int (E^2 - H^2)\,dV\,dt. \tag{27,5}$$

In altri termini, la lagrangiana per il campo elettromagnetico è

$$L_f = \frac{1}{8\pi}\int (E^2 - H^2)\,dV. \tag{27,6}$$

L'azione per un campo contenente cariche è:

$$S = -\sum\int mc\,ds - \sum\int \frac{e}{c}A_k\,dx^k - \frac{1}{16\pi c}\int F_{ik}F^{ik}\,d\Omega. \tag{27,7}$$

Sottolineiamo che ora le cariche non sono affatto considerate piccole, come abbiamo fatto nel dedurre le equazioni del moto di una carica in un campo. Per questo A_k ed F_{ik} si riferiscono ad un vero campo, cioè al campo esterno al quale è aggiunto il campo generato dalle cariche stesse; A_k ed F_{ik} dipendono ora dalla posizione e dalla velocità delle cariche.

§ 28. *Quadricorrente*

Per ragioni di comodità matematica, invece di considerare le cariche come puntiformi, si suppone spesso che la carica sia distribuita nello spazio in modo continuo. Si può allora introdurre il concetto di *densità di carica* ρ in maniera tale che ρdV sia la carica localizzata nel volume dV; in generale, ρ è una funzione delle coordinate e del tempo. L'integrale di ρ in un certo volume è la carica che si trova in questo volume.

---

[1]) Oltre al sistema d'unità di Gauss, esiste anche il cosiddetto sistema di Heaviside nel quale $a = -1/4$. In questo sistema d'unità le equazioni del campo assumono una forma piú comoda (esse non contengono piú 4π), ma, in compenso, 4π entra nella legge di Coulomb. Al contrario, nel sistema d'unità di Gauss le equazioni del campo contengono 4π, e la legge di Coulomb ha una forma semplice.

Detto questo, è però necessario ricordare che le cariche sono in realtà puntiformi, cosicché la densità ρ è nulla dappertutto, tranne che nei punti dove sono localizzate queste cariche, e l'integrale $\int \rho dV$ deve essere uguale alla somma delle cariche contenute nel volume dato. Si può dunque esprimere ρ mediante la funzione δ[1]) nella seguente forma:

$$\rho = \sum_a e_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a), \tag{28,1}$$

dove la sommatoria è estesa a tutte le cariche presenti ed $\mathbf{r}_a$ è il raggio vettore della carica e_a.

La carica di una particella è, per definizione stessa, una grandezza invariante, cioè non dipendente dalla scelta del sistema di

[1]) La funzione $\delta(x)$ è definita come segue: $\delta(x) = 0$ per tutti gli x non nulli; per $x = 0$, $\delta(0) = \infty$ e quindi l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, dx = 1. \tag{1}$$

Da questa definizione derivano le seguenti proprietà: se $f(x)$ è una funzione continua arbitraria, si ha:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \delta(x-a)\, dx = f(a); \tag{2}$$

in particolare,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \delta(x)\, dx = f(0) \tag{3}$$

(s'intende che gli estremi d'integrazione non debbono essere necessariamente $\pm\infty$; si potrà prendere per regione d'integrazione una regione qualsiasi che contiene il punto nel quale la funzione δ non si annulla).

Il senso delle uguaglianze che seguono è che i loro due membri danno lo stesso risultato se presi come fattori sotto il segno d'integrazione:

$$\delta(-x) = \delta(x), \quad \delta(ax) = \frac{1}{|a|}\, \delta(x). \tag{4}$$

L'ultima uguaglianza è un caso particolare della relazione piú generale

$$\delta[\varphi(x)] = \sum_i \frac{1}{|\varphi'(a_i)|}\, \delta(x - a_i), \tag{5}$$

dove $\varphi(x)$ è una funzione monodroma (la sua funzione inversa non deve essere necessariamente monodroma), e a_i sono le radici dell'equazione $\varphi(x) = 0$.

Analogamente alla determinazione di $\delta(x)$ per una sola variabile x, si può introdurre una funzione δ tridimensionale: $\delta(\mathbf{r})$, nulla dappertutto, tranne che nell'origine del sistema di coordinate tridimensionale, e il cui integrale esteso a tutto lo spazio è uguale ad 1. Si può evidentemente rappresentare questa funzione come prodotto $\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z)$.

riferimento. Al contrario, la densità ρ non è un invariante; soltanto il prodotto ρdV è invariante.

Moltiplicando ambedue i membri dell'uguaglianza $de = \rho dV$ per dx^i otteniamo:

$$de\, dx^i = \rho\, dV\, dx^i = \rho\, dV\, dt \frac{dx^i}{dt}.$$

A primo membro abbiamo un quadrivettore (essendo de uno scalare e dx^i un quadrivettore). Ciò vuol dire che anche a secondo membro deve essere un quadrivettore. Ma $dV\, dt$ è uno scalare e, di conseguenza, $\rho \frac{dx^i}{dt}$ è un quadrivettore. Questo vettore (che indicheremo con j^i) è detto quadrivettore *densità di corrente*:

$$j^i = \rho \frac{dx^i}{dt}. \tag{28,2}$$

Le sue tre componenti spaziali costituiscono la densità tridimensionale di corrente

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}, \tag{28,3}$$

dove $\mathbf{v}$ è la velocità della carica nel punto dato. La componente temporale del quadrivettore (28,2) è $c\rho$. Quindi:

$$j^i = (c\rho,\ \mathbf{j}). \tag{28,4}$$

La carica totale racchiusa in tutto il volume è uguale all'integrale $\int \rho dV$ esteso appunto a tutto il volume. Scrivendo questo integrale in forma quadridimensionale abbiamo:

$$\int \rho\, dV = \frac{1}{c} \int j^0\, dV = \frac{1}{c} \int j^i\, dS_i, \tag{28,5}$$

dove l'integrazione va estesa a tutto l'iperpiano quadridimensionale, perpendicolare all'asse x^0 (una tale integrazione significa, evidentemente, un'integrazione estesa a tutto lo spazio tridimensionale). In generale, l'integrale $\frac{1}{c}\int j^i dS_i$ preso su qualsiasi ipersuperficie è la somma delle cariche le cui linee di universo intersecano questa ipersuperficie.

Introduciamo la quadricorrente nell'espressione (27,7) dell'azione e trasformiamone il secondo termine. Sostituendo alle cariche puntiformi la distribuzione continua di densità ρ, scriviamo questo termine nella forma

$$-\frac{1}{c} \int \rho A_i\, dx^i\, dV,$$

dove la sommatoria estesa a tutte le cariche è stata sostituita da un'integrale esteso a tutto il volume. Riscrivendo questo termine

nella forma

$$-\frac{1}{c}\int \rho \frac{dx^i}{dt} A_i \, dV \, dt,$$

vediamo che esso è uguale a

$$-\frac{1}{c^2}\int A_i j^i \, d\Omega.$$

L'azione S assume quindi la forma

$$S = -\sum \int mc \, ds - \frac{1}{c^2}\int A_i j^i \, d\Omega - \frac{1}{16\pi c}\int F_{ik}F^{ik} \, d\Omega. \qquad (28,6)$$

§ 29. *Equazione di continuità*

La variazione col tempo di una carica contenuta in un volume è data dalla derivata

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho \, dV.$$

D'altra parte, la variazione nell'unità di tempo è data dalla quantità di carica che in questo intervallo di tempo esce o entra nel volume dato. La quantità di carica passante nell'unità di tempo per l'elemento di superficie $d\mathbf{f}$, che limita il volume dato, è uguale a $\rho\mathbf{v}\, d\mathbf{f}$, dove $\mathbf{v}$ è la velocità della carica nel punto dello spazio nel quale si trova l'elemento $d\mathbf{f}$. Il vettore $d\mathbf{f}$ è diretto, secondo una convenzione comunemente adottata, lungo la normale esterna alla superficie, cioè lungo la normale diretta verso l'esterno del volume considerato. Quindi $\rho\mathbf{v}d\mathbf{f}$ è positiva se la carica esce dal volume considerato, e negativa se essa vi entra. La quantità totale di carica uscita nell'unità di tempo dal volume dato è quindi $\oint \rho\mathbf{v}d\mathbf{f}$, dove l'integrale è preso su tutta la superficie chiusa che delimita questo volume.

Confrontando le due espressioni ottenute abbiamo:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho \, dV = -\oint \rho\mathbf{v} \, d\mathbf{f}. \qquad (29,1)$$

Il secondo membro ha il segno negativo essendo il primo membro positivo allorché la carica totale aumenta nel volume dato. L'equazione (29,1), esprimente la legge di conservazione della carica, è detta *equazione di continuità*, scritta in forma integrale. Notando che $\rho\mathbf{v}$ è la densità di corrente, si può riscrivere l'equazione (29,1) nella forma

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho \, dV = -\oint \mathbf{j} \, d\mathbf{f}. \qquad (29,2)$$

Scriviamo ora questa equazione sotto forma differenziale. Applicando il teorema di Gauss

$$\int \mathbf{j}\, d\mathbf{f} = \int \operatorname{div} \mathbf{j}\, dV$$

al secondo membro dell'equazione (29,2), troviamo:

$$\int \left(\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV = 0.$$

Poiché questa uguaglianza deve valere, qualunque sia il volume d'integrazione, l'espressione integranda deve essere nulla:

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \tag{29,3}$$

Questa è l'equazione di continuità in forma differenziale.

È facile vedere che l'espressione (28,1), dove ρ ha la forma di una funzione δ, soddisfa automaticamente l'equazione (29,3). Per ragioni di semplicità, supponiamo che ci sia una sola carica, cioè

$$\rho = e\, \delta\, (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0).$$

La corrente è allora

$$\mathbf{j} = e\mathbf{v}\, \delta\, (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0),$$

dove $\mathbf{v}$ è la velocità della carica. Cerchiamo la derivata $\partial\rho/\partial t$. Poiché quando la carica è in moto le sue coordinate cambiano, cioè cambia $\mathbf{r}_0$, abbiamo:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{r}_0} \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial t},$$

dove $d\mathbf{r}_0/dt$ non è altro che la velocità $\mathbf{v}$ della carica. Essendo poi ρ una funzione di $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$, abbiamo:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{r}_0} = -\frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{r}},$$

e quindi

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\mathbf{v} \operatorname{grad} \rho = -\operatorname{div} \rho \mathbf{v}$$

(la velocità $\mathbf{v}$ della carica non dipende, naturalmente, da $\mathbf{r}$). Ritroviamo quindi l'equazione (29,3).

In forma quadridimensionale, l'equazione di continuità (29,3) si esprime annullando la divergenza quadridimensionale della quadricorrente:

$$\frac{\partial j^i}{\partial x^i} = 0. \tag{29,4}$$

Abbiamo visto nel paragrafo precedente che la carica contenuta in tutto lo spazio puó essere scritta nella forma

$$\frac{1}{c} \int j^i\, dS_i,$$

dove l'integrazione va estesa a un iperpiano x^0=costante. In un altro istante, la carica totale sarà rappresentata dallo stesso integrale, ma preso su un altro iperpiano perpendicolare all'asse x^0. È facile provare che l'equazione (29,4) conduce effettivamente alla legge di conservazione della carica, cioè che l'integrale $\int j^i dS_i$ è lo stesso, qualunque sia l'iperpiano d'integrazione x^0 = costante. La differenza tra due integrali $\int j^i dS_i$, presi su due iperpiani di questo genere, può essere scritta nella forma $\oint j^i dS_i$, dove l'integrale è esteso a tutta l'ipersuperficie chiusa che limita un volume quadridimensionale tra i due iperpiani considerati (questo integrale si distingue dalla differenza cercata per un integrale esteso all'ipersuperficie « laterale » indefinitamente distante, che però è nullo, perché all'infinito non ci sono cariche). Servendoci del teorema di Gauss (6,15), possiamo trasformare questo integrale in un integrale quadridimensionale di volume preso nello spazio compreso tra i due iperpiani:

$$\int j^i \, dS_i = \int \frac{\partial j^i}{\partial x^i} \, d\Omega = 0, \tag{29,5}$$

c.d.d.

La dimostrazione riportata resta evidentemente valida anche per due integrali $\int j^i dS_i$ estesi a due ipersuperfici infinite arbitrarie (e non solo ad iperpiani x^0 = costante) che racchiudono in sé tutto lo spazio (tridimensionale). Ne segue che l'integrale $\frac{1}{c}\int j^i dS_i$ ha veramente lo stesso valore (uguale alla carica totale contenuta nello spazio), qualunque sia l'ipersuperficie d'integrazione.

Abbiamo già notato (vedi la nota alla pag. 76) lo stretto legame esistente tra l'invarianza di gauge delle equazioni dell'elettrodinamica e la legge di conservazione della carica. Verifichiamo ancora una volta questo legame sull'espressione dell'azione nella forma (28,6). Sostituendo A_i con $A_i - \frac{\partial f}{\partial x^i}$, al secondo termine di questa espressione si aggiungerà l'integrale

$$\frac{1}{c^2} \int j^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \, d\Omega.$$

La conservazione della carica, espressa dall'equazione di continuità (29,4), ci permette di scrivere l'espressione integranda sotto forma di divergenza quadridimensionale $\frac{\partial}{\partial x^i}(fj^i)$; quindi, in virtú del teorema di Gauss, l'integrale quadridimensionale di volume si trasforma in un integrale esteso all'ipersuperficie di frontiera; variando l'azione, questi integrali danno un contributo nullo e, di conseguenza, non influiscono sulle equazioni del moto.

§ 30. *Seconda coppia delle equazioni di Maxwell*

Per ricavare le equazioni del campo a partire dal principio di minima azione, dobbiamo considerare dato il moto delle cariche e dobbiamo far variare soltanto i potenziali del campo (che hanno qui il ruolo di « coordinate » del sistema); al contrario, nel ricavare le equazioni del moto abbiamo supposto dato il campo e abbiamo fatto variare la traiettoria della particella.

Di conseguenza, la variazione del primo termine nella (28,6) è nulla, e la corrente j^i nel secondo termine non deve variare. Quindi:

$$\delta S = -\frac{1}{c}\int\left[\frac{1}{c}\,j^i\delta A_i + \frac{1}{8\pi}\,F^{ik}\delta F_{ik}\right]d\Omega = 0$$

(per la variazione nel secondo termine si tenga presente che $F^{ik}\delta F_{ik} \equiv F_{ik}\delta F^{ik}$).

Sostituendo

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k},$$

abbiamo:

$$\delta S = -\frac{1}{c}\int\left\{\frac{1}{c}\,j^i\delta A_i + \frac{1}{8\pi}\,F^{ik}\,\frac{\partial}{\partial x^i}\,\delta A_k - \frac{1}{8\pi}\,F^{ik}\,\frac{\partial}{\partial x^k}\,\delta A_i\right\}d\Omega.$$

Permutando nel secondo termine gli indici di sommatoria i e k e sostituendo inoltre F_{ki} con $-F_{ik}$, otteniamo:

$$\delta S = -\frac{1}{c}\int\left\{\frac{1}{c}\,j^i\delta A_i - \frac{1}{4\pi}\,F^{ik}\,\frac{\partial}{\partial x^k}\,\delta A_i\right\}d\Omega.$$

Integrando per parti il secondo di questi integrali, applicando cioè il teorema di Gauss, otteniamo:

$$\delta S = -\frac{1}{c}\int\left\{\frac{1}{c}\,j^i + \frac{1}{4\pi}\,\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k}\right\}\delta A_i\,d\Omega - \frac{1}{4\pi c}\int F^{ik}\delta A_i\,dS_k\,|. \qquad (30,1)$$

L'integrale del secondo termine va preso agli estremi d'integrazione. Gli estremi d'integrazione rispetto alle coordinate sono all'infinito dove il campo si annulla. Agli estremi d'integrazione temporali, cioè negli istanti dati iniziale e finale, la variazione dei potenziali è nulla perché, in virtú del principio di minima azione, i potenziali sono in questi istanti fissati. Il secondo termine della (30,1) è quindi nullo, e troviamo:

$$\int\left(\frac{1}{c}\,j^i + \frac{1}{4\pi}\,\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k}\right)\delta A_i\,d\Omega = 0.$$

Siccome, in virtú del principio di minima azione, le variazioni di δA_i sono arbitrarie, il coefficiente di δA_i deve essere nullo, cioè

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c}\,j^i. \qquad (30,2)$$

Scriviamo queste quattro equazioni ($i = 0, 1, 2, 3$) in forma tridimensionale. Per $i = 1$, abbiamo:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial F^{10}}{\partial t} + \frac{\partial F^{11}}{\partial x} + \frac{\partial F^{12}}{\partial y} + \frac{\partial F^{13}}{\partial z} = -\frac{4\pi}{c} j^1.$$

Sostituendo i valori delle componenti del tensore F^{ik}, troviamo:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} - \frac{\partial H_z}{\partial y} + \frac{\partial H_y}{\partial z} = -\frac{4\pi}{c} j_x.$$

Queste equazioni e le due seguenti ($i = 2, 3$) si possono scrivere come una sola equazione vettoriale:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}. \tag{30,3}$$

Infine, l'equazione con $i = 0$ ci dà:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho. \tag{30,4}$$

Le equazioni (30,3) e (30,4) costituiscono la seconda coppia di equazioni di Maxwell[1]. Insieme a quelle della prima coppia, esse determinano completamente il campo elettromagnetico e sono le equazioni fondamentali della teoria di questi campi, ossia dell'*elettrodinamica*.

Scriviamo ora queste equazioni in forma integrale. Integrando la (30,4) in un certo volume ed applicando il teorema di Gauss

$$\int \operatorname{div} \mathbf{E}\, dV = \oint \mathbf{E}\, d\mathbf{f},$$

troviamo:

$$\oint \mathbf{E}\, d\mathbf{f} = 4\pi \int \rho\, dV. \tag{30,5}$$

In tal modo, il flusso del campo elettrico attraverso una superficie chiusa è uguale al prodotto per 4π della carica totale contenuta nel volume limitato da questa superficie.

Integrando la (30,3) su una superficie non chiusa ed applicando il teorema di Stokes

$$\int \operatorname{rot}\mathbf{H}\, d\mathbf{f} = \oint \mathbf{H}\, d\mathbf{l},$$

troviamo:

$$\oint \mathbf{H}\, d\mathbf{l} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{E}\, d\mathbf{f} + \frac{4\pi}{c}\int \mathbf{j}\, d\mathbf{f}. \tag{30,6}$$

La grandezza

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{30,7}$$

---

[1]) Le equazioni di Maxwell nel caso di un campo elettromagnetico nel vuoto creato da cariche puntiformi sono state formulate da *H. A. Lorentz*.

è detta *corrente di spostamento*. Dalla (30,6) scritta nella forma

$$\oint \mathbf{H}\, d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \int \left(\mathbf{j} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) \cdot d\mathbf{f} \tag{30,8}$$

si vede che la circuitazione del campo magnetico lungo una curva chiusa è uguale al prodotto per $4\pi/c$ della somma della corrente reale e della corrente di spostamento che attraversano una superficie limitata dalla curva in questione.

Le equazioni di Maxwell ci permettono di riottenere l'equazione di continuità (29,3), che già conosciamo. Prendendo la divergenza di ambedue i membri della (30,3), troviamo:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{E} + \frac{4\pi}{c} \operatorname{div} \mathbf{j}.$$

In base alla (30,4), div rot $\mathbf{H} \equiv 0$ e $\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho$. Quindi, ritroviamo l'equazione (29,3). Dalla (30,2) ricaviamo in forma quadridimensionale:

$$\frac{\partial^2 F^{ik}}{\partial x^i\, \partial x^k} = -\frac{4\pi}{c}\frac{\partial j^i}{\partial x^i}.$$

L'operatore $\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial k^k}$, simmetrico rispetto agli indici i, k, agendo sul tensore antisimmetrico F^{ik}, lo annulla identicamente, e ritroviamo quindi l'equazione di continuità (29,4) scritta in forma quadridimensionale.

§ 31. *Densità e flusso di energia*

Moltiplichiamo i due membri dell'equazione (30,3) per **E**, ed i due membri dell'equazione (26,1) per **H** e facciamo la somma delle equazioni ottenute membro a membro:

$$\frac{1}{c}\mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{c}\mathbf{H}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{jE} - (\mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H}).$$

Utilizzando la nota formula dell'analisi vettoriale

$$\operatorname{div} [\mathbf{ab}] = \mathbf{b} \operatorname{rot} \mathbf{a} - \mathbf{a} \operatorname{rot} \mathbf{b},$$

scriviamo la relazione precedente nella forma

$$\frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}(E^2 + H^2) = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{jE} - \operatorname{div}[\mathbf{EH}],$$

oppure

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{E^2 + H^2}{8\pi} = -\mathbf{jE} - \operatorname{div} \mathbf{S}. \tag{31,1}$$

Il vettore

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{EH}] \tag{31,2}$$

è detto *vettore di Poynting*.

Integrando la (31,1) in un certo volume ed applicando al secondo termine nel secondo membro il teorema di Gauss, otterremo:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \frac{E^2+H^2}{8\pi}\,dV = -\int \mathbf{jE}\,dV - \int \mathbf{S}\,d\mathbf{f}. \tag{31,3}$$

Se l'integrazione è estesa a tutto lo spazio, l'integrale di superficie scompare (il campo è nullo all'infinito). Possiamo inoltre scrivere l'integrale $\int \mathbf{jE}\,dV$ come la somma $\sum e\mathbf{vE}$ estesa a tutte le cariche che si trovano nel campo, e sostituire secondo la (17,7)

$$e\mathbf{vE} = \frac{d}{dt}\mathscr{E}_{\text{cin}}.$$

Allora, la (31,3) diventa

$$\frac{d}{dt}\left\{\int \frac{E^2+H^2}{8\pi}\,dV + \sum \mathscr{E}_{\text{cin}}\right\} = 0. \tag{31,4}$$

Ne segue che, per un sistema chiuso composto di un campo elettromagnetico e delle cariche che vi si trovano, la grandezza compresa tra parentesi si conserva. Il secondo termine di questa espressione è l'energia cinetica (con l'energia di riposo di tutte le particelle; vedi la nota alla pag. 73); il primo termine è quindi l'energia del campo elettromagnetico stesso. Possiamo dunque chiamare la grandezza

$$W = \frac{E^2+H^2}{8\pi} \tag{31,5}$$

densità d'energia del campo elettromagnetico, cioè l'energia per unità di volume del campo.

Poiché integrando in un volume finito, l'integrale di superficie nella (31,3) generalmente non scompare, possiamo scrivere questa equazione nella forma

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int \frac{E^2+H^2}{8\pi}\,dV + \sum \mathscr{E}_{\text{cin}}\right\} = -\oint \mathbf{S}\,d\mathbf{f}, \tag{31,6}$$

dove ora la sommatoria del secondo termine a primo membro è estesa solo alle particelle che si trovano nel volume considerato. A primo membro si ha la variazione nell'unità di tempo dell'energia totale del campo e delle particelle. L'integrale $\int \mathbf{S}\,d\mathbf{f}$ rappresenta quindi il flusso d'energia del campo attraverso la superficie che limita il

volume dato, e quindi il vettore di Poynting S è la densità di questo flusso, ossia la quantità d'energia del campo che può attraversare l'unità di superficie nell'unità di tempo[1]).

§ 32. *Tensore energia-impulso*

Nel paragrafo precedente abbiamo trovato l'espressione per l'energia del campo elettromagnetico. Cerchiamo ora la sua espressione insieme a quella dell'impulso del campo, in forma quadridimensionale. Per semplicità, considereremo per il momento un campo elettromagnetico senza cariche. Avendo in vista le successive applicazioni (ai campi gravitazionali) e per semplificare i calcoli, opereremo nel caso generale, senza concretizzare un sistema specifico.

Consideriamo un sistema il cui integrale d'azione ha la forma

$$S = \int \Lambda \left(q, \frac{\partial q}{\partial x^i}\right) dV\, dt = \frac{1}{c} \int \Lambda\, d\Omega, \tag{32,1}$$

dove Λ è una certa funzione delle grandezze q che determinano lo stato del sistema e delle loro derivate rispetto alle coordinate e al tempo (per il campo elettromagnetico le grandezze q sono le componenti del potenziale quadridimensionale); per brevità scriveremo qui una sola q. Notiamo che l'integrale $\int \Lambda\, dV$ è la lagrangiana del sistema, e quindi Λ può essere considerata la « densità » della lagrangiana. L'espressione matematica del fatto che un sistema sia chiuso è l'assenza di una dipendenza esplicita di Λ da x^i, cosí come la lagrangiana per un sistema meccanico isolato non dipende esplicitamente dal tempo.

Le « equazioni del moto » (cioè le equazioni del campo, se si tratta di un campo qualsiasi), si ottengono dal principio di minima azione, facendo variare S. Ponendo per ragioni di brevità $q_{,i} \equiv \partial q/\partial x^i$, abbiamo:

$$\delta S = \frac{1}{c} \int \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q}\, \delta q + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,i}}\, \delta q_{,i}\right) d\Omega =$$
$$= \frac{1}{c} \int \left[\frac{\partial \Lambda}{\partial q}\, \delta q + \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,i}}\, \delta q\right) - \delta q\, \frac{\partial}{\partial x^i}\, \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,i}}\right] d\Omega = 0.$$

Applicando il teorema di Gauss, il secondo termine dell'espressione integranda si annulla quando l'integrazione è estesa a tutto lo

---

[1]) Si suppone che nell'istante dato sulla superficie che limita il volume considerato non ci siano particelle. In caso contrario il secondo membro dell'uguaglianza dovrebbe contenere anche il flusso d'energia trasportata dalle particelle che attraversano la superficie.

spazio, e troviamo allora le seguenti « equazioni del moto »:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,i}} - \frac{\partial \Lambda}{\partial q} = 0 \tag{32,2}$$

(naturalmente la sommatoria è estesa ovunque all'indice i ripetuto due volte).

Si procede poi come in meccanica quando si vuole ricavare la legge di conservazione dell'energia. Piú precisamente:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x^i} = \frac{\partial \Lambda}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x^i} + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}}\frac{\partial q_{,k}}{\partial x^i}.$$

Sostituendovi la (32,2) e notando che $q_{,k,i} = q_{,i,k}$, troviamo:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}}\right) q_{,i} + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}}\frac{\partial q_{,i}}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k}\left(q_{,i}\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}}\right).$$

Sostituendo nel primo membro dell'uguaglianza

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x^i} = \delta_i^k \frac{\partial \Lambda}{\partial x^k}$$

e ponendo

$$T_i^k = q_{,i}\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}} - \delta_i^k \Lambda, \tag{32,3}$$

scriviamo la relazione ottenuta nella forma

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = 0. \tag{32,4}$$

Notiamo che se ci sono piú grandezze $q^{(l)}$, in luogo della (32,3) bisogna evidentemente scrivere

$$T_i^k = \sum_l q_{,i}^{(l)}\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}^{(l)}} - \delta_i^k \Lambda. \tag{32,5}$$

Nel § 29 abbiamo visto che l'equazione tipo $\partial A^k/\partial x^k = 0$, cioè l'annullamento della divergenza quadridimensionale di un vettore è equivalente all'affermazione che l'integrale $\int A^k dS_k$ di questo vettore su una ipersuperficie, che racchiude in sé tutto lo spazio tridimensionale, si conserva. È evidente che un'affermazione analoga è valida anche per un tensore: l'equazione (32,4) è equivalente all'affermazione che il vettore

$$P^i = \text{costante} \int T^{ik}\, dS_k$$

si conserva.

Questo è il vettore che deve essere identificato con il 4-impulso del sistema. Scegliamo il fattore costante davanti all'integrale in maniera tale che, in accordo con la definizione precedente, la

componente temporale di P^0 sia uguale all'energia del sistema divisa per c. A tale scopo notiamo che integrando sull'iperpiano x^0 = costante si ottiene:

$$P^0 = \text{costante} \int T^{0k}\, dS_k = \text{costante} \int T^{00}\, dV.$$

D'altra parte, in virtú delle (32,3), abbiamo:

$$T^{00} = \dot{q}\frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}} - \Lambda$$

(dove $\dot{q} \equiv \partial q/\partial t$). In base alla formula ordinaria che lega l'energia alla lagrangiana, bisogna considerare questa grandezza come la densità dell'energia, e, di conseguenza, $\int T^{00} dV$ è l'energia totale del sistema. Ponendo la costante uguale a $1/c$, otteniamo in definitiva per il 4-impulso del sistema l'espressione

$$P^i = \frac{1}{c} \int T^{ik}\, dS_k. \tag{32,6}$$

Il tensore T^{ik} è detto *tensore energia-impulso* del sistema.

È necessario notare che la definizione del tensore T^{ik} non è effettivamente univoca. Infatti, se T^{ik} è un tensore definito secondo la (32,3), anche qualsiasi altro tensore della forma

$$T^{ik} + \frac{\partial}{\partial x^l}\psi^{ikl}, \quad \psi^{ikl} = -\psi^{ilk} \tag{32,7}$$

soddisfa l'equazione di conservazione (32,4), essendo la granzezza $\frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^l}\psi^{ikl}$, dove ψ^{ikl} è un tensore antisimmetrico rispetto agli indici k, l, identicamente nulla. La sostituzione (32,7) non cambia il 4-impulso totale del sistema perché, in virtú della (6,17), si ha:

$$\int \frac{\partial \psi^{ikl}}{\partial x^l}\, dS_k = \frac{1}{2}\int \left(dS_k \frac{\partial \psi^{ikl}}{\partial x^l} - dS_l \frac{\partial \psi^{ikl}}{\partial x^k} \right) = \frac{1}{2}\int \psi^{ikl}\, df^*_{kl},$$

dove l'integrale del secondo membro di questa uguaglianza è esteso alla superficie (ordinaria) che avvolge l'ipersuperficie alla quale è esteso l'integrale del primo membro. Questa superficie si trova evidentemente all'infinito dello spazio tridimensionale, e siccome all'infinito non esistono né campi, né particelle, l'integtale è nullo. Ne risulta dunque, come doveva essere, che il 4-impulso è una grandezza definita univocamente.

Per definire univocamente il tensore T^{ik} si può imporre la condizione che il 4-tensore momento angolare (vedi § 14) si esprima in funzione del 4-impulso mediante

$$M^{ik} = \int (x^i\, dP^k - x^k\, dP^i) = \frac{1}{c}\int (x^i T^{kl} - x^k T^{il})\, dS_l, \tag{32,8}$$

cioè che la sua densità si esprima mediante la densità dell'impulso per mezzo della formula usuale.

È facile determinare la condizione alla quale deve soddisfare a tale scopo il tensore energia-impulso. Come già sappiamo, la legge di conservazione del momento angolare può essere espressa annullando la divergenza nell'espressione integranda di M^{ik}. Quindi:

$$\frac{\partial}{\partial x^l}(x^i T^{kl} - x^k T^{il}) = 0. \tag{32,9}$$

Notando che $\partial x^i/\partial x^l = \delta^i_l$ e $\partial T^{kl}/\partial x^l = 0$, troviamo:

$$\delta^i_l T^{kl} - \delta^k_l T^{il} = T^{ki} - T^{ik} = 0,$$

oppure

$$T^{ik} = T^{ki}, \tag{32,10}$$

cioè il tensore energia-impulso deve essere simmetrico.

Osserviamo che il tensore T^{ik} definito dalla formula (32,5) non è generalmente simmetrico, ma lo si può simmetrizzare inserendo nella (32,7) un ψ^{ikl} scelto in modo adeguato. Piú avanti (§ 94), vedremo che esiste un procedimento che permette di ottenere direttamente un tensore T^{ik} simmetrico.

Come abbiamo già notato, integrando nella (32,6) sull'iperpiano x^0 = costante, P^i assume allora la forma

$$P^i = \frac{1}{c}\int T^{i0}\,dV, \tag{32,11}$$

dove l'integrazione è estesa a tutto lo spazio (tridimensionale). Le componenti spaziali di P^i formano il vettore impulso tridimensionale del sistema, e la componente temporale rappresenta la sua energia divisa per c. Il vettore con componenti

$$\frac{1}{c}T^{10},\quad \frac{1}{c}T^{20},\quad \frac{1}{c}T^{30}$$

si può chiamare *densità d'impulso*, e la grandezza

$$W = T^{00}$$

si può considerare come *densità di energia*.

Per precisare il senso delle altre componenti di T^{ik}, scriviamo le equazioni di conservazione (32,4), separando le derivate spaziali da quelle temporali:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial T^{00}}{\partial t} + \frac{\partial T^{0\alpha}}{\partial x^\alpha} = 0,\quad \frac{1}{c}\frac{\partial T^{\alpha 0}}{\partial t} + \frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 0. \tag{32,12}$$

Integrando queste equazioni in un certo volume V dello spazio, la prima ci dà:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int T^{00}\,dV + \int \frac{\partial T^{0\alpha}}{\partial x^\alpha}\,dV = 0,$$

o, trasformando il secondo integrale per mezzo del teorema (tridimensionale) di Gauss,

$$\frac{\partial}{\partial t}\int T^{00}\,dV = -c\int T^{0\alpha}\,df_\alpha, \tag{32,13}$$

dove l'integrale a secondo membro è esteso alla superficie che limita il volume V (df_x, df_y, df_z sono le componenti del vettore tridimensionale dell'elemento di superficie $d\mathbf{f}$). Il primo membro dell'uguaglianza (32,13) contiene la velocità di variazione dell'energia contenuta nel volume V. Ne risulta quindi che l'espressione del secondo membro è la quantità di energia che attraversa la superficie delimitante questo volume, e che il vettore $\mathbf{S}$ con componenti

$$cT^{01},\quad cT^{02},\quad cT^{03}$$

è la densità di questo flusso, cioè la quantità di energia che attraversa l'unità di superficie nell'unità di tempo. Siamo giunti quindi ad una conclusione importante: le condizioni d'invarianza relativistica, insite nel carattere tensoriale delle grandezze T^{ik}, conducono automaticamente a una relazione determinata tra il flusso di energia e l'impulso, ossia la densità del flusso di energia è uguale al prodotto della densità d'impulso per c^2.

Partendo dalla seconda equazione (32,12), analogamente troviamo:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \frac{1}{c}T^{\alpha 0}\,dV = -\oint T^{\alpha\beta}\,df_\beta. \tag{32,14}$$

A primo membro abbiamo la variazione nell'unità di tempo dell'impulso del sistema nel volume V; ne segue che $\int T^{\alpha\beta}df_\beta$ è la quantità d'impulso uscente nell'unità di tempo da questo volume. Cosí, le componenti $T^{\alpha\beta}$ del tensore energia-impulso costituiscono il tensore tridimensionale della densità di flusso d'impulso detto *tensore degli sforzi*; lo indichiamo con $\sigma_{\alpha\beta}$ (α, $\beta = x, y, z$). La densità di flusso d'energia è un vettore: la densità di flusso d'impulso, essendo un vettore, deve essere evidentemente un tensore (la componente $\sigma_{\alpha\beta}$ di questo tensore è la grandezza della α-esima componente dell'impulso, passante nell'unità di tempo attraverso l'unità di superficie perpendicolare all'asse x^β).

Scriviamo ancora una volta la tabella che precisa il senso delle varie componenti del tensore energia-impulso:

$$T^{ik} = \begin{pmatrix} W & S_x/c & S_y/c & S_z/c \\ S_x/c & \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ S_y/c & \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ S_z/c & \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}. \tag{32,15}$$

§ 33. *Tensore energia-impulso del campo elettromagnetico*

Applichiamo ora al campo elettromagnetico le relazioni generali ottenute nel paragrafo precedente. Per il campo elettromagnetico, in virtú della (27,4), la grandezza Λ che sta sotto il segno d'integrazione nella (32,1) è

$$\Lambda = -\frac{1}{16\pi} F_{kl}F^{kl}.$$

Le grandezze q sono qui le componenti del potenziale quadridimensionale A_k del campo, cosicché la definizione (32,5) del tensore T_i^k assume la forma

$$T_i^k = \frac{\partial A_l}{\partial x^i} \frac{\partial \Lambda}{\partial (\partial A_l/\partial x^k)} - \delta_i^k \Lambda.$$

Per calcolare la derivata di Λ, scriviamo la variazione:

$$\delta\Lambda = -\frac{1}{8\pi} F^{kl}\delta F_{kl} = -\frac{1}{8\pi} F^{kl}\delta\left(\frac{\partial A_l}{\partial x^k} - \frac{\partial A_k}{\partial x^l}\right).$$

Permutando gli indici e tenendo conto dell'antisimmetria del tensore F_{kl}, otteniamo:

$$\delta\Lambda = -\frac{1}{4\pi} F^{kl}\delta\frac{\partial A_l}{\partial x^k}.$$

Da cui vediamo che

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial (\partial A_l/\partial x^k)} = -\frac{1}{4\pi} F^{kl},$$

e perciò

$$T_i^k = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial A_l}{\partial x^i} F^{kl} + \frac{1}{16\pi}\delta_i^k F_{lm}F^{lm},$$

oppure, per le componenti controvarianti,

$$T^{ik} = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial A^l}{\partial x_i} F^k{}_l + \frac{1}{16\pi} g^{ik} F_{lm}F^{lm}.$$

Tuttavia, questo tensore non è simmetrico. Per simmetrizzarlo, aggiungiamo ad esso la grandezza

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial A^i}{\partial x_l} F^k{}_l.$$

In virtú dell'equazione del campo (30,2), in assenza di cariche si ha $\partial F^k{}_l/\partial x_l = 0$, e, di conseguenza,

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial A^i}{\partial x_l} F^k{}_l = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x_l}(A^i F^k{}_l),$$

cosicché la sostituzione fatta di T^{ik} è del tipo (32,7) ed è ammissibile. Poiché si ha $\frac{\partial A^l}{\partial x_i} - \frac{\partial A^i}{\partial x_l} = F^{il}$, troviamo in definitiva la seguente espressione per il tensore energia-impulso del campo elettromagnetico:

$$T^{ik} = \frac{1}{4\pi}\left(-F^{il}F^k{}_l + \frac{1}{4}g^{ik}F_{lm}F^{lm}\right). \tag{33,1}$$

La simmetria di questo tensore è evidente. Inoltre, la sua traccia è nulla:

$$T^i_i = 0. \tag{33,2}$$

Esprimiamo le componenti del tensore T^{ik} tramite i vettori campi elettrico e magnetico. I valori (23,5) di F_{ik} ci permettono di vedere che T^{00} coincide, come doveva, con la densità dell'energia (31,5), e le componenti $cT^{0\alpha}$ con le componenti del vettore di Poynting (31,2). Le componenti spaziali $T^{\alpha\beta}$ formano, invece, un tensore tridimensionale con componenti

$$\sigma_{xx} = \frac{1}{8\pi}(E_y^2 + E_z^2 - E_x^2 + H_y^2 + H_z^2 - H_x^2),$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{1}{4\pi}(E_xE_y + H_xH_y)$$

ecc., oppure

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi}\left\{-E_\alpha E_\beta - H_\alpha H_\beta + \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}(E^2 + H^2)\right\}. \tag{33,3}$$

Questo tensore tridimensionale è detto *tensore degli sforzi di Maxwell.*

Per ridurre il tensore T^{ik} in forma diagonale, bisogna passare a un sistema di riferimento dove i vettori **E** ed **H** siano collineari (nel punto dato dello spazio e nell'istante dato) oppure dove uno di essi sia nullo; come è noto (§ 25), tale trasformazione è sempre possibile, ad eccezione del caso in cui **E** ed **H** siano reciprocamente perpendicolari e di grandezza uguale. Fatta la trasformazione, è facile vedere che le uniche componenti non nulle di T^{ik} saranno

$$T^{00} = -T^{11} = T^{22} = T^{33} = W$$

(l'asse delle x è diretto nella direzione dei campi).

Se invece i vettori **E** ed **H** sono reciprocamente perpendicolari e di grandezza uguale, il tensore T^{ik} non può essere ridotto in forma diagonale[1]). In questo caso, le sue componenti non nulle sono

$$T^{00} = T^{33} = T^{30} = W$$

(l'asse delle x è diretto lungo la direzione di **E**, e l'asse delle y lungo **H**).

[1]) Il fatto che la riduzione del 4-tensore simmetrico T^{ik} agli assi principali può risultare impossibile è dovuto alla natura non euclidea dello spazio quadridimensionale (vedi anche il problema del § 94).

Abbiamo considerato finora un campo in assenza di cariche. In presenza di particelle cariche, il tensore energia-impulso di tutto il sistema rappresenta la somma dei tensori energia-impulso del campo elettromagnetico e delle particelle (le particelle sono considerate come non interagenti).

Per determinare la forma del tensore energia-impulso delle particelle, è necessario descrivere la distribuzione di massa nello spazio attraverso la « densità di massa », analogamente a come abbiamo descritto la distribuzione di cariche puntiformi mediante la loro densità. Per analogia con la formula (28,1) per la densità di carica, si può scrivere la densità di massa nella forma dove

$$\mu = \sum_a m_a \delta (\mathbf{r} - \mathbf{r}_a), \tag{33,4}$$

$\mathbf{r}_a$ sono i raggi vettori delle particelle, e la sommatoria è estesa a tutte le particelle del sistema.

La densità d'impulso delle particelle assumerà la forma $\mu c u^\alpha$. Come è noto, questa densità rappresenta le componenti $T^{0\alpha}/c$ del tensore energia-impulso, cioè $T^{0\alpha} = \mu c^2 u^\alpha$ ($\alpha = 1, 2, 3$). La densità di massa è però la componente temporale del quadrivettore $\frac{\mu}{c}\frac{dx^k}{dt}$ (per analogia con la densità di carica; vedi § 28). Di conseguenza, il tensore energia-impulso di un sistema di particelle non interagenti è

$$T^{ik} = \mu c \frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{dt} = \mu c u^i u^k \frac{ds}{dt}. \tag{33,5}$$

Questo tensore è, come deve essere, simmetrico.

Con un calcolo diretto si può verificare che l'energia e l'impulso di un sistema, definiti come le somme delle energie e degli impulsi del campo e delle particelle, si conservano effettivamente. In altri termini, dobbiamo verificare l'equazione

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left(T^{(c)k}_{\ \ i} + T^{(p)k}_{\ \ i}\right) = 0, \tag{33,6}$$

che esprime questa legge di conservazione.

Derivando l'espressione (33,1), scriviamo:

$$\frac{\partial T^{(c)k}_{\ \ i}}{\partial x^k} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{2}F^{lm}\frac{\partial F_{lm}}{\partial x^i} - F^{kl}\frac{\partial F_{il}}{\partial x^k} - F_{il}\frac{\partial F^{kl}}{\partial x^k}\right).$$

Sostituendo in questa uguaglianza in virtú delle equazioni di Maxwell (26,5) e (30,2)

$$\frac{\partial F_{lm}}{\partial x^i} = -\frac{\partial F_{ml}}{\partial x^l} - \frac{\partial F_{il}}{\partial x^m}, \quad \frac{\partial F^{kl}}{\partial x^k} = \frac{4\pi}{c} j^l,$$

otteniamo:

$$\frac{\partial T^{(c)k}_{\ i}}{\partial x^k} = \frac{1}{4\pi}\left(-\frac{1}{2}F^{lm}\frac{\partial F_{mi}}{\partial x^l} - \frac{1}{2}F^{lm}\frac{\partial F_{il}}{\partial x^m} - F^{kl}\frac{\partial F_{il}}{\partial x^k} - \frac{4\pi}{c}F_{il}j^l\right).$$

Permutando gli indici è facile mostrare che i primi tre termini si eliminano e resta

$$\frac{\partial T^{(c)k}_{\ i}}{\partial x^k} = -\frac{1}{c}F_{il}j^l. \tag{33,7}$$

La derivazione del tensore (33,5) ci dà:

$$\frac{\partial T^{(p)k}_{\ i}}{\partial x^k} = cu_i\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\mu\frac{dx^k}{dt}\right) + \mu c\frac{dx^k}{dt}\frac{\partial u_i}{\partial x^k}.$$

Il primo termine di questa espressione è nullo in virtú della conservazione della massa per particelle non interagenti. Infatti, le grandezze $\mu\frac{dx^k}{dt}$ formano il quadrivettore « corrente di massa », per analogia con il quadrivettore corrente di cariche (28,2); per quanto concerne la conservazione della massa, essa si esprime mediante l'annullamento della divergenza quadridimensionale di questo vettore:

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\mu\frac{dx^k}{dt}\right) = 0, \tag{33,8}$$

analogamente alla conservazione della carica espressa dall'equazione (29,4).

Abbiamo quindi:

$$\frac{\partial T^{(p)k}_{\ i}}{\partial x^k} = \mu c\frac{dx^k}{dt}\frac{\partial u_i}{\partial x^k} = \mu c\frac{du_i}{dt}.$$

Per un'ulteriore trasformazione, usiamo l'equazione del moto delle cariche in un campo, scritta in forma quadridimensionale (23,4):

$$mc\frac{du_i}{ds} = \frac{e}{c}F_{ik}u^k.$$

Passando a una distribuzione continua della carica e della massa, in virtú della definizione di μ e ρ, abbiamo: $\mu/m = \rho/e$. Si può scrivere quindi l'equazione del moto nella forma

$$\mu c\frac{du_i}{ds} = \frac{\rho}{c}F_{ik}u^k,$$

oppure

$$\mu c\frac{du_i}{dt} = \frac{1}{c}F_{ik}\rho u^k\frac{ds}{dt} = \frac{1}{c}F_{ik}j^k.$$

In tal modo,

$$\frac{\partial T^{(p)k}_{i}}{\partial x^k} = \frac{1}{c} F_{ik} j^k. \tag{33,9}$$

Aggiungendo alla (33,7), otteniamo effettivamente zero, cioè ritroviamo l'equazione (33,6).

§ 34. *Teorema del viriale*

Poiché la traccia del tensore energia-impulso del campo elettromagnetico è nulla, la somma T^i_i per ogni sistema di particelle interagenti si riduce alla traccia del tensore energia-impulso delle sole particelle. Servendoci dell'espressione (33,5), abbiamo perciò:

$$T^i_i = T^{(p)i}_{i} = \mu c u_i u^i \frac{ds}{dt} = \mu c \frac{ds}{dt} = \mu c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Riscriviamo questo risultato tornando alla somma sulle particelle, cioè sostituendo μ con la sua espressione data dalla somma (33,4). Otteniamo:

$$T^i_i = \sum_a m_a c^2 \sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}}\, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a). \tag{34,1}$$

Notiamo che secondo questa formula per ogni sistema si ha

$$T^i_i \geqslant 0 \tag{34,2}$$

(il segno d'uguaglianza vale soltanto per un campo elettromagnetico senza cariche).

Consideriamo un sistema isolato di particelle cariche che compiono un moto finito, nel corso del quale tutte le grandezze che caratterizzano il sistema (coordinate, impulsi) variano in intervalli finiti[1]).

Prendiamo la media rispetto al tempo dell'equazione

$$\frac{1}{c} \frac{\partial T^{\alpha 0}}{\partial t} + \frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 0$$

[vedi la (32,12)]. Allora, il valore medio della derivata $\partial T^{\alpha 0}/\partial t$, come anche della derivata di ogni grandezza variante in un inter-

---

[1]) Si suppone, inoltre, che il campo elettromagnetico del sistema si annulli all'infinito. Ciò significa che se si ha un'emissione di onde elettromagnetiche nel sistema, si postula allora che « pareti riflettenti » speciali impediscano alle onde di andare all'infinito.

vallo finito, è nullo[1]). Ne segue che

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta}\overline{T}^\beta_\alpha = 0.$$

Moltiplichiamo questa equazione per x^α ed integriamo in tutto lo spazio. Trasformando l'integrale secondo il teorema di Gauss, tenendo presente che all'infinito $T^\beta_\alpha = 0$ e, quindi, che l'integrale di superficie si annulla, otteniamo:

$$\int x^\alpha \frac{\partial \overline{T}^\beta_\alpha}{\partial x^\beta} dV = -\int \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\beta}\overline{T}^\beta_\alpha dV = -\int \delta^\alpha_\beta \overline{T}^\beta_\alpha dV = 0,$$

o, in definitiva,

$$\int \overline{T}^\alpha_\alpha dV = 0. \tag{34,3}$$

In virtú di questa uguaglianza, per l'integrale di $\overline{T}^i_i = \overline{T}^\alpha_\alpha + \overline{T}^0_0$ possiamo scrivere:

$$\int \overline{T}^i{}_i dV = \int \overline{T}^0_0 dV = \mathscr{E},$$

dove $\mathscr{E}$ è l'energia totale del sistema.

Infine, sostituendo la (34,1) in quest'ultima uguaglianza, troviamo:

$$\mathscr{E} = \sum_a m_a c^2 \overline{\sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}}}. \tag{34,4}$$

Questa relazione è la generalizzazione relativistica del *teorema del viriale* della meccanica classica (vedi vol. I, *Meccanica*, § 10). Per velocità piccole essa diventa

$$\mathscr{E} - \sum_a m_a c^2 = -\sum_a \overline{\frac{m_a v_a^2}{2}},$$

cioè l'energia totale del sistema meno l'energia di riposo delle particelle è uguale al valore medio dell'energia cinetica presa col segno meno. Il risultato è conforme a quello ricavato dal teorema classico del viriale per un sistema di particelle cariche che interagiscono secondo la legge di Coulomb.

---

[1]) Sia f una tale grandezza. Allora il valore medio della derivata df/dt in un intervallo di tempo T é

$$\overline{\frac{df}{dt}} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{df}{dt} dt = \frac{f(T) - f(0)}{T}.$$

Siccome $f(t)$ varia solo tra limiti finiti, questo valore medio tende effettivamente a zero quando T tende all'infinito.

35. *Tensore energia-impulso per corpi macroscopici*

Accanto al tensore energia-impulso per un sistema di particelle puntiformi (33,5) avremo bisogno in seguito dell'espressione di questo tensore per corpi macroscopici, considerati come continui.

Il flusso d'impulso attraverso l'elemento di superficie di un corpo è definito come forza agente su questo elemento. Di conseguenza, $\sigma_{\alpha\beta} df_\beta$ è la α-esima componente della forza agente sull'elemento di superficie df. Prendiamo ora un sistema di riferimento nel quale l'elemento di volume dato è in quiete. In questo sistema vale la legge di Pascal, cioè la pressione p esercitata da un elemento dato del corpo è uguale in tutte le direzioni ed è ovunque perpendicolare all'elemento di superficie su cui si esercita [1]). Possiamo quindi scrivere $\sigma_{\alpha\beta} df_\beta = p\, df_\alpha$, da cui il tensore degli sforzi $\sigma_{\alpha\beta} = p\delta_{\alpha\beta}$. Per quanto concerne le componenti $T^{\alpha 0}$, che definiscono la densità d'impulso, esse sono nulle per l'elemento di volume dato nel sistema di riferimento considerato. La componente T^{00} invece è, come sempre, uguale alla densità d'energia del corpo, che indichiamo qui con ε; allora ε/c^2 è la densità di massa, cioè la massa nell'unità di volume del corpo. Sottolineiamo che si tratta qui dell'unità di volume proprio, cioè del volume nel sistema di riferimento dove l'elemento dato del corpo è in quiete.

In tal modo, il tensore energia-impulso (per l'elemento dato del corpo) nel sistema di riferimento considerato è della seguente forma:

$$T^{ik} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}. \tag{35,1}$$

È facile ora trovare l'espressione del tensore energia-impulso in qualsiasi sistema di riferimento. A questo scopo introduciamo la 4-velocità u^i del moto macroscopico dell'elemento di volume del corpo. Nel sistema di riferimento, dove l'elemento è in quiete, $u^i = (1, 0)$. L'espressione di T^{ik} deve essere scelta in maniera tale che in questo sistema esso abbia la forma (35,1). È facile verificare che la forma richiesta è

$$T^{ik} = (p + \varepsilon)\, u^i u^k - p g^{ik}, \tag{35,2}$$

[1]) A essere rigorosi, la legge di Pascal vale soltanto per i liquidi e per i gas. Tuttavia, per i corpi solidi le deviazioni massime di pressione in diverse direzioni sono trascurabili rispetto a pressioni che possono avere importanza nella teoria della relatività e, quindi, si possono trascurare.

o per le componenti miste

$$T_i^k = (p + \varepsilon)\, u_i u^k - p\delta_i^k.$$

Questa è l'espressione del tensore energia-impulso di un corpo macroscopico. Le corrispondenti espressioni per la densità W dell'energia, la densità di flusso S dell'energia e il tensore $\sigma_{\alpha\beta}$ sono:

$$W = \frac{\varepsilon + p\frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad \mathbf{S} = \frac{(p+\varepsilon)\,\mathbf{v}}{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad \sigma_{\alpha\beta} = \frac{(p+\varepsilon)\, v_\alpha v_\beta}{c^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} + p\delta_{\alpha\beta}. \qquad (35,3)$$

Se la velocità $\mathbf{v}$ del moto macroscopico è piccola rispetto alla velocità della luce, si ha approssimativamente:

$$\mathbf{S} = (p + \varepsilon)\,\mathbf{v}.$$

Siccome $\mathbf{S}/c^2$ è la densità d'impulso, si vede che il ruolo della densità di massa in questo caso è assunto dalla somma $(p + \varepsilon)/c^2$.

L'espressione di T^{ik} si semplifica nel caso in cui le velocità di tutte le particelle costituenti il corpo sono piccole rispetto alla velocità della luce (la velocità del moto macroscopico può essere arbitraria). In questo caso, nella densità d'energia ε si possono trascurare tutte quelle parti che sono piccole rispetto all'energia di riposo, cioè, in luogo di ε, si può scrivere $\mu_0 c^2$, dove μ_0 è la somma delle masse delle particelle contenute nell'unità di volume (proprio) del corpo (sottolineiamo che nel caso generale bisogna distinguere μ_0 dalla densità di massa esatta ε/c^2 che comprende anche la massa proveniente dal moto microscopico delle particelle nel corpo e la loro energia d'interazione). Per quanto concerne la pressione determinata dall'energia del moto microscopico delle molecole, nel caso considerato, essa è pure piccola rispetto alla densità d'energia di riposo $\mu_0 c^2$. In tal modo, abbiamo in questo caso

$$T^{ik} = \mu_0 c^2 u^i u^k. \qquad (35,4)$$

Dall'espressione (35,2) ricaviamo:

$$T_i^i = \varepsilon - 3p. \qquad (35,5)$$

La proprietà generale (34,2) del tensore energia-impulso di un sistema qualunque mostra ora che per la pressione e la densità di un corpo macroscopico si verifica sempre la disuguaglianza

$$p < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (35,6)$$

Confrontiamo l'espressione (35,5) con la formula generale (34,1). Poiché consideriamo ora un corpo macroscopico, bisogna prendere la media dell'espressione (34,1) rispetto a tutti i valori di $\mathbf{r}$ nell'unità

di volume. Troviamo pertanto:

$$\varepsilon - 3p = \sum m_a c^2 \sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}} \tag{35,7}$$

(la sommatoria è estesa alle particelle contenute nell'unità di volume). Nel limite ultrarelativistico, il secondo membro di questa uguaglianza tende a zero e, di conseguenza, la equazione di stato della sostanza in questo limite[1]) è:

$$p = \frac{\varepsilon}{3}. \tag{35,8}$$

Applichiamo le formule ottenute ad un gas perfetto, che supponiamo composto di particelle identiche. Siccome le particelle del gas perfetto non interagiscono, si può prendere la media della espressione (33,5). Per un gas perfetto abbiamo quindi:

$$T^{ik} = nmc \overline{\frac{dx^i}{dt} \frac{dx^k}{ds}},$$

dove n è il numero di particelle nell'unità di volume, e il tratto orizzontale significa che la media è relativa a tutte le particelle. Se non c'è nessun moto macroscopico nel gas, per T^{ik} abbiamo l'espressione (35,1). Confrontando le due formule otteniamo:

$$\varepsilon = nm \overline{\frac{c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}, \quad p = \frac{nm}{3} \overline{\frac{v^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}. \tag{35,9}$$

Queste uguaglianze determinano la densità e la pressione di un gas perfetto relativistico in funzione della velocità delle particelle; la seconda di esse sostituisce la nota formula $p = nm\overline{v^2}/3$ della teoria cinetica dei gas non relativistica.

---

[1]) Questa equazione limite si ottiene partendo dal presupposto che ci sia interazione elettromagnetica tra le particelle. La considereremo valida (quando ne avremo bisogno nel cap. XIV) anche per altri tipi di interazioni tra le particelle esistenti in natura, sebbene la validità di questa ipotesi per ora non sia confermata.

Capitolo V

CAMPO ELETTROMAGNETICO COSTANTE

§ 36. *Legge di Coulomb*

Per un campo elettromagnetico costante (*elettrostatico*), le equazioni di Maxwell assumono la forma

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho, \tag{36,1}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0. \tag{36,2}$$

Il campo elettrico **E** si esprime con un solo potenziale scalare mediante la relazione

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi. \tag{36,3}$$

Sostituendo la (36,3) nella (36,1), troviamo l'equazione alla quale soddisfa il potenziale di un campo elettrico costante:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho. \tag{36,4}$$

Questa equazione è detta *equazione di Poisson.* Nel vuoto, cioè per $\rho = 0$, il potenziale soddisfa *l'equazione di Laplace*

$$\Delta\varphi = 0. \tag{36,5}$$

Dall'ultima equazione risulta in particolare che il potenziale di un campo elettrico costante non può avere né massimo né minimo. Infatti, affinché φ abbia un estremo, è necessario che tutte le derivate prime di φ rispetto alle coordinate siano nulle, e le derivate seconde $\partial^2\varphi/\partial x^2$, $\partial^2\varphi/\partial y^2$, $\partial^2\varphi/\partial z^2$ abbiano lo stesso segno. Quest'ultima condizione è però impossibile, poichè l'equazione (36,5) non può essere soddisfatta.

Determiniamo ora il campo creato da una carica puntiforme. Per ragioni di simmetria, è evidente che esso sarà diretto in ogni punto lungo il raggio vettore uscente dal punto dove si trova la carica e. Per la stessa ragione, è chiaro che il valore assoluto del campo E dipenderà soltanto dalla distanza R dalla carica. Per trovare questo valore assoluto applichiamo l'equazione (36,1) nella forma integrale (30,5). Il flusso del campo elettrico attraverso una sfera di raggio R e avente per centro la carica e è uguale a $4\pi R^2 E$; poiché questo flusso deve essere uguale a $4\pi e$, troviamo:

$$E = \frac{e}{R^2}.$$

In forma vettoriale:

$$\mathbf{E} = \frac{e\mathbf{R}}{R^3}. \tag{36,6}$$

Quindi, il campo creato da una carica puntiforme è inversamente proporzionale al quadrato della distanza da questa carica. Questa è la *legge di Coulomb*. Il potenziale di questo campo è

$$\varphi = \frac{e}{R}. \tag{36,7}$$

Se abbiamo un sistema di cariche, il campo creato da queste cariche sarà uguale, in virtú del principio di sovrapposizione, alla somma dei campi creati separatamente da ciascuna carica. In particolare, il potenziale del campo risultante è:

$$\varphi = \sum_a \frac{e_a}{R_a},$$

dove R_a è la distanza della carica e_a dal punto dove calcoliamo il potenziale. Se introduciamo la densità ρ di carica, questa formula diventa

$$\varphi = \int \frac{\rho}{R}\, dV, \tag{36,8}$$

dove R è la distanza dell'elemento di volume dV dal punto dato (« punto d'osservazione ») del campo.

Mettiamo qui in evidenza la relazione matematica che si ottiene sostituendo nella (36,4) i valori di ρ e φ per una carica puntiforme, cioè $\rho = e\delta(\mathbf{R})$ e $\varphi = e/R$. Troviamo allora:

$$\Delta \frac{1}{R} = -4\pi\delta(\mathbf{R}). \tag{36,9}$$

§ 37. *Energia elettrostatica delle cariche*

Determiniamo l'energia di un sistema di cariche. Partiremo dal concetto di energia del campo, cioè dall'espressione (31,5) per la densità d'energia. Piú precisamente, l'energia di un sistema di cariche deve essere uguale a

$$U = \frac{1}{8\pi} \int E^2\, dV,$$

dove $\mathbf{E}$ è il campo creato dalle cariche, e l'integrale è esteso a tutto lo spazio. Sostituendo in questa espressione $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi$, si può trasformare U come segue:

$$U = -\frac{1}{8\pi} \int \mathbf{E} \operatorname{grad}\varphi\, dV = -\frac{1}{8\pi} \int \operatorname{div}(\mathbf{E}\varphi)\, dV + \frac{1}{8\pi} \int \varphi \operatorname{div}\mathbf{E}\, dV.$$

Il primo di questi integrali è uguale, in virtú del teorema di Gauss, all'integrale di $\mathbf{E}\,\varphi$ preso sulla superficie che limita il volume d'integrazione; ma poiché l'integrazione è estesa a tutto lo spazio e il campo è nullo all'infinito, questo integrale scompare. Sostituendo nel secondo integrale div $\mathbf{E} = 4\pi\rho$, troviamo la seguente espressione per l'energia di un sistema di cariche:

$$U = \frac{1}{2}\int \rho\varphi\, dV. \tag{37,1}$$

Per un sistema di cariche puntiformi e_a, l'integrale può essere sostituito da una somma estesa alle cariche:

$$U = \frac{1}{2}\sum e_a\varphi_a, \tag{37,2}$$

dove φ_a è il potenziale del campo creato da tutte le cariche nel punto dove si trova la carica e_a.

Applicando la formula ottenuta ad una particella elementare carica (per esempio, ad un elettrone) e al campo da essa creato, arriviamo alla conclusione che la particella deve essere dotata di una energia potenziale « propria » uguale ad $e\varphi/2$, dove φ è il potenziale del campo creato dalla carica nel punto dove essa stessa si trova. Sappiamo però che nella teoria della relatività ogni particella elementare va considerata come puntiforme. Il potenziale $\varphi = e/R$ del campo da essa creato nel punto $R = 0$ diventa infinito. Da questa conclusione segue dunque che in elettrodinamica l'elettrone dovrebbe possedere una energia « propria » infinita e, di conseguenza, una massa infinita. L'assurdità fisica di questo risultato dimostra che i princípi fondamentali dell'elettrodinamica sono tali che la loro applicazione è legittima entro dei limiti ben determinati.

Notiamo il seguente fatto: poiché l'energia « propria » e la massa ottenute in elettrodinamica sono infinite, è impossibile nel quadro dell'elettrodinamica classica determinare che tutta la massa dell'elettrone sia o no elettromagnetica (cioè legata all'energia propria elettromagnetica della particella)[1]).

Poiché l'apparire di una energia « propria » infinita, priva di senso fisico, per una particella elementare è dovuta al fatto che la particella è considerata puntiforme, possiamo concludere quindi che l'elettrodinamica come teoria fisica logicamente compiuta diventa contradditoria quando si passa a distanze sufficientemente piccole. Si può porre la domanda: di che ordine di grandezza sono queste

---

[1]) Dal punto di vista puramente formale, la proprietà dell'elettrone di aver una massa finita può essere spiegata introducendo una massa infinita negativa di origine non elettromagnetica che compensi la massa elettromagnetica infinita (« rinormalizzazione » della massa). Tuttavia, vedremo in seguito (§ 75) che questo procedimento non permette di eliminare tutte le contraddizioni interne dell'elettrodinamica classica.

distanze? A questa domanda si può rispondere notando che per l'energia elettromagnetica propria dell'elettrone bisognerebbe ottenere un valore dell'ordine dell'energia di riposo mc^2. Se si ammette che l'elettrone abbia una certa dimensione R_0, la sua energia potenziale propria sarebbe allora dell'ordine di e^2/R_0. Dalla condizione che queste due grandezze siano dello stesso ordine, $e^2/R_0 \sim mc^2$, abbiamo:

$$R_0 \sim \frac{e^2}{mc^2}. \tag{37,3}$$

Queste dimensioni (dette « raggio » dell'elettrone) determinano i limiti dell'applicabilità dell'elettrodinamica all'elettrone, limiti dovuti ai suoi stessi princípi fondamentali. Bisogna però tener presente che in realtà questi limiti dell'applicabilità sono ancora piú ristretti per la elettrodinamica classica qui esposta, data l'esistenza dei fenomeni quantistici[1]).

Torniamo ancora alla formula (37,2). In virtú della legge di Coulomb, i potenziali φ_a in essa contenuti sono uguali a

$$\varphi_a = \sum \frac{e_b}{R_{ab}}, \tag{37,4}$$

dove R_{ab} è la distanza tra le cariche e_a, e_b. L'espressione dell'energia (37,2) è composta di due parti. La prima è costituita da una costante infinita — l'energia « propria » delle cariche — che non dipende dalla loro posizione. La seconda parte è l'energia d'interazione tra le cariche, che dipende dalla loro posizione. È evidente che solo questa parte presenta un interesse fisico. Essa è uguale a:

$$U' = \frac{1}{2} \sum e_a \varphi'_a, \tag{37,5}$$

dove

$$\varphi'_a = \sum_{b(\neq a)} \frac{e_b}{R_{ab}} \tag{37,6}$$

è il potenziale nel punto e_a, creato da tutte le cariche, tranne e_a. In altro modo si può scrivere:

$$U' = \frac{1}{2} \sum_{a \neq b} \frac{e_a e_b}{R_{ab}}. \tag{37,7}$$

In particolare, l'energia d'interazione tra due cariche è

$$U' = \frac{e_1 e_2}{R_{12}}. \tag{37,8}$$

---

[1]) Gli effetti quantistci diventano importanti per distanze dell'ordine $\hbar/mc$, dove $\hbar$ è la costante di Planck.

§ 38. *Campo creato da una carica in moto uniforme*

Determiniamo il campo generato da una carica e in moto uniforme con velocità V. Siano K il sistema di riferimento immobile e K' il sistema di riferimento in moto con la carica. Supponiamo che la carica si trovi nell'origine di K', che il sistema K' si sposti rispetto a K parallelamente all'asse x, e che gli assi y e z siano paralleli ad y' e z'. Nell'istante $t = 0$ le origini dei due sistemi coincidono. Di conseguenza, le coordinate della carica nel sistema K sono: $x = Vt$, $y = z = 0$. Nel sistema K' abbiamo un campo elettrico costante, di potenziale vettore $\mathbf{A}' = 0$ e di potenziale scalare $\varphi' = e/R'$, dove $R'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$. Nel sistema K, applicando le formule (24,1) con $\mathbf{A}' = 0$, otteniamo:

$$\varphi = \frac{\varphi'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{e}{R'\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \tag{38,1}$$

Resta ora da esprimere R' mediante le coordinate x, y, z nel sistema K. Secondo le formule di trasformazione di Lorentz

$$x' = \frac{x-Vt}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z,$$

da cui

$$R'^2 = \frac{(x-Vt)^2 + \left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)(y^2+z^2)}{1-\frac{V^2}{c^2}}. \tag{38,2}$$

Sostituendo questa espressione nella (38,1), troviamo:

$$\varphi = \frac{e}{R^*}, \tag{38,3}$$

dove si è posto:

$$R^{*2} = (x-Vt)^2 + \left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)(y^2+z^2). \tag{38,4}$$

Il potenziale vettore nel sistema K è uguale a

$$\mathbf{A} = \varphi\frac{\mathbf{V}}{c} = \frac{e\mathbf{V}}{cR^*}. \tag{38,5}$$

Nel sistema K' il campo magnetico $\mathbf{H}'$ non esiste, e il campo elettrico è uguale a:

$$\mathbf{E}' = \frac{e\mathbf{R}'}{R'^3}.$$

Con le formule (24,2) troviamo:

$$E_x = E'_x = \frac{ex'}{R'^3}, \quad E_y = \frac{E'_y}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{ey'}{R'^3\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},$$

$$E_z = \frac{ez'}{R'^3\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

Sostituendovi R', x', y', z', espresse in funzione di x, y, z, troviamo:

$$\mathbf{E} = \left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)\frac{e\mathbf{R}}{R^{*3}}, \tag{38,6}$$

dove $\mathbf{R}$ è il raggio vettore che va dalla carica e al punto d'osservazione x, y, z del campo (le sue componenti sono: $x - Vt$, y, z).

Questa espressione di $\mathbf{E}$ si può scrivere in un'altra forma, introducendo l'angolo θ tra la direzione del moto e il raggio vettore $\mathbf{R}$. È evidente che $y^2 + z^2 = R^2 \operatorname{sen}^2\theta$ e, di conseguenza, R^{*2} può essere scritto nella forma

$$R^{*2} = R^2\left(1-\frac{V^2}{c^2}\operatorname{sen}^2\theta\right). \tag{38,7}$$

Per $\mathbf{E}$ abbiamo allora:

$$\mathbf{E} = \frac{e\mathbf{R}}{R^3}\,\frac{1-\frac{V^2}{c^2}}{\left(1-\frac{V^2}{c^2}\operatorname{sen}^2\theta\right)^{3/2}}. \tag{38,8}$$

Per una fissata distanza R dalla carica, la grandezza del campo E aumenta quando θ cresce da 0 a $\pi/2$ (o decresce da π a $\pi/2$). Il campo ha un minimo nella direzione parallela a quella del moto ($\theta=0$, π), che è uguale a

$$E_{\parallel} = \frac{e}{R^2}\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right).$$

Il campo è massimo nella direzione perpendicolare alla velocità ($\theta = \pi/2$) ed è uguale a

$$E_{\perp} = \frac{e}{R^2}\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

Notiamo che con l'aumento della velocità il campo $E_{\parallel}$ decresce mentre il campo $E_{\perp}$ cresce. In modo figurato si potrebbe dire che il campo elettrico di una carica in moto si « appiattisce » nella direzione del moto. Per velocità V vicine a quella della luce, il denominatore della formula (38,8) è vicino allo zero in uno stretto

intervallo di valori di θ attorno al valore $\theta = \pi/2$. La larghezza di questo intervallo è dell'ordine di

$$\Delta\theta \sim \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}.$$

Quindi, il campo elettrico di una particella moventesi con grande velocità è sensibilmente differente da zero, ad una distanza data da questa carica, soltanto in uno stretto intervallo di angoli in prossimità del piano equatoriale (la larghezza di questo intervallo decresce come $\sqrt{1 - V^2/c^2}$ allorché V cresce).

Il campo magnetico nel sistema K è

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c}[\mathbf{VE}] \tag{38,9}$$

[vedi la (24,5)]. In particolare, per $V \ll c$, il campo elettrico è dato approssimativamente dalla legge di Coulomb $\mathbf{E} = e\mathbf{R}/R^3$, e il campo magnetico è allora

$$\mathbf{H} = \frac{e}{c}\frac{[\mathbf{VR}]}{R^3}. \tag{38,10}$$

PROBLEMA

Determinare la forza che si esercita (nel sistema K) fra due cariche che si muovono con una stessa velocità $\mathbf{V}$.

Soluzione. Calcoliamo la forza cercata $\mathbf{F}$ come forza agente su una delle cariche (e_1) nel campo generato dall'altra carica (e_2). In virtú della (38,9), abbiamo:

$$\mathbf{F} = e_1\mathbf{E}_2 + \frac{e_1}{c}[\mathbf{VH}_2] = e_1\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)\mathbf{E}_2 + \frac{e_1}{c^2}\mathbf{V}(\mathbf{VE}_2).$$

Sostituendo qui $\mathbf{E}_2$ ricavato dalla (38,8), per le componenti della forza nella direzione del moto (F_x) e perpendicolarmente ad esso (F_y) otteniamo:

$$F_x = \frac{e_1e_2}{R^2}\frac{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)\cos\theta}{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\operatorname{sen}^2\theta\right)^{3/2}}, \quad F_y = \frac{e_1e_2}{R^2}\frac{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^2\operatorname{sen}\theta}{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\operatorname{sen}^2\theta\right)^{3/2}},$$

dove $\mathbf{R}$ è il raggio vettore da e_2 ad e_1, e θ l'angolo tra $\mathbf{R}$ e $\mathbf{V}$.

§ 39. *Moto in un campo coulombiano*

Esaminiamo il moto di una particella di massa m e di carica e nel campo generato da un'altra carica e'; supponiamo che la massa di quest'ultima sia cosí grande da poterla considerare fissa. Il problema si riduce quindi allo studio del moto di una carica e in un campo elettrico a simmetria centrale di potenziale $\varphi = e'/r$.

L'energia totale della particella è

$$\mathscr{E} = c\sqrt{p^2 + m^2c^2} + \frac{\alpha}{r},$$

dove $\alpha = ee'$. Operando in coordinate polari nel piano del moto della particella, come è noto dalla meccanica, si ha

$$p^2 = \frac{M^2}{r^2} + p_r^2,$$

dove p_r è la componente radiale dell'impulso, M il momento angolare costante della particella. Nelle nuove variabili abbiamo:

$$\mathscr{E} = c\sqrt{p_r^2 + \frac{M^2}{r^2} + m^2c^2} + \frac{\alpha}{r}. \tag{39,1}$$

Vediamo ora se la particella nel suo moto sia in grado di avvicinarsi arbitrariamente al centro. È comunque evidente che ciò è impossibile quando e ed e' si respingono, cioè quando le cariche sono dello stesso segno. Inoltre, nel caso di attrazione (e ed e' sono di segni opposti), e non piò avvicinarsi arbitrariamente al centro se $Mc > |\alpha|$; infatti in questo caso, il primo termine della (39,1) è sempre superiore al secondo, e per $r \to 0$ il secondo membro di questa uguaglianza tenderebbe all'infinito. Al contrario, se $Mc < |\alpha|$, per $r \to 0$ questa espressione può restare finita (s'intende che p_r tende all'infinito). In tal modo, se

$$Mc < |\alpha|, \tag{39,2}$$

la particella nel suo moto «cade» sulla carica attirante, risultato che è in contraddizione con la meccanica non relativistica la quale esclude la «caduta» in un campo coulombiano in generale (ad eccezione del caso $M = 0$, cioè quando la particella e è lanciata direttamente sulla particella e').

Se si vuole determinare completamente il moto di una carica in un campo coulombiano è più conveniente partire dall'equazione di Hamilton-Jacobi. Scegliamo le coordinate polari r, φ nel piano del moto. L'equazione di Hamilton-Jacobi (16,11) ha la forma:

$$-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\alpha}{r}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 + m^2c^2 = 0.$$

Cerchiamo S nella forma

$$S = -\mathscr{E}t + M\varphi + f(r),$$

dove $\mathscr{E}$ ed M sono rispettivamente l'energia costante e il momento angolare costante della particella in moto. Troviamo in definitiva:

$$S = -\mathscr{E}t + M\varphi + \int \sqrt{\frac{1}{c^2}\left(\mathscr{E} - \frac{\alpha}{r}\right)^2 - \frac{M^2}{r^2} - m^2c^2}\cdot dr. \tag{39,3}$$

La traiettoria è data dall'equazione $\partial S/\partial M$ = costante. L'integrazione nella (39,3) dà i seguenti risultati per la traiettoria:

a) se $Mc > |\alpha|$:

$$(c^2M^2-\alpha^2)\frac{1}{r}=$$

$$=c\sqrt{(M\mathscr{E})^2-m^2c^2(M^2c^2-\alpha^2)}\cos\left(\varphi\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{c^2M^2}}\right)-\mathscr{E}\alpha; \qquad (39,4)$$

b) se $Mc < |\alpha|$:

$$(\alpha^2-c^2M^2)\frac{1}{r}=$$

$$=\pm c\sqrt{(M\mathscr{E})^2+m^2c^2(\alpha^2-M^2c^2)}\,\mathrm{ch}\left(\varphi\sqrt{\frac{\alpha^2}{c^2M^2}-1}\right)+\mathscr{E}\alpha; \qquad (39,5)$$

c) se $Mc = |\alpha|$:

$$\frac{2\mathscr{E}\alpha}{r}=\mathscr{E}^2-m^2c^4-\varphi^2\left(\frac{\mathscr{E}\alpha}{cM}\right)^2. \qquad (39,6)$$

La costante d'integrazione è stata inclusa nella scelta arbitraria dell'origine degli angoli φ.

Nella (39,4) la scelta del segno davanti al radicale non ha un'importanza sostanziale, essendo anch'essa collegata alla scelta dell'origine dell'angolo φ sotto il segno di coseno. La traiettoria data da questa equazione nel caso d'attrazione ($\alpha < 0$) è interamente compresa tra valori finiti di r (moto finito), qualora $\mathscr{E} < mc^2$. Se invece $\mathscr{E} > mc^2$, r può diventare infinita (moto infinito). Il moto finito in meccanica non relativistica viene compiuto su orbite chiuse (su ellissi). In meccanica relativistica, invece, la traiettoria non può mai essere chiusa: dalla (39,4) risulta che al variare dell'angolo φ di 2π la distanza r dal centro non ritorna al valore iniziale. In luogo di ellissi, abbiamo qui orbite costituite da « rosette » non chiuse. In tal modo, mentre in meccanica non relativistica il moto finito in un campo coulombiano viene compiuto su orbite chiuse, in meccanica relativistica il campo coulombiano perde questa proprietà.

Nella (39,5) deve essere preso il segno positivo davanti al radicale per $\alpha < 0$, e il segno negativo per $\alpha > 0$ [un'altra scelta dei segni provocherebbe il cambiamento del segno davanti al radicale nella (39,1)].

Per $\alpha < 0$, le traiettorie (39,5) e (39,6) rappresentano spirali di raggio r tendente a zero quando $\varphi \to \infty$. Il tempo di « caduta » della carica nell'origine delle coordinate è finito. Lo si può provare osservando che la dipendenza della coordinata r dal tempo è data dall'uguaglianza $\partial S/\partial\mathscr{E}$ = costante; sostituendo in questa uguaglianza l'espressione (39,3), vediamo che il tempo è determinato da un integrale convergente per $r \to 0$.

PROBLEMI

1. Determinare l'angolo di diffusione di una carica lanciata in un campo coulombiano repulsivo ($\alpha > 0$).

Soluzione. L'angolo di diffusione χ è uguale a $\chi = \pi - 2\varphi_0$, dove φ_0 è l'angolo tra i due asintoti della traiettoria (39,4). Troviamo quindi:

$$\chi = \pi - \frac{2cM}{\sqrt{c^2M^2 - \alpha^2}} \operatorname{arctg} \frac{v\sqrt{c^2M^2 - \alpha^2}}{c\alpha},$$

dove v è la velocità della carica all'infinito.

2. Determinare la sezione per la diffusione, da parte di un campo coulombiano per angoli.

Soluzione. La sezione $d\sigma$ è il rapporto tra il numero di particelle diffuse (in un secondo) nell'elemento dato do d'angolo solido e la densità del flusso di particelle incidenti (cioè il numero di particelle che attraversano in 1 s 1 cm^2 di sezione trasversale del fascio di particelle).

Siccome l'angolo di diffusione χ di una particella lanciata in un campo è determinato dal « parametro d'urto » ρ (cioè la distanza dal centro di diffusione alla retta che sarebbe descritta dalla particella in assenza di campo), si ha:

$$d\sigma = 2\pi\rho\, d\rho = 2\pi\rho \frac{d\rho}{d\chi} d\chi = \rho \frac{d\rho}{d\chi} \frac{do}{\operatorname{sen}\chi},$$

dove $do = 2\pi \operatorname{sen}\chi\, d\chi$ (vedi vol. I, *Meccanica*, § 18). L'angolo di diffusione può essere considerato (se è piccolo) uguale al rapporto fra l'incremento dell'impulso e il suo valore iniziale. L'incremento dell'impulso è uguale all'integrale rispetto al tempo della forza agente sulla carica perpendicolarmente alla direzione del moto; quest'ultima è approssimativamente uguale a $\frac{\alpha}{r^2}\frac{\rho}{r}$. Abbiamo quindi:

$$\chi = \frac{1}{p} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha\rho\, dt}{(\rho^2 + v^2t^2)^{3/2}} = \frac{2\alpha}{p\rho v}$$

(v è la velocità delle particelle). Da questa relazione troviamo la sezione di diffusione per angoli χ piccoli:

$$d\sigma = 4\left(\frac{\alpha}{pv}\right)^2 \frac{do}{\chi^4}.$$

Nel caso non relativistico $p \approx mv$, anche questa espressione coincide con quella data dalla formula di Rutherford per angoli χ piccoli (vedi vol. I, *Meccanica*, § 19).

§ 40. *Momento di dipolo*

Consideriamo il campo generato da un sistema di cariche a distanze grandi in confronto con le dimensioni del sistema.

Introduciamo un sistema di coordinate con l'origine all'interno del sistema di cariche. Siano $\mathbf{r}_a$ i raggi vettori delle singole cariche. Il potenziale del campo generato da tutte le cariche nel punto di

raggio vettore $\mathbf{R}_0$ è

$$\varphi = \sum \frac{e_a}{|\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}_a|} \tag{40,1}$$

(la sommatoria è estesa a tutte le cariche); $(\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}_a)$ sono qui i raggi vettori che uniscono la carica e_a al punto in cui si vuole calcolare il potenziale.

Poiché dobbiamo studiare questa espressione per grandi $\mathbf{R}_0$ $(\mathbf{R}_0 \gg \mathbf{r}_a)$, sviluppiamola in serie di potenze di $\mathbf{r}_a/R_0$ con l'aiuto della formula

$$f(\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}) \approx f(\mathbf{R}_0) - \mathbf{r}\,\mathrm{grad}\, f(\mathbf{R}_0)$$

(nel gradiente la derivazione va fatta rispetto alle coordinate dell'estremo del vettore $\mathbf{R}_0$). Abbiamo a meno di termini del secondo ordine:

$$\varphi = \frac{\sum e_a}{R_0} - \sum e_a \mathbf{r}_a\, \mathrm{grad}\, \frac{1}{R_0}. \tag{40,2}$$

La somma

$$\mathbf{d} = \sum e_a \mathbf{r}_a \tag{40,3}$$

è detta *momento didipolo* del sistema di cariche. È importante notare che se la somma $\sum e_a$ di tutte le cariche è nulla, il momento di dipolo non dipende dalla scelta dell'origine delle coordinate. Infatti, i raggi vettori $\mathbf{r}_a$ ed $\mathbf{r}'_a$ di una stessa carica in due sistemi di riferimento differenti sono legati tra di loro dalla relazione

$$\mathbf{r}'_a = \mathbf{r}_a + \mathbf{a},$$

dove $\mathbf{a}$ è un vettore costante. Di conseguenza, se $\sum e_a = 0$, il momento di dipolo è lo stesso in ambedue i sistemi:

$$\mathbf{d}' = \sum e_a \mathbf{r}'_a = \sum e_a \mathbf{r}_a + \mathbf{a} \sum e_a = \mathbf{d}.$$

Indicando con e_a^+, $\mathbf{r}_a^+$, e $-e_a^-$, $\mathbf{r}_a^-$ le cariche positive e negative e i loro raggi vettori, il momento di dipolo si può scrivere nella forma

$$\mathbf{d} = \sum e_a^+ \mathbf{r}_a^+ - \sum e_a^- \mathbf{r}_a^- = \mathbf{R}^+ \sum e_a^+ - \mathbf{R}^- \sum e_a^-, \tag{40,4}$$

dove

$$\mathbf{R}^+ = \frac{\sum e_a^+ \mathbf{r}_a^+}{\sum e_a^+}, \quad \mathbf{R}^- = \frac{\sum e_a^- \mathbf{r}^-}{\sum e_a^-} \tag{40,5}$$

sono i raggi vettori dei « centri di carica » per le cariche positive e negative. Se $\sum e_a^+ = \sum e_a^- = e$, allora

$$\mathbf{d} = e\mathbf{R}_{+-}, \tag{40,6}$$

dove $\mathbf{R}_{+-} = \mathbf{R}^+ - \mathbf{R}^-$ è il raggio vettore spiccato dal centro delle cariche negative al centro delle cariche positive. In particolare, se le

cariche sono soltano due, $\mathbf{R}_{+-}$ è in questo caso il raggio vettore tra di esse.

Se la carica totale del sistema è nulla, a grandi distanze il potenziale del campo è

$$\varphi = -\mathbf{d}\nabla\frac{1}{R_0} = \frac{\mathbf{dR}_0}{R_0^3}. \tag{40,7}$$

Per $\mathbf{E}$ si ottiene:

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\frac{\mathbf{dR}_0}{R_0^3} = -\frac{1}{R_0^3}\operatorname{grad}(\mathbf{dR}_0) - (\mathbf{dR}_0)\operatorname{grad}\frac{1}{R_0^3},$$

o, in definitiva,

$$\mathbf{E} = \frac{3(\mathbf{nd})\,\mathbf{n} - \mathbf{d}}{R_0^3}, \tag{40,8}$$

dove $\mathbf{n}$ è il vettore unitario nella direzione di $\mathbf{R}_0$. È opportuno notare che $\mathbf{E}$ può essere scritto, prima della derivazione, nella forma

$$\mathbf{E} = (\mathbf{d}\nabla)\,\nabla\frac{1}{R_0}. \tag{40,9}$$

In tal modo, il potenziale del campo generato da un sistema di carica totale nulla, a grandi distanze, è inversamente proporzionale al quadrato della distanza, ed $\mathbf{E}$ al suo cubo. Questo campo è dotato di simmetria assiale rispetto alla direzione $\mathbf{d}$. In un piano passante per questa direzione (che scegliamo come asse delle z) le componenti del vettore campo $\mathbf{E}$ sono:

$$E_z = d\frac{3\cos^2\theta - 1}{R_0^3}, \quad E_x = d\frac{3\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{R_0^3}. \tag{40,10}$$

Le componenti radiale e tangenziale in questo piano sono:

$$E_R = d\frac{2\cos\theta}{R_0^3}, \quad E_\theta = -d\frac{\operatorname{sen}\theta}{R_0^3}. \tag{40,11}$$

§ 41. *Momenti di multipolo*

Nello sviluppo del potenziale in serie di potenze di $1/R_0$

$$\varphi = \varphi^{(0)} + \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)} + \dots \tag{41,1}$$

il termine $\varphi^{(n)}$ è proporzionale a $1/R_0^{n+1}$. Abbiamo visto che il primo termine $\varphi^{(0)}$ è determinato dalla somma di tutte le cariche; il secondo termine, $\varphi^{(1)}$, detto potenziale di dipolo del sistema, è determinato dal suo momento di dipolo.

Il terzo termine dello sviluppo è

$$\varphi^{(2)} = \frac{1}{2}\sum e x_\alpha x_\beta \frac{\partial^2}{\partial X_\alpha\,\partial X_\beta}\frac{1}{R_0}, \tag{41,2}$$

dove la sommatoria è estesa a tutte le cariche; abbiamo omesso qui l'indice della carica; le x_α sono le componenti del vettore $\mathbf{r}$ e le X_α

del vettore $\mathbf{R}_0$. Se la somma delle cariche e il momento di dipolo del sistema sono nulli, lo sviluppo inizia allora a partire da $\varphi^{(2)}$.

L'espressione (41,2) comprende sei grandezze $\sum e x_\alpha x_\beta$. È facile vedere però che il campo dipende in realtà soltanto da cinque grandezze indipendenti, anziché da sei. Questa è una conseguenza del fatto che la funzione $1/R_0$ soddisfa l'equazione di Laplace

$$\Delta \frac{1}{R_0} \equiv \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \frac{1}{R_0} = 0.$$

Possiamo quindi scrivere il termine $\varphi^{(2)}$ nella forma

$$\varphi^{(2)} = \frac{1}{2} \sum e \left(x_\alpha x_\beta - \frac{1}{3} r^2 \delta_{\alpha\beta} \right) \frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \frac{1}{R_0}.$$

Il tensore

$$D_{\alpha\beta} = \sum e \left(3 x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta}\right) \tag{41,3}$$

è detto *momento di quadrupolo* del sistema. Dalla definizione di $D_{\alpha\beta}$ risulta che la somma delle sue componenti diagonali è nulla:

$$D_{\alpha\alpha} = 0. \tag{41,4}$$

Il tensore simmetrico $D_{\alpha\beta}$ ha quindi solo cinque componenti indipendenti; mediante questo tensore possiamo scrivere $\varphi^{(2)}$ nella forma:

$$\varphi^{(2)} = \frac{D_{\alpha\beta}}{6} \frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \frac{1}{R_0} \tag{41,5}$$

o, derivando

$$\frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \frac{1}{R_0} = \frac{3 X_\alpha X_\beta}{R_0^5} - \frac{\delta_{\alpha\beta}}{R_0^3}$$

e tenendo conto che $\delta_{\alpha\beta} D_{\alpha\beta} = D_{\alpha\alpha} = 0$,

$$\varphi^{(2)} = \frac{D_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta}{2 R_0^3}. \tag{41,6}$$

Come qualsiasi tensore simmetrico tridimensionale, il tensore $D_{\alpha\beta}$ può essere riferito agli assi principali. Allora, in virtú della condizione (41,4), nel caso generale soltanto due dei tre valori principali sono indipendenti. Quando il sistema di cariche è simmetrico rispetto ad un asse (l'asse delle z)[1]), questo asse diventa allora uno degli assi principali del tensore $D_{\alpha\beta}$, mentre la posizione degli altri due assi nel piano xy è arbitraria, e i tre valori principali sono legati dalla relazione

$$D_{xx} = D_{yy} = -\frac{1}{2} D_{zz}. \tag{41,7}$$

---

[1]) Si tratta di un asse di simmetria di qualsiasi ordine superiore al secondo.

Indicando la componente D_{zz} con D (chiamata abitualmente in questo caso momento di quadrupolo), otteniamo il potenziale nella forma

$$\varphi^{(2)} = \frac{D}{4R_0^3}(3\cos^2\theta - 1) = \frac{D}{2R_0^3} P_2(\cos\theta), \tag{41,8}$$

dove θ è l'angolo tra $\mathbf{R}_0$ e l'asse delle z, e P_2 un polinomio di Legendre.

Come è stato fatto per il momento di dipolo nel paragrafo precedente, è facile provare che il momento di quadrupolo di un sistema non dipende dalla scelta dell'origine delle coordinate allorché sono nulli sia la carica totale che il momento di dipolo del sistema.

Analogamente si potrebbero scrivere i termini successivi dello sviluppo (41,1). L'l-esimo termine dello sviluppo è determinato da un tensore (detto tensore momento di 2^l-polo) d'ordine l, simmetrico rispetto a tutti i suoi indici, le cui contrazioni di ogni coppia di indici sono nulle; si può dimostrare che un tale tensore ha $2l+1$ componenti indipendenti[1]).

Scriviamo qui il termine generale dello sviluppo del potenziale sotto un'altra forma, utilizzando la seguente formula per le funzioni sferiche

$$\frac{1}{|\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}|} = \frac{1}{\sqrt{R_0^2 + r^2 - 2rR_0\cos\chi}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l}{R_0^{l+1}} P_l(\cos\chi), \tag{41,9}$$

dove χ è l'angolo tra $\mathbf{R}_0$ ed $\mathbf{r}$. Introduciamo gli angoli sferici Θ, Φ e θ, φ formati rispettivamente dai vettori $\mathbf{R}_0$ ed $\mathbf{r}$ con gli assi coordinati fissati, ed applichiamo la formula di addizione per le funzioni sferiche:

$$P_l(\cos\chi) = \sum_{m=-l}^{l} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!} P_l^{|m|}(\cos\Theta) P_l^{|m|}(\cos\theta) e^{-im(\Phi-\varphi)}, \tag{41,10}$$

dove P_l^m sono i polinomi associati di Legendre. Introduciamo anche le funzioni sferiche[2]):

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = (-1)^m i^l \sqrt{\frac{2l+1}{2}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) e^{im\varphi}, \quad m \geqslant 0,$$
$$Y_{l,-|m|}(\theta, \varphi) = (-1)^{l-m} Y^*_{l|m|}. \tag{41,11}$$

---

[1]) Un tensore di questo tipo è detto irriducibile. L'annullarsi di tutte le sue contrazioni significa che le sue componenti non permettono di formare le componenti di un tensore d'ordine inferiore.

[2]) In accordo con la definizione usata in meccanica quantistica.

Lo sviluppo (41,9) assume allora la forma

$$\frac{1}{|\mathbf{R}_0-\mathbf{r}|}=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{r^l}{R_0^{l+1}}\frac{4\pi}{2l+1}Y_{lm}^*(\Theta,\Phi)\,Y_{lm}(\theta,\varphi).$$

Sviluppando cosí ciascun termine della somma (40,1), otteniamo in definitiva la seguente espressione per l'l-esimo termine dello sviluppo del potenziale:

$$\varphi^{(l)}=\frac{1}{R_0^{l+1}}\sum_{m=-l}^{l}\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\,Q_m^{(l)}Y_{lm}^*(\Theta,\Phi), \tag{41,12}$$

dove

$$Q_m^{(l)}=\sum_a e_a r_a^l\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\,Y_{lm}(\theta_a,\varphi_a). \tag{41.13}$$

L'insieme delle $2l+1$ grandezze $Q_m^{(l)}$ costituisce il momento di 2^l-polo del sistema di cariche.

Le grandezze $Q_m^{(1)}$ cosí determinate sono legate alle componenti del vettore momento dipolare **d** dalle formule:

$$Q_0^{(1)}=id_z,\quad Q_{\pm1}^{(1)}=\mp\frac{1}{\sqrt{2}}(d_x\pm id_y). \tag{41,14}$$

Quanto alle grandezze $Q_m^{(2)}$, esse sono legate alle componenti del tensore $D_{\alpha\beta}$ dalle relazioni:

$$\begin{gathered}Q_0^{(2)}=-\frac{1}{2}D_{zz},\quad Q_{\pm1}^{(2)}=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}(D_{xz}\pm iD_{yz}),\\ Q_{\pm2}^{(2)}=-\frac{1}{2\sqrt{6}}(D_{xx}-D_{yy}\pm 2iD_{xy}).\end{gathered} \tag{41,15}$$

PROBLEMA

Determinare il momento di quadrupolo di un ellissoide uniformemente carico rispetto al suo centro.

Soluzione. **Sostituendo nella (41,3) la sommatoria con una integrazione estesa al volume dell'ellisoide, abbiamo:**

$$D_{xx}=\rho\int(2x^2-y^2-z^2)\,dx\,dy\,dz,\ \text{ecc.}$$

Prendiamo per assi coordinati gli assi dell'ellissoide con il suo centro per origine; per ragioni di simmetria è evidente che questi assi sono gli assi principali del tensore $D_{\alpha\beta}$. La trasformazione

$$x=x'a,\ y=y'b,\ z=z'c$$

riduce l'integrazione estesa al volume dell'ellissoide

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

all'integrazione estesa al volume della sfera di raggio 1

$$x'^2+y'^2+z'^2=1.$$

Otteniamo quindi

$$D_{xx}=\frac{e}{5}(2a^2-b^2-c^2),\quad D_{yy}=\frac{e}{5}(2b^2-a^2-c^2),$$

$$D_{zz}=\frac{e}{5}(2c^2-a^2-b^2),$$

dove $e=\frac{4\pi}{3}abc\rho$ è la carica totale dell'ellissoide.

§ 42. *Sistema di cariche in un campo esterno*

Esaminiamo un sistema di cariche che si trova in un campo elettrico esterno. Indichiamo con $\varphi(\mathbf{r})$ il potenziale di questo campo esterno. L'energia potenziale di ciascuna delle cariche è $e_a\varphi(\mathbf{r}_a)$, e l'energia potenziale totale del sistema

$$U=\sum_a e_a\varphi(\mathbf{r}_a). \tag{42,1}$$

Scegliamo inoltre un sistema di coordinate avente per origine un punto all'interno del sistema di cariche; $\mathbf{r}_a$ sarà il raggio vettore della carica e_a in questo sistema di coordinate.

Supponiamo che il campo esterno varii debolmente nella regione dove si trova il sistema di cariche, cioè che esso sia quasi uniforme rispetto a questo sistema. Possiamo allora sviluppare l'energia U in serie di potenze di $\mathbf{r}_a$:

$$U=U^{(0)}+U^{(1)}+U^{(2)}+\ldots \tag{42,2}$$

In questo sviluppo il primo termine è

$$U^{(0)}=\varphi_0\sum_a e_a, \tag{42,3}$$

dove φ_0 è il valore del potenziale nell'origine delle coordinate. In questa approssimazione, l'energia del sistema è la stessa che si avrebbe se tutte le cariche fossero riunite in un solo punto.

Il secondo termine dello sviluppo è

$$U^{(1)}=(\operatorname{grad}\varphi)_0\cdot\sum e_a\mathbf{r}_a.$$

Introducendo nell'origine delle coordinate il vettore campo elettrico $\mathbf{E}_0$ e il momento dipolare $\mathbf{d}$ del sistema, abbiamo:

$$U^{(0)}=-\mathbf{d}\mathbf{E}_0. \tag{42,4}$$

La forza totale agente sul sistema in un campo esterno quasi uniforme è, a meno dei termini considerati,

$$\mathbf{F}=\mathbf{E}_0\sum e_a+(\operatorname{grad}\mathbf{d}\mathbf{E})_0.$$

Se la carica totale è nulla, il primo termine si elide e si ha allora:

$$\mathbf{F} = (\mathbf{d}\nabla)\,\mathbf{E}, \tag{42,5}$$

cioè la forza è determinata dalle derivate del vettore campo elettrico (calcolate nell'origine delle coordinate). Il momento totale delle forze agenti sul sistema è

$$\mathbf{K} = \sum [\mathbf{r}_a \cdot e_a \mathbf{E}_0) = [\mathbf{d}\mathbf{E}_0], \tag{42,6}$$

cioè è determinato dallo stesso vettore campo elettrico.

Consideriamo due sistemi, ciascuno di carica totale nulla e con momenti di dipolo $\mathbf{d}_1$ e $\mathbf{d}_2$ (la distanza tra questi sistemi è grande rispetto alle loro dimensioni). Determiniamo l'energia potenziale U della loro interazione. A questo scopo, si può operare supponendo che uno di questi sistemi si trovi nel campo dell'altro. Allora

$$U = -\mathbf{d}_2\mathbf{E}_1,$$

dove $\mathbf{E}_1$ è il campo del primo sistema. Sostituendo $\mathbf{E}_1$ con la sua espressione (40,8), troviamo:

$$U = \frac{(\mathbf{d}_1\mathbf{d}_2)\,R^2 - 3(\mathbf{d}_1\mathbf{R})\,(\mathbf{d}_2\mathbf{R})}{R^5}, \tag{42,7}$$

dove $\mathbf{R}$ è il vettore distanza tra i due sistemi.

Nel caso in cui la carica totale di uno dei sistemi non è nulla (uguale ad e), in modo analogo otteniamo:

$$U = e\,\frac{\mathbf{d}\mathbf{R}}{R^3}, \tag{42,8}$$

dove $\mathbf{R}$ è il vettore che va dal dipolo alla carica.

Il termine successivo dello sviluppo (42,1) è

$$U^{(2)} = \frac{1}{2}\sum e x_\alpha x_\beta \frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}.$$

Come nel § 41, abbiamo omesso qui gli indici delle cariche; le derivate seconde del potenziale vanno calcolate nell'origine delle coordinate. Poiché il potenziale φ soddisfa l'equazione di Laplace

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\alpha^2} = \delta_{\alpha\beta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta} = 0,$$

possiamo scrivere:

$$U^{(2)} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}\sum e\left(x_\alpha x_\beta - \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}r^2\right),$$

ovvero,

$$U^{(2)} = \frac{D_{\alpha\beta}}{6}\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}. \tag{42,9}$$

Il termine generale della serie (42,2) può essere espresso mediante i momenti 2^l-polo $D_m^{(l)}$, determinati nel paragrafo precedente.

A questo scopo, bisogna preliminarmente sviluppare il potenziale $\varphi(\mathbf{r})$ in serie di funzioni sferiche; l'espressione di questo sviluppo è

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} r^l \sum_{m=-l}^{l} a_{lm} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\, Y_{lm}(\theta, \varphi), \tag{42,10}$$

dove r, θ, φ sono le coordinate sferiche, ed a_{lm} coefficienti costanti. Scrivendo la somma (42,1) e tenendo conto della definizione (41,13), otteniamo:

$$U^{(l)} = \sum_{m=-l}^{l} a_{lm} Q_m^{(l)}. \tag{42,11}$$

§ 43. *Campo magnetico costante*

Consideriamo il campo magnetico generato da cariche che compiono un moto finito, durante il quale le particelle restano sempre in una regione finita dello spazio; gli impulsi delle cariche restano pure finiti. Un moto di questo tipo è di carattere stazionario, ed è interessante determinare il campo magnetico medio $\overline{\mathbf{H}}$ (rispetto al tempo) creato dalle cariche, questo campo sarà quindi funzione delle sole coordinate, e non del tempo, cioè sarà costante.

Per trovare l'equazione che determina il campo magnetico medio, prendiamo la media delle equazioni di Maxwell rispetto al tempo:

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}.$$

La prima di esse dà semplicemente

$$\operatorname{div} \overline{\mathbf{H}} = 0. \tag{43,1}$$

Nella seconda equazione, il valore medio della derivata $\partial \mathbf{E}/\partial t$, come avviene sempre per la media della derivata di qualsiasi grandezza che varii in un intervallo finito, è nulla (vedi la nota alla pag. 119) Per questo la seconda equazione di Maxwell assume la forma

$$\operatorname{rot} \overline{\mathbf{H}} = \frac{4\pi}{c}\overline{\mathbf{j}}. \tag{43,2}$$

Le due equazioni ottenute determinano il campo costante $\overline{\mathbf{A}}$.

Introduciamo il potenziale vettore medio $\overline{\mathbf{A}}$ mediante la relazione

$$\operatorname{rot} \overline{\mathbf{A}} = \overline{\mathbf{H}}.$$

Sostituendo questa espressione nell'equazione (43,2), otteniamo:

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \overline{\mathbf{A}} - \Delta \overline{\mathbf{A}} = \frac{4\pi}{c}\overline{\mathbf{j}}.$$

Sappiamo però che il potenziale vettore di un campo non è determinato univocamente; questo fatto ci permette di imporre una condizione supplementare. Scegliamo quindi il potenziale $\overline{\mathbf{A}}$ in maniera che soddisfi la condizione:

$$\operatorname{div} \overline{\mathbf{A}} = 0. \tag{43,3}$$

Allora, l'equazione determinante il potenziale vettore di un campo magnetico costante assume la forma

$$\Delta \overline{\mathbf{A}} = -\frac{4\pi}{c} \overline{\mathbf{j}}. \tag{43,4}$$

È facile trovare la soluzione di questa equazione se si nota che la (43,4) è del tutto analoga all'equazione di Poisson (36,4) per il potenziale scalare di un campo elettrico costante, con la sola differenza che, al posto della densità di carica ρ, abbiamo la densità di corrente $\overline{\mathbf{j}}/c$. Per analogia con la soluzione dell'equazione di Poisson (36,8), possiamo scrivere:

$$\overline{\mathbf{A}} = \frac{1}{c} \int \frac{\overline{\mathbf{j}}}{R} dV, \tag{43,5}$$

dove R è la distanza tra il punto d'osservazione del campo e l'elemento di volume dV.

Nella formula (43,5) si può passare dall'integrale ad una somma estesa alle cariche, sostituendo $\mathbf{j}$ con il prodotto $\rho \cdot \mathbf{v}$ e prendendo in considerazione che tutte le cariche sono puntiformi. È inoltre necessario tener presente che nell'integrale (43,5) R è semplicemente una variabile d'integrazione e non si può quindi prenderne la media. Se al posto dell'integrale $\int \frac{\mathbf{j}}{R} dV$ si scrive la somma $\sum \frac{e_a \mathbf{v}_a}{R_a}$, le R_a saranno i raggi vettori variabili delle singole cariche in moto. Bisogna, di conseguenza, scrivere:

$$\overline{\mathbf{A}} = \frac{1}{c} \sum \overline{\frac{e_a \mathbf{v}_a}{R_a}}, \tag{43,6}$$

dove la media è presa su tutte le grandezze segnate con un tratto.

Conoscendo $\overline{\mathbf{A}}$, si può trovare il vettore campo magnetico:

$$\overline{\mathbf{H}} = \operatorname{rot} \overline{\mathbf{A}} = \operatorname{rot} \frac{1}{c} \int \overline{\frac{\mathbf{j}}{R}} dV.$$

Il rotore viene preso rispetto alle coordinate del punto d'osservazione. Si può quindi portare il rotore sotto il segno d'integrazione e considerare $\mathbf{j}$ come costante nella derivazione. Applicando al prodotto $\overline{\mathbf{j}} \cdot \frac{1}{R}$ la nota formula

$$\operatorname{rot} f\mathbf{a} = f \operatorname{rot} \mathbf{a} + [\operatorname{grad} f \cdot \mathbf{a}],$$

dove f ed $\mathbf{a}$ sono uno scalare e un vettore arbitrari, troviamo:

$$\operatorname{rot}\overline{\frac{\mathbf{j}}{R}}=\left[\operatorname{grad}\frac{1}{R}\cdot\overline{\mathbf{j}}\right]=\frac{[\overline{\mathbf{j}}\mathbf{R}]}{R^3},$$

e, di conseguenza,

$$\overline{\mathbf{H}}=\frac{1}{c}\int\frac{[\overline{\mathbf{j}}\mathbf{R}]}{R^3}\,dV \tag{43,7}$$

(il raggio vettore $\mathbf{R}$ è tracciato da dV al punto d'osservazione del campo). Questa è la *legge di Biot e Savart.*

§ 44. *Momento magnetico*

Consideriamo il campo magnetico medio generato da un sistema di cariche che compiono un moto stazionario a grandi distanze dal sistema.

Prendiamo un sistema di coordinate la cui origine si trova in un punto all'interno del sistema di cariche, come abbiamo già fatto nel § 40. Indichiamo ancora con $\mathbf{r}_a$ i raggi vettori delle singole cariche e con $\mathbf{R}_0$ il raggio vettore del punto in cui si vuole determinare il campo. $\mathbf{R}_0-\mathbf{r}_a$ è il raggio vettore della carica e_a al punto d'osservazione. In virtú della (43,6), per il potenziale vettore abbiamo:

$$\overline{\mathbf{A}}=\frac{1}{c}\sum\frac{\overline{e_a\mathbf{v}_a}}{|\mathbf{R}_0-\mathbf{r}_a|}. \tag{44,1}$$

Come nel § 40, sviluppiamo questa espressione in serie di potenze di $\mathbf{r}_a$. Otteniamo a meno dei termini del secondo ordine (omettiamo per brevità l'indice a):

$$\overline{\mathbf{A}}=\frac{1}{cR_0}\sum e\overline{\mathbf{v}}-\frac{1}{c}\sum\overline{e\mathbf{v}\left(\mathbf{r}\nabla\frac{1}{R_0}\right)}.$$

Nel primo termine si può scrivere:

$$\sum e\overline{\mathbf{v}}=\overline{\frac{d}{dt}\sum e\mathbf{r}}.$$

Il valore medio della derivata della grandezza $\sum e\mathbf{r}$, che varia in un intervallo finito, è nullo. Per $\overline{\mathbf{A}}$ resta quindi l'espressione

$$\overline{\mathbf{A}}=-\frac{1}{c}\sum\overline{e\mathbf{v}\left(\mathbf{r}\nabla\frac{1}{R_0}\right)}=\frac{1}{cR_0^3}\sum\overline{e\mathbf{v}(\mathbf{r}\mathbf{R}_0)}$$

che possiamo trasformare nel seguente modo. Notando che $\mathbf{v}=\dot{\mathbf{r}}$, possiamo scrivere (tenendo presente che $\mathbf{R}_0$ è un vettore costante):

$$\sum e(\mathbf{R}_0\mathbf{r})\,\mathbf{v}=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum\mathbf{r}(\mathbf{r}\mathbf{R}_0)+\frac{1}{2}\sum e\,[\mathbf{v}(\mathbf{r}\mathbf{R}_0)-\mathbf{r}(\mathbf{v}\mathbf{R}_0)].$$

Sostituendo questa espressione in $\overline{\mathbf{A}}$, il valore medio del primo termine (contenente la derivata rispetto al tempo) si annulla e si ha:

$$\overline{\mathbf{A}} = \frac{\mu}{2cR_0^3} \sum e\,[\overline{\mathbf{v}\,(\mathbf{r}\mathbf{R}_0)} - \overline{\mathbf{r}\,(\mathbf{v}\mathbf{R}_0)}].$$

Introducendo il vettore

$$\mathfrak{m} = \frac{1}{2c} \sum e\,[\mathbf{r}\mathbf{v}], \tag{44,2}$$

detto *momento magnetico* del sistema, abbiamo:

$$\overline{\mathbf{A}} = \frac{[\overline{\mathfrak{m}}\mathbf{R}_0]}{R_0^3} = \left[\nabla \frac{1}{R_0} \cdot \overline{\mathfrak{m}}\right]. \tag{44,3}$$

Conoscendo il potenziale vettore, è facile trovare il vettore campo magnetico. Con l'aiuto della formula

$$\operatorname{rot}[\mathbf{a}\mathbf{b}] = (\mathbf{b}\nabla)\,\mathbf{a} - (\mathbf{a}\nabla)\,\mathbf{b} + \mathbf{a}\operatorname{div}\mathbf{b} - \mathbf{b}\operatorname{div}\mathbf{a}$$

troviamo:

$$\overline{\mathbf{H}} = \operatorname{rot}\left[\overline{\mathfrak{m}}\,\frac{\mathbf{R}_0}{R_0^3}\right] = \overline{\mathfrak{m}}\operatorname{div}\frac{\mathbf{R}_0}{R_0^3} - (\overline{\mathfrak{m}}\nabla)\,\frac{\mathbf{R}_0}{R_0^3}.$$

Quindi:

$$\operatorname{div}\frac{\mathbf{R}_0}{R_0^3} = \mathbf{R}_0 \operatorname{grad}\frac{1}{R_0^3} + \frac{1}{R_0^3}\operatorname{div}\mathbf{R}_0 = 0$$

e

$$(\overline{\mathfrak{m}}\nabla)\,\frac{\mathbf{R}_0}{R_0^3} = \frac{1}{R_0^3}\,(\overline{\mathfrak{m}}\nabla)\,\mathbf{R}_0 + \mathbf{R}_0\left(\overline{\mathfrak{m}}\nabla\,\frac{1}{R_0^3}\right) = \frac{\overline{\mathfrak{m}}}{R_0^3} - \frac{3\mathbf{R}_0\,(\overline{\mathfrak{m}}\mathbf{R}_0)}{R_0^5}.$$

Dunque,

$$\overline{\mathbf{H}} = \frac{3\mathbf{n}\,(\overline{\mathfrak{m}}\mathbf{n}) - \overline{\mathfrak{m}}}{R_0^3}, \tag{44,4}$$

dove $\mathbf{n}$ è il versore di $\mathbf{R}_0$. Si vede che il campo magnetico si esprime in funzione del momento magnetico mediante una formula analoga a quella che esprime il campo elettrico in funzione del momento di dipolo [cfr. (40,8)].

Se il rapporto fra tutte le cariche del sistema e la massa è lo stesso, si può scrivere:

$$\mathfrak{m} = \frac{1}{2c} \sum e\,[\mathbf{r}\mathbf{v}] = \frac{e}{2mc} \sum m\,[\mathbf{r}\mathbf{v}].$$

Se le velocità di tutte le cariche sono $v \ll c$, $m\mathbf{v}$ è allora l'impulso $\mathbf{p}$ della carica, e si ha:

$$\mathfrak{m} = \frac{e}{2mc} \sum [\mathbf{r}\mathbf{p}] = \frac{e}{2mc}\,\mathbf{M}, \tag{44,5}$$

dove $\mathbf{M} = \sum [\mathbf{r}\mathbf{p}]$ è il momento angolare del sistema. In questo caso, il rapporto fra il momento magnetico e il momento angolare è quindi costante ed è uguale a $e/2mc$.

PROBLEMA

Determinare il rapporto fra momento magnetico e momento angolare per un sistema di due cariche (aventi velocità $v \ll c$).

Soluzione. Scegliamo per origine delle coordinate il centro di massa delle due cariche; avremo $m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 = 0$ e $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}$, dove $\mathbf{p}$ è l'impulso del moto relativo. Queste relazioni ci permettono di trovare:

$$\mathfrak{m} = \frac{1}{2c}\left(\frac{e_1}{m_1^2} + \frac{e_2}{m_2^2}\right)\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{M}.$$

§ 45. *Teorema di Larmor*

Consideriamo un sistema di cariche che si trova in un campo magnetico esterno costante e uniforme.

La forza media (nel tempo) agente sul sistema

$$\overline{\mathbf{F}} = \sum \frac{e}{c}\overline{[\mathbf{vH}]} = \overline{\frac{d}{dt}\sum \frac{e}{c}[\mathbf{rH}]},$$

si annulla in quanto valore medio della derivata rispetto al tempo di una grandezza che varia in un intervallo finito. Il valore medio del momento delle forze

$$\overline{\mathbf{K}} = \sum \frac{e}{c}\overline{[\mathbf{r}[\mathbf{vH}]]}$$

è, invece, differente da zero e può essere espresso in funzione del momento magnetico del sistema. A tale scopo, sviluppiamo il doppio prodotto vettoriale:

$$\mathbf{K} = \sum \frac{e}{c}\{\mathbf{v}(\mathbf{rH}) - \mathbf{H}(\mathbf{vr})\} = \sum \frac{e}{c}\left\{\mathbf{v}(\mathbf{rH}) - \frac{1}{2}\mathbf{H}\frac{d}{dt}\mathbf{r}^2\right\}.$$

Il secondo termine si annulla quando se ne consideri la media, e quindi:

$$\overline{\mathbf{K}} = \sum \frac{e}{c}\overline{\mathbf{v}(\mathbf{rH})} = \frac{1}{2c}\sum e\{\overline{\mathbf{v}(\mathbf{rH})} - \overline{\mathbf{r}(\mathbf{vH})}\}$$

[quest'ultima trasformazione è analoga a quella fatta per ottenere la (44,3)], ossia

$$\overline{\mathbf{K}} = [\overline{\mathfrak{m}}\mathbf{H}]. \qquad (45,1)$$

Notiamo l'analogia con la formula (42,6) del caso elettrico.

La lagrangiana di un sistema di cariche in un campo magnetico esterno costante e uniforme contiene il termine supplementare (rispetto alla lagrangiana di un sistema isolato)

$$L_H = \sum \frac{e}{c}\mathbf{Av} = \sum \frac{e}{2c}[\mathbf{Hr}]\mathbf{v} = \sum \frac{e}{2c}[\mathbf{rv}]\mathbf{H} \qquad (45,2)$$

(ci siamo serviti dell'espressione (19,4) per il potenziale vettore di un campo uniforme). Introducendo il momento magnetico del sistema, abbiamo:

$$L_H = \mathbf{mH}. \tag{45,3}$$

Notiamo ancora l'analogia con il campo elettrico: in un campo elettrico uniforme, la lagrangiana di un sistema di carica totale e momento di dipolo nulli contiene il termine

$$L_E = \mathbf{dE}$$

che è, in questo caso, l'energia potenziale del sistema di cariche, preceduta dal segno meno (vedi § 42).

Consideriamo un sistema di cariche animate da un moto finito (con velocità $v \ll c$) nel campo elettrico a simmetria centrale generato da una particella fissa.

Passiamo dal sistema di coordinate immobile ad un sistema uniformemente rotante intorno ad un asse passante per la particella fissa. Secondo una formula nota dalla meccanica, la velocità $\mathbf{v}$ di una particella nel nuovo sistema di coordinate è legata alla sua velocità $\mathbf{v}'$ nel vecchio sistema dalla relazione

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + [\mathbf{\Omega r}],$$

dove $\mathbf{r}$ è il raggio vettore della particella ed $\mathbf{\Omega}$ la velocità angolare del sistema di coordinate rotante. Nel sistema immobile la lagrangiana del sistema di cariche è

$$L = \sum \frac{mv'^2}{2} - U,$$

dove U è l'energia potenziale delle cariche nel campo elettrico esterno, ivi compresa la loro energia d'interazione. U è una funzione delle distanze delle cariche dalla particella fissa e delle loro distanze reciproche; quando si passa al sistema di coordinate rotante, essa resta evidentemente invariata. Di conseguenza, nel nuovo sistema la lagrangiana assume la forma

$$L = \sum \frac{m}{2} (\mathbf{v} + [\mathbf{\Omega r}])^2 - U.$$

Supponiamo che il rapporto e/m sia lo stesso per tutte le particelle, e poniamo

$$\mathbf{\Omega} = \frac{e}{2mc} \mathbf{H}. \tag{45,4}$$

Allora, per H sufficientemente piccoli (quando si possono trascurare i termini con H^2), la lagrangiana diventa

$$L = \sum \frac{mv^2}{2} + \frac{1}{2c} \sum e\,[\mathbf{Hr}]\,\mathbf{v} - U.$$

Si vede che essa coincide con la lagrangiana che permette di descrivere il moto delle cariche considerate in un sistema di coordinate immobile in presenza di un campo magnetico [cfr. (45,2)].

Arriviamo quindi al risultato che, nel caso non relativistico, il comportamento di un sistema di cariche aventi lo stesso rapporto e/m e animate da un moto finito in un campo elettrico a simmetria centrale e in un campo magnetico debole e uniforme $\mathbf{H}$ è equivalente al comportamento dello stesso sistema di cariche in questo stesso campo elettrico, riferito ad un sistema di coordinate uniformemente rotante con velocità angolare (45,4). Questa asserzione costituisce il contenuto del *teorema di Larmor*, e la velocità angolare $\Omega = eH/2mc$ è detta *frequenza di Larmor*.

Questo problema può essere trattato da un altro punto di vista. Quando il campo magnetico H è abbastanza debole, la frequenza di Larmor è piccola rispetto alle frequenze del moto finito del sistema di cariche dato, e le grandezze relative a questo sistema, di cui si prendono le medie rispetto ai tempi, si possono considerare piccole rispetto al periodo $2\pi/\Omega$. Queste grandezze varieranno lentamente (con la frequenza Ω) col tempo.

Consideriamo la variazione del momento angolare medio $\mathbf{M}$ del sistema. In virtú di una nota equazione della meccanica, la derivata $\dot{\mathbf{M}}$ è uguale al momento $\mathbf{K}$ delle forze agenti sul sistema. In virtú della formula (45,1) si ha quindi:

$$\frac{d\overline{\mathbf{M}}}{dt} = \overline{\mathbf{K}} = [\overline{\mathfrak{m}}\mathbf{H}].$$

Se il rapporto e/m di tutte le particelle è uguale per tutte le cariche del sistema, i momenti angolare e magnetico sono reciprocamente proporzionali, e le formule (44,5) e (45,4) ci danno:

$$\frac{d\overline{\mathbf{M}}}{dt} = -[\Omega\overline{\mathbf{M}}]. \tag{45,5}$$

Questa equazione significa che il vettore $\overline{\mathbf{M}}$ (e con esso il momento magnetico $\overline{\mathfrak{m}}$) ruota con la velocità angolare $-\Omega$ intorno alla direzione del campo, conservando invariato il suo valore assoluto e l'angolo da esso formato con questa direzione (la cosiddetta *precessione di Larmor*).

Capitolo VI

ONDE ELETTROMAGNETICHE

§ 46. *Equazione d'onda*

Un campo elettromagnetico nel vuoto è determinato dalle equazioni di Maxwell nelle quali bisogna porre $\rho = 0$, $\mathbf{j} = 0$. Scriviamole ancora una volta:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \tag{46,1}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 0. \tag{46,2}$$

Queste equazioni possono avere soluzioni differenti da zero. Ciò vuol dire che il campo elettromagnetico può esistere anche in assenza di cariche.

Un campo elettromagnetico nel vuoto in assenza di cariche prende il nome di *onda elettromagnetica*. Ci occuperemo ora dello studio delle proprietà di questi campi.

Notiamo subito che questi campi debbono essere necessariamente variabili. Infatti, in caso contrario $\partial \mathbf{H}/\partial t = \partial \mathbf{E}/\partial t = 0$, e le equazioni (46,1) e (46,2) si trasformano nelle equazioni (36,1) (36,2) e (43,1), (43,2) di un campo costante, nelle quali $\rho = 0$, $\mathbf{j} = 0$. Le soluzioni di queste equazioni, determinate dalle formule (36,8) e (43,5), si annullano identicamente per $\rho = 0$, $\mathbf{j} = 0$.

Troviamo le equazioni che determinano i potenziali delle onde elettromagnetiche.

Come già sappiamo: in virtú della non univocità dei potenziali, si può sempre imporre una condizione supplementare. Quindi, scegliamo i potenziali delle onde elettromagnetiche in maniera tale che il potenziale scalare sia nullo:

$$\varphi = 0. \tag{46,3}$$

Allora

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \tag{46,4}$$

Sostituendo queste due espressioni nella prima delle equazioni (46,2), troviamo:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathbf{A} = -\Delta \mathbf{A} + \operatorname{grad}\operatorname{div} \mathbf{A} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}. \tag{46,5}$$

Sebbene abbiamo già imposto una condizione supplementare ai potenziali, il potenziale **A** non è ancora definito univocamente. Infatti è possibile aggiungere a questo potenziale il gradiente di una funzione qualsiasi non dipendente dal tempo (senza però cambiare φ). In particolare, si può scegliere il potenziale di un'onda elettromagnetica in modo tale che

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \tag{46,6}$$

Infatti, sostituendo **E** ricavato dalla (46,4) in div **E** = 0, abbiamo:

$$\operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{A} = 0,$$

cioè div **A** è una funzione delle sole coordinate. Si può sempre annullare questa funzione aggiungendo ad **A** il gradiente di una corrispondente funzione non dipendente dal tempo.

L'equazione (46,5) assume ora la forma

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0. \tag{46,7}$$

Questa è l'equazione che determina il potenziale delle onde elettromagnetiche. Essa è detta *equazione di D'Alembert* o *equazione d'onda*[1]).

Applicando alla (46,7) le operazioni rot e $\partial/\partial t$, possiamo verificare che i vettori campo **E** ed **H** soddisfano le stesse equazioni d'onda.

Ripetiamo la deduzione dell'equazione d'onda in forma quadridimensionale. A tale scopo scriviamo la seconda coppia di equazioni di Maxwell per un campo in assenza di cariche nella forma

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = 0$$

(l'equazione (30,2) con $j^i = 0$). Sostituendo qui F^{ik} espressi in funzione dei potenziali:

$$F^{ik} = \frac{\partial A^k}{\partial x_i} - \frac{\partial A^i}{\partial x_k},$$

otteniamo:

$$\frac{\partial^2 A^k}{\partial x_i \, \partial x^k} - \frac{\partial^2 A^i}{\partial x_k \, \partial x^k} = 0. \tag{46,8}$$

Imponiamo ai potenziali la condizione supplementare

$$\frac{\partial A^k}{\partial x^k} = 0 \tag{46,9}$$

---

[1]) L'equazione d'onda si scrive talvolta nella forma $\Box \mathbf{A} = 0$, dove

$$\Box = -\frac{\partial^2}{\partial x_i \, \partial x^i} = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

è il cosiddetto *operatore di D'Alembert*.

(questa condizione è detta condizione di Lorentz, e i potenziali che soddisfano questa condizione sono detti potenziali *nella gauge di Lorentz*). Di conseguenza, nell'equazione (46,8) si annulla il primo termine e resta

$$\frac{\partial^2 A^i}{\partial x_k\, \partial x^k} \equiv g^{kl} \frac{\partial^2 A^i}{\partial x^k\, \partial x^l} = 0. \qquad (46,10)$$

Questa è l'equazione d'onda scritta in forma quadridimensionale[1]).

La condizione (46,9) in notazioni tridimensionali assume la forma:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \qquad (46,11)$$

Questa condizione è più generale anziché le condizioni sopra utilizzate: $\varphi = 0$, div $\mathbf{A} = 0$; i potenziali che soddisfano quest'ultime soddisfano pure la condizione (46,11). A differenza di esse, la condizione di Lorentz è però invariante dal punto di vista relativistico: i potenziali che soddisfano la condizione di Lorentz in un sistema di riferimento la soddisfano anche in qualsiasi altro sistema (mentre le condizioni (46,3) e (46,6) non si verificano per una trasformazione del sistema di riferimento).

§ 47. *Onde piane*

Esaminiamo il caso particolare di onde elettromagnetiche in cui il campo dipende da una sola coordinata, per esempio da x (e dal tempo). Le onde di questo tipo sono dette *piane*. Le equazioni del campo assumono allora la forma

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \qquad (47,1)$$

dove con f si intende una qualsiasi componente dei vettori **E** o **H**. Per risolvere questa equazione, risriviamola nella forma

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right) f = 0$$

ed introduciamo le nuove variabili

$$\xi = t - \frac{x}{c}, \qquad \eta = t + \frac{x}{c},$$

---

[1]) Bisogna notare che la condizione (46,9) non determina ancora la scelta dei potenziali in un modo del tutto univoco. Si può aggiungere ad **A** grad f e sottrarre da φ contemporaneamente $\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}$; ciò nondimeno, la funzione f non è arbitrria, essa deve soddisfare, come è facile vedere, l'equazione d'onda $\Box f = 0$

cosicché

$$t=\frac{1}{2}(\eta+\xi), \quad x=\frac{c}{2}(\eta-\xi).$$

Allora

$$\frac{\partial}{\partial\xi}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t}-c\frac{\partial}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial}{\partial\eta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t}+c\frac{\partial}{\partial x}\right),$$

e l'equazione di f prende la forma:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\xi\,\partial\eta}=0.$$

È evidente che la sua soluzione ha la forma seguente:

$$f=f_1(\xi)+f_2(\eta),$$

dove f_1 ed f_2 sono funzioni arbitrarie. Quindi,

$$f=f_1\left(t-\frac{x}{c}\right)+f_2\left(t+\frac{x}{c}\right). \tag{47,2}$$

Poniamo, ad esempio, $f_2=0$, cosicché $f=f_1(t-x/c)$. Esplicitiamo questa soluzione. In ciascun piano $x=$ costante il campo varia con il tempo; a ciascun istante il campo è diverso per diversi x. È evidente che il campo ha lo stesso valore per le coordinate x e per gli istanti t legati dalla relazione $t-x/c=$ costante, cioè

$$x=\text{costante}+ct.$$

Ciò vuol dire che se nell'istante $t=0$ il campo in un punto x dello spazio aveva un determinato valore, esso riprende lo stesso valore dopo un intervallo di tempo t alla distanza ct dal punto iniziale parallelamente all'asse delle x. Possiamo dire che tutti i valori del campo elettromagnetico si propagano nello spazio lungo l'asse delle x con la velocità della luce c.

Cosí, $f_1(t-x/c)$ rappresenta un'onda piana che si propaga nel senso positivo dell'asse delle x. È evidente che $f_2(t+x/c)$ rappresenta un'onda piana che si propaga in senso inverso, negativo, dell'asse delle x.

Nel § 46 è stato dimostrato che i potenziali di un'onda elettromagnetica si possono scegliere in maniera tale che $\varphi=0$, con div $\mathbf{A}=0$. Scegliamo precisamente in questa maniera i potenziali dell'onda piana che stiamo ora esaminando. La condizione div $\mathbf{A}=0$ nel nostro caso ci dà

$$\frac{\partial A_x}{\partial x}=0,$$

perché tutte le grandezze non dipendono da y e z. In virtú della (47,1), avremo allora $\partial^2 A_x/\partial t^2=0$, cioè $\partial A_x/\partial t=$ costante. La derivata $\partial\mathbf{A}/\partial t$ determina il campo elettrico, e, come si vede, una componente non nulla A_x significherebbe nel caso considerato la

presenza di un campo elettrico longitudinale costante. Poiché un campo del genere non ha niente di comune con l'onda elettromagnetica, si può porre $A_x = 0$.

Cosí, il potenziale vettore di un'onda piana può essere sempre scelto perpendicolare all'asse delle x, cioè alla direzione di propagazione di questa onda.

Consideriamo un'onda piana che si propaghi nel senso positivo del l'asse delle x; per questa onda, tutte le grandezze, in particolare **A**, sono funzioni solo di $t - x/c$. Di conseguenza, dalle formule

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$$

ricaviamo:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\mathbf{A}', \quad \mathbf{H} = [\nabla \mathbf{A}] = \left[\nabla\left(t - \frac{x}{c}\right)\cdot \mathbf{A}'\right] = -\frac{1}{c}[\mathbf{n}\mathbf{A}'], \qquad (47,3)$$

dove gli apici indicano la derivazione rispetto a $t - x/c$, e dove **n** è il versore diretto nel senso di propagazione dell'onda. Sostituendo la prima equazione nella seconda, troviamo:

$$\mathbf{H} = [\mathbf{n}\mathbf{E}]. \qquad (47,4)$$

Vediamo quindi che i campi elettrico e magnetico **E** ed **H** di un'onda piana sono diretti perpendicolarmente alla direzione della propagazione dell'onda. Per questa ragione, le onde elettromagnetiche sono dette *trasversali*. Dalla (47,4) è evidente anche che i campi elettrico e magnetico di un'onda piana sono mutuamente perpendicolari ed uguali in modulo.

Il flusso d'energia in un'onda piana è

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{E}\mathbf{H}] = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{E}[\mathbf{n}\mathbf{E}]],$$

ma essendo $\mathbf{E}\mathbf{n} = 0$, si ha

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}E^2\mathbf{n} = \frac{c}{4\pi}H^2\mathbf{n}.$$

In tal modo, il flusso d'energia è parallelo alla direzione di propagazione dell'onda. Poichè $W = \frac{1}{8\pi}(E^2 + H^2) = \frac{E^2}{4\pi}$ è la densità d'energia dell'onda, si può scrivere:

$$\mathbf{S} = cW\mathbf{n}, \qquad (47,5)$$

in accordo col fatto che il campo si propaga con la velocità della luce.

L'impulso dell'unità di volume del campo elettromagnetico è $\mathbf{S}/c^2$. Per un'onda piana, esso è uguale a $(W/c)\mathbf{n}$. Notiamo che la relazione tra l'energia W e l'impulso W/c dell'onda elettromagnetica è identica a quella per le particelle che si muovono con la velocità della luce [vedi la (9,9)].

Il flusso d'impulso di un campo è dato dal tensore degli sforzi di Maxwell $\sigma_{\alpha\beta}$ (33,3). Scegliendo, come precedentemente, per direzione di propagazione dell'onda l'asse delle x, troviamo che l'unica componente non nulla di $\sigma_{\alpha\beta}$ è

$$\sigma_{xx} = W. \tag{47,6}$$

Come era logico aspettarsi, il flusso di impulso è diretto nel senso della propagazione dell'onda e la sua grandezza è uguale alla densità d'energia.

Troviamo ora la legge di trasformazione della densità di energia di un'onda elettromagnetica piana nel passaggio da un sistema di riferimento inerziale ad un altro. A questo scopo, è necessario sostituire nella formula

$$W = \frac{1}{1-\frac{V^2}{c^2}}\left(W' + 2\frac{V}{c^2}S'_x + \frac{V^2}{c^2}\sigma'_{xx}\right)$$

(vedi problema 1 del § 6)

$$S'_x = cW'\cos\alpha', \quad \sigma'_{xx} = W'\cos^2\alpha',$$

dove α' è l'angolo (nel sistema K') tra l'asse x' (lungo il quale e diretta la velocità **V**) e la direzione di propagazione dell'onda. Troviamo in definitiva:

$$W = W'\frac{\left(1+\frac{V}{c}\cos\alpha'\right)^2}{1-\frac{V^2}{c^2}}. \tag{47,7}$$

Siccome $W = E^2/4\pi = H^2/4\pi$, i valori assoluti dei vettori campo **E** ed **H** di un'onda si trasformano come $\sqrt{W}$.

PROBLEMI

1. Determinare la forza agente su una parete dalla quale si riflette (con fattore di riflessione R) un'onda elettromagnetica incidente piana.

Soluzione. La forza **f** agente sull'unità di superficie della parete è data dal flusso d'impulso attraverso questa superficie, cioè è il vettore con compoenti

$$f_\alpha = \sigma_{\alpha\beta}N_\beta + \sigma'_{\alpha\beta}N_\beta,$$

dove **N** è la normale alla superficie della parete, e $\sigma_{\alpha\beta}$, $\sigma'_{\alpha\beta}$ sono le componenti dei tensori energia-impulso delle onde incidente e riflessa. In virtù della (47,6), otteniamo:

$$\mathbf{f} = W\mathbf{n}\,(\mathbf{Nn}) + W'\mathbf{n}'\,(\mathbf{Nn}').$$

Per definizione di coefficiente di riflessione, abbiamo $W' = RW$. Introducendo anche l'angolo d'incidenza θ (uguale all'angolo di riflessione) e passando alle componenti, troviamo la forza normale (*pressione della luce*)

$$f_N = W(1+R)\cos^2\theta$$

e la forza tangenziale

$$f_t = W(1 - R) \operatorname{sen} \theta \cos \theta.$$

2. Usando il metodo di Hamilton-Jacobi determinare il moto di una carica nel campo di un'onda elettromagnetica piana.

Soluzione. L'equazione di Hamilton-Jacobi scritta in forma quadridimensionale è:

$$g^{ik}\left(\frac{\partial S}{\partial x^i}+\frac{e}{c}A_i\right)\left(\frac{\partial S}{\partial x^k}+\frac{e}{c}A_k\right)=m^2c^2. \tag{1}$$

Il fatto che il campo rappresenta un'onda piana significa che le A^i sono funzioni di una sola variabile indipendente la quale può essere scritta nella forma $\xi = k_i x^i$, dove k^i è il quadrivettore costante il cui quadrato è nullo, e dove $k_i k^i = 0$ (cfr. paragrafo seguente). Imponiamo ai potenziali la condizione di Lorentz

$$\frac{\partial A^i}{\partial x^i}=\frac{dA^i}{d\xi}k_i=0;$$

per il campo variabile dell'onda questa condizione è equivalente all'uguaglianza $A^i k_i = 0$.

Cerchiamo la soluzione dell'equazione (1) nella forma

$$S = -f_i x^i + \mathrm{F}(\xi),$$

dove $f^i = (f^0, \mathbf{f})$ è il vettore costante che soddisfa la condizione $f_i f^i = m^2c^2$ ($S = -f_i x^i$ è la soluzione dell'equazione di Hamilton-Jacobi per una particella libera avente il 4-impulso $p^i = f^i$). Sostituendo nella (1) si ottiene:

$$\frac{e^2}{c^2}A_iA^i-2\gamma\frac{dF}{d\xi}-\frac{2e}{c}f_iA^i=0,$$

dove la costante è $\gamma = k_i f^i$. Ricavando F da questa equazione, abbiamo:

$$S=-f_ix^i-\frac{e}{c\gamma}\int f_iA^i\,d\xi+\frac{e^2}{2\gamma c^2}\int A_iA^i\,d\xi. \tag{2}$$

Passando alle notazioni tridimensionali in un sistema di riferimento fisso, scegliamo l'asse delle x come direzione di propagazione dell'onda. Abbiamo allora $\xi = ct - x$, e la costante $\gamma = f^0 - f^1$. Indicando con $\varkappa$ il vettore bidimensionale f_y, f_z, dalla condizione $f_i f^i = (f^0)^2 - (f^1)^2 - \varkappa^2 = m^2c^2$ ricaviamo:

$$f^0+f^1=\frac{m^2c^2+\varkappa^2}{\gamma}.$$

Scegliamo i potenziali nella gauge in cui $\varphi = 0$ ed $\mathbf{A}(\xi)$ giace nel piano yz. Con questa scelta l'espressione (2) assume la forma

$$S=\varkappa\mathbf{r}-\frac{\gamma}{2}(ct+x)-\frac{m^2c^2+\varkappa^2}{2\gamma}\xi+\frac{e}{c\gamma}\int\varkappa\mathbf{A}\,d\xi-\frac{e^2}{2\gamma c^2}\int\mathbf{A}^2\,d\xi.$$

Per determinare il moto, bisogna, conformemente alle regole generali (vedi vol. I, *Meccanica*, § 47), eguagliare le derivate $\partial S/\partial\varkappa$, $\partial S/\partial\gamma$ ad alcune costanti che si possono annullare con una scelta appropriata dell'origine delle coordinate e del tempo. Si ottengono quindi le formule parametriche (con ξ per parametro):

$$y=\frac{1}{\gamma}\varkappa_y\xi-\frac{e}{c\gamma}\int A_y\,d\xi,\qquad z=\frac{1}{\gamma}\varkappa_z\xi-\frac{e}{c\gamma}\int A_z\,d\xi,$$

$$x=\frac{1}{2}\left(\frac{m^2c^2+\varkappa^2}{\gamma^2}-1\right)\xi-\frac{e}{c\gamma^2}\int\varkappa\mathbf{A}\,d\xi+\frac{e^2}{2\gamma^2c^2}\int\mathbf{A}^2\,d\xi,\qquad ct=\xi+x.$$

L'impulso generalizzato $\mathbf{P} = \mathbf{p} + \frac{e}{c}\mathbf{A}$ e l'energia $\mathscr{E}$ vengono determinati derivando l'azione rispetto alle coordinate e al tempo; otteniamo dunque:

$$p_y = \varkappa_y - \frac{e}{c} A_y, \quad p_z = \varkappa_z - \frac{e}{c} A_z,$$

$$p_x = -\frac{\gamma}{2} + \frac{m^2c^2 + \varkappa^2}{2\gamma} - \frac{e}{c\gamma}\varkappa\mathbf{A} + \frac{e^2}{2\gamma c^2}\mathbf{A}^2;$$

$$\mathscr{E} = (\gamma + p_x)\, c.$$

Se si prende la media di queste grandezze rispetto al tempo, i termini di primo grado della funzione periodica A (ξ) si annullano. Si può sempre scegliere un sistema di riferimento tale che in esso la particella sia mediamente in quiete, cioè il suo impulso medio sia nullo. Si avrà allora

$$\varkappa = 0, \quad \gamma^2 = m^2c^2 + \frac{e^2}{c^2}\overline{\mathbf{A}^2}.$$

Le formule che determinano il moto assumeranno in definitiva la forma:

$$x = \frac{e^2}{2\gamma^2c^2}\int (\mathbf{A}^2 - \overline{\mathbf{A}^2})\, d\xi, \quad y = -\frac{e}{c\gamma}\int A_y\, d\xi, \quad z = -\frac{e}{c\gamma}\int A_z\, d\xi,$$

$$ct = \xi + \frac{e^2}{2\gamma^2c^2}\int (\mathbf{A}^2 - \overline{\mathbf{A}^2})\, d\xi; \tag{3}$$

$$p_x = \frac{e^2}{2\gamma c^2}(\mathbf{A}^2 - \overline{\mathbf{A}^2}), \quad p_y = -\frac{e}{c}A_y, \quad p_z = -\frac{e}{c}A_z,$$

$$\mathscr{E} = c\gamma + \frac{e^2}{2\gamma c}(\mathbf{A}^2 - \overline{\mathbf{A}^2}). \tag{4}$$

§ 48. *Onda piana monocromatica*

Un caso particolare importante di onde elettromagnetiche è quello in cui il campo è funzione periodica semplice del tempo. Un'onda di questo tipo è detta *onda monocromatica*. Tutte le grandezze (potenziali, componenti dei campi) di un'onda monocromatica dipendono dal tempo mediante un fattore del tipo $\cos(\omega t + \alpha)$, dove ω è la *frequenza ciclica* (o semplicemente *frequenza*) dell'onda.

Nell'equazione d'onda la derivata seconda del campo rispetto al tempo è ora $d^2f/dt^2 = -\omega^2 f$, e la distribuzione del campo nello spazio per un'onda monocromatica è ora determinata dall'equazione:

$$\Delta f + \frac{\omega^2}{c^2} f = 0. \tag{48,1}$$

Per un'onda piana (che si propaga lungo l'asse delle x) il campo è funzione soltanto di $t - x/c$. Se, quindi, un'onda piana è monocromatica, il suo campo è una funzione periodica semplice di $t - x/c$. Il potenziale vettore di un'onda di questo tipo può essere scritto come parte reale dell'espressione complessa:

$$\mathbf{A} = \mathrm{Re}\,\{\mathbf{A}_0 e^{-i\omega(t - x/c)}\}. \tag{48;2}$$

$\mathbf{A}_0$ rappresenta qui un vettore complesso costante. È evidente che i vettori campo **E** ed **H** di un'onda piana monocromatica avranno una forma analoga con la stessa frequenza ω. La grandezza

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \tag{48,3}$$

si chiama *lunghezza d'onda*; questo è il periodo di variazione del campo con coordinata x all'istante dato t.

Il vettore

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c}\,\mathbf{n} \tag{48,4}$$

(dove **n** è il versore di propagazione dell'onda) è detto *vettore d'onda*. Questo vettore ci permette di esprimere la (48,2) nella forma

$$\mathbf{A} = \mathrm{Re}\,\{A_0 e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}\}, \tag{48,5}$$

questa espressione non dipende dalla scelta degli assi coordinati. La grandezza con il fattore i nell'esponente si chiama *fase* dell'onda.

Finché sulle grandezze effettuiamo soltanto operazioni lineari, si può omettere il segno Re ed operare esclusivamente con grandezze complesse[1]). Cosí, sostituendo

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0\, e^{i\,(\mathbf{kr}-\omega t)}$$

nella (47,3), otteniamo una relazione tra vettori campo e il potenziale vettore di un'onda piana monocromatica

$$\mathbf{E} = ik\mathbf{A}, \quad \mathbf{H} = i\,[\mathbf{kA}]. \tag{48,6}$$

Esaminiamo qui dettagliatamente la questione relativa alla direzione del campo di un'onda monocromatica. Per chiarezza, par-

---

[1]) Se due grandezze qualsiasi $\mathbf{A}\,(t)$ e $\mathbf{B}\,(t)$ sono scritte in forma complessa:

$$\mathbf{A}\,(t) = \mathbf{A}_0 e^{-i\omega t}, \qquad \mathbf{B}\,(t) = \mathbf{B}_0 e^{-i\omega t},$$

bisognerà, allorché se ne consideri il prodotto, separare innanzitutto la parte reale. Ma se ci interessa, come succede spesso, soltanto il valore medio (rispetto al tempo) di questo prodotto, si potrà allora calcolarlo come segue:

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,\{\mathbf{AB}^*\}.$$

Abbiamo infatti:

$$\mathrm{Re}\,\mathbf{A}\;\mathrm{Re}\,\mathbf{B} = \frac{1}{4}\,(\mathbf{A}_0 e^{-i\omega t} + \mathbf{A}_0^* e^{i\omega t})\,(\mathbf{B}_0 e^{-i\omega t} + \mathbf{B}_0^* e^{i\omega t}).$$

Quando si prende la media, i termini contenenti i fattori $e^{\pm 2f\omega t}$ si annullano e resta

$$\overline{\mathrm{Re}\,\mathbf{A}\;\mathrm{Re}\,\mathbf{B}} = \frac{1}{4}\,(\mathbf{AB}^* + \mathbf{A}^*\mathbf{B}) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,(\mathbf{AB}^*).$$

leremo di un campo elettrico

$$\mathbf{E} = \mathrm{Re}\,\{\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}\}$$

(tutto ciò che sarà detto è naturalmente valido in misura uguale anche per il campo magnetico). $\mathbf{E}_0$ è un vettore complesso. Il suo quadrato, $\mathbf{E}_0^2$, sarà generalmente un numero complesso. Se l'argomento di questo numero è -2α (cioè $\mathbf{E}_0^2 = |\mathbf{E}_0^2| e^{-2i\alpha}$), il vettore $\mathbf{b}$ determinato da

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{b} e^{-i\alpha} \tag{48,7}$$

avrà il quadrato reale $\mathbf{b}^2 = |\mathbf{E}_0|^2$. Usando questa definizione di $\mathbf{b}$ abbiamo per $\mathbf{E}$ l'espressione

$$\mathbf{E} = \mathrm{Re}\,\{\mathbf{b} e^{i(\mathbf{kr}-\omega t-\alpha)}\}. \tag{48,8}$$

Scriviamo $\mathbf{b}$ nella forma:

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_1 + i\mathbf{b}_2,$$

dove $\mathbf{b}_1$ e $\mathbf{b}_2$ sono due vettori reali. Siccome il quadrato $\mathbf{b}^2 = b_1^2 - b_2^2 + 2i\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2$ deve essere una grandezza reale, allora $\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2 = 0$, cioè i vettori $\mathbf{b}_1$ e $\mathbf{b}_2$ sono reciprocamente perpendicolari. Scegliamo per direzione di $\mathbf{b}_1$ l'asse delle y (l'asse delle x è la direzione di propagazione della onda). Dalla (48,8) si ricava:

$$E_y = b_1 \cos(\omega t - \mathbf{kr} + \alpha),\ E_z = \pm\, b_2 \operatorname{sen}(\omega t - \mathbf{kr} + \alpha) \tag{48,9}$$

dove la scelta del segno piú o meno dipende a seconda che $\mathbf{b}_2$ sia diretto nel senso negativo o positivo dell'asse z. Dalle (48,9) segue che

$$\frac{E_y^2}{b_1^2} + \frac{E_z^2}{b_2^2} = 1. \tag{48,10}$$

Vediamo dunque che in ogni punto dello spazio il vettore campo elettrico ruota nel piano perpendicolare alla direzione di propagazione dell'onda e l'estremo del vettore descrive l'ellisse (48,10). In questo caso si dice che l'onda è *polarizzata ellitticamente*. La rotazione avviene nello stesso senso o nel senso inverso della rotazione di una vite chi si avanza lungo l'asse delle x, a seconda che si abbia il segno positivo o negativo nella (48,9).

Se $b_1 = b_2$, l'ellisse (48,10) si trasforma in un cerchio, cioè il vettore $\mathbf{E}$ ruota rimanendo di modulo costante. In questo caso si dice che l'onda è *polarizzata circolarmente*. La scelta delle direzioni degli assi y e z diventa, evidentemente, arbitraria. Notiamo che per un'onda di questo tipo il rapporto fra le componenti sugli assi y e z dell'ampiezza complessa $\mathbf{E}_0$ è uguale a

$$\frac{E_{0z}}{E_{0y}} = \pm i \tag{48,11}$$

secondo che la rotazione segua lo stesso senso della vite o il senso contrario (polarizzazione *destra* o *sinistra*)[1]).

Infine, se b_1 o b_2 è nullo, il campo dell'onda è diretto ovunque e sempre parallelamente (o antiparallelamente) ad una medesima direzione. Si dice in questo caso che l'onda è *polarizzata linearmente* o polarizzata in un piano. Un'onda polarizzata ellitticamente può essere considerata, evidentemente, come la sovrapposizione di due onde polarizzate linearmente.

Torniamo alla definizione di vettore d'onda ed introduciamo il quadrivettore d'onda

$$k^i = \left(\frac{\omega}{c}, \mathbf{k}\right). \tag{48,12}$$

Il fatto che queste grandezze costituiscono effettivamente un quadrivettore è evidente. Si vede, per esempio, che moltiplicate per il quadrivettore x^i esse danno uno scalare, ossia la fase dell'onda:

$$k_i x^i = \omega t - \mathbf{kr}. \tag{48,13}$$

Dalle definizioni (48,4) e (48,12) segue che il quadrato del quadrivettore d'onda è nullo:

$$k^i k_i = 0. \tag{48,14}$$

Questa relazione segue immediatamente anche dal fatto che l'espressione

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 \exp(-ik_i x^i)$$

deve essere una soluzione dell'equazione d'onda (46,10).

Come per ogni onda piana, per un'onda monocromatica che si propaghi lungo l'asse delle x sono non nulle soltanto le seguenti componenti del tensore energia-impulso (vedi § 47):

$$T^{00} = T^{01} = T^{11} = W.$$

Queste uguaglianze si possono scrivere con l'aiuto del quadrivettore d'onda in forma tensoriale:

$$T^{ik} = \frac{Wc^2}{\omega^2} k^i k^k. \tag{48,15}$$

Infine, utilizzando la legge di trasformazione del quadrivettore, è facile studiare l'*effetto Doppler*, ossia una variazione della frequenza ω dell'onda emessa da una sorgente in moto rispetto ad un osservatore, in confronto con la frequenza « propria » ω_0 della stessa sorgente nel sistema di riferimento (K_0) dove essa è in quiete.

Sia V la velocità della sorgente, cioè la velocità del sistema di riferimento K_0 rispetto al sistema K. In virtú delle formule generali

---

[1]) Si intende che gli assi x, y, z formano, come sempre, un sistema di rotazione destrorso.

di trasformazione dei quadrivettori si ha:

$$k^{(0)0} = \frac{k^0 - \frac{V}{c} k^1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

(la velocità del sistema K relativamente al sistema K_0 è $-V$). Sostituendovi $k^0 = \omega/c$, $k^1 = k \cos \alpha = \frac{\omega}{c} \cos \alpha$, dove α è l'angolo (nel sistema K) tra la direzione di propagazioni dell'onda e la direzione del moto della sorgente, ed esprimendo ω in funzione di ω_0, otteniamo:

$$\omega = \omega_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{V}{c} \cos \alpha}. \tag{48,16}$$

Questa è la formula cercata. Per $V \ll c$, per angoli α non troppo vicini a $\pi/2$, abbiamo:

$$\omega \approx \omega_0 \left(1 + \frac{V}{c} \cos \alpha\right). \tag{48,17}$$

Per $\alpha = \pi/2$ si ha:

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \approx \omega_0 \left(1 - \frac{V^2}{2c^2}\right); \tag{48,18}$$

in questo caso, la variazione relativa della frequenza è proporzionale al quadrato del rapporto V/c.

PROBLEMI

1. Determinare la direzione e la grandezza degli assi dell'ellisse di polarizzazione in funzione dell'ampiezza complessa $\mathbf{E}_0$.

Soluzione. Il problema consiste nel determinare il vettore $\mathbf{b} = \mathbf{b}_1 + i\mathbf{b}_2$ di quadrato reale. Dalla (48,7) abbiamo:

$$\mathbf{E}_0\mathbf{E}_0^* = b_1^2 + b_2^2, \quad [\mathbf{E}_0\mathbf{E}_0^*] = -2i\,[\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2], \tag{1}$$

oppure

$$b_1^2 + b_2^2 = A^2 + B^2, \; b_1 b^2 = AB \operatorname{sen}\delta,$$

dove poniamo

$$|E_{0y}| = A, \quad |E_{0z}| = B, \quad \frac{E_{0z}}{B} = \frac{E_{0y}}{A} e^{i\delta}$$

per i valori assoluti di E_{0y}, E_{0z} e per la differenza delle fasi (δ) tra di essi. Donde

$$2b_{1,2} = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \operatorname{sen}\delta} \pm \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \operatorname{sen}\delta}, \tag{2}$$

che determina le grandezze dei semiassi dell'ellisse di polarizzazione.

Per determinarne la direzione (rispetto agli assi iniziali arbitrari y e z), partiamo dall'uguaglianza

$$\mathrm{Re}\,\{(\mathbf{E}_0\mathbf{b}_1)\,(\mathbf{E}_0^*\mathbf{b}_2)\}=0,$$

che si verifica facilmente sostituendovi $\mathbf{E}_0=(\mathbf{b}_1+i\mathbf{b}_2)\,e^{-i\alpha}$. Scrivendo questa uguaglianza in funzione delle coordinate y, z, per l'angolo θ tra il vettore $\mathbf{b}_1$ e l'asse y si trova la relazione

$$\mathrm{tg}\,2\theta=\frac{2AB\cos\delta}{A^2-B^2}. \tag{3}$$

Il senso della rotazione del campo è determinato dal segno della componente sull'asse x del vettore $[\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2]$. Utilizzando la (1), scriviamo:

$$2i\,[\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2]_x=E_{0z}E_{0y}^*-E_{0z}^*E_{0y}=|\,E_{0y}\,|^2\left\{\left(\frac{E_{0z}}{E_{0y}}\right)-\left(\frac{E_{0z}}{E_{0y}}\right)^*\right\},$$

dove si vede che il verso del vettore $[\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2]$ (nel senso positivo o negativo dell'asse delle x) e, di conseguenza, il segno della rotazione (nel senso di una vite che avanza lungo l'asse delle x o nel senso contrario), è dato dal segno della parte immaginaria del rapporto E_{0z}/E_{0y} (positivo nel primo caso e negativo nel secondo). Questa regola generalizza la regola (48,11) per la polarizzazione circolare.

2. Determinare il moto di una carica nel campo di una onda piana monocromatica polarizzata linearmente.

Soluzione. Prendiamo la direzione del campo $\mathbf{E}$ per asse delle y e scriviamo:

$$E_y=E=E_0\cos\omega\xi,\qquad A_y=A=-\frac{cE_0}{\omega}\,\mathrm{sen}\,\omega\xi$$

($\xi=t-x/c$). In virtú delle formule (3) e (4) del problema 2 del § 47, troviamo (nel sistema di riferimento dove la particella mediamente è in quiete) la seguente espressione parametrica (parametro $\eta=\omega\xi$)) del moto:

$$x=-\frac{e^2E_0^2c}{8\gamma^2\omega^3}\,\mathrm{sen}\,2\eta,\qquad y=-\frac{eE_0c}{\gamma\omega^2}\cos\eta,\qquad z=0;$$

$$t=\frac{\eta}{\omega}-\frac{e^2E_0^2}{8\gamma^2\omega^3}\,\mathrm{sen}\,2\eta,\qquad \gamma^2=m^2c^2+\frac{e^2E_0^2}{2\omega^2};$$

$$p_x=-\frac{e^2E_0^2}{4\gamma\omega^2}\cos 2\eta,\qquad p_y=\frac{eE_0}{\omega}\,\mathrm{sen}\,\eta,\qquad p_z=0.$$

La carica descrive nel piano xy una curva a forma di 8 con l'asse delle y come asse di simmetria longitudinale. Ad un periodo del moto corrisponde la variazione del parametro da 0 a 2π.

3. Determinare il moto di una carica nel campo di una onda polarizzata circolarmente.

Soluzione. Per il campo dell'onda si ha:

$$E_y=E_0\cos\omega\xi,\qquad E_z=E_0\,\mathrm{sen}\,\omega\xi,$$

$$A_y=-\frac{cE_0}{\omega}\,\mathrm{sen}\,\omega\xi,\qquad A_z=\frac{cE_0}{\omega}\cos\omega\xi.$$

Il moto è determinato dalle formule:

$$x=0,\qquad y=-\frac{ecE_0}{\gamma\omega^2}\cos\omega t,\qquad z=-\frac{ecE_0}{\gamma\omega^2}\,\mathrm{sen}\,\omega t,$$

$$p_x=0,\qquad p_y=\frac{eE_0}{\omega}\,\mathrm{sen}\,\omega t,\qquad p_z=-\frac{eE_0}{\omega}\cos\omega t,$$

$$\gamma^2=m^2c^2+\frac{c^2E_0^2}{\omega^2}.$$

Dunque, la carica descrive nel piano yz una circonferenza di raggio $ecE_0/\gamma\omega^2$ con l'impulso costante $p = eE_0/\omega$; la direzione dell'impulso **p** coincide in ogni istante con la direzione del campo magnetico **H** dell'onda.

§ 49. *Decomposizione spettrale*

Ogni onda può essere sottoposta alla cosiddetta decomposizione spettrale, cioè può essere rappresentata sotto forma di sovrapposizione di onde monocromatiche di diversa frequenza. Il carattere di queste decomposizioni varia al variare della dipendenza del campo dal tempo.

Ad una categoria si riferiscono i casi in cui le frequenze della decomposizione formano una serie discreta di valori. Il caso piú semplice di questo genere è costituito dalla decomposizione di un campo puramente periodico (sebbene non monocromatico). Questo è lo sviluppo ordinario in serie di Fourier; esso contiene frequenze che sono multipli interi della frequenza « fondamentale » $\omega_0 = 2\pi/T$, dove T è il periodo del campo. Scriviamo lo sviluppo di Fourier nella forma

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{-i\omega_0 nt} \tag{49,1}$$

(dove f è una grandezza che determina il campo). Le grandezze f_n possono essere determinate, a partire dalla funzione f, calcolando gli integrali

$$f_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{in\omega_0 t}\, dt. \tag{49,2}$$

Se la funzione $f(t)$ è reale, risulta evidente che

$$f_{-n} = f_n^*. \tag{49,3}$$

Nei casi piú complicati, gli sviluppi possono contenere frequenze che sono multipli interi (e loro somme) di piú frequenze fondamentali differenti non commensurabili.

Quando si eleva al quadrato la somma (49,1) e si prende la media rispetto al tempo, i prodotti di termini con differenti frequenze si annullano perché questi termini contengono fattori oscillanti. Restano soltanto termini del tipo $f_n f_{-n} = |f_n|^2$. In tal modo, la media quadratica del campo (l'intensità media dell'onda) sarà rappresentata sotto forma di somma delle intensità delle componenti monocromatiche:

$$\overline{f^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f_n|^2 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^2 \tag{49,4}$$

(è evidente che il valore medio rispetto al periodo della funzione stessa $f(t)$ è nullo, cosicché $f_0 = \bar{f} = 0$).

Un'altra categoria di decomposizioni è costituita dai campi che si sviluppano in integrale di Fourier contenente uno spettro continuo di frequenze differenti. In questo caso, le funzioni $f(t)$ debbono soddisfare determinate condizioni; di solito sono funzioni che si annullano per $t = \pm\infty$. Lo sviluppo si scrive:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\omega e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}, \tag{49,5}$$

dove le componenti di Fourier vengono determinate, a partire dalla funzione stessa $f(t)$, dagli integrali

$$f_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{i\omega t}\, dt. \tag{49,6}$$

Per analogia con la (49,3) si ha:

$$f_{-\omega} = f_\omega^*. \tag{49,7}$$

Esprimiamo l'intensità totale dell'onda, cioè l'integrale di f^2 rispetto al tempo totale mediante le intensità delle componenti di Fourier. Le formule (49,5) e (49,6) ci danno:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ f \int_{-\infty}^{\infty} f_\omega e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \right\} dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ f_\omega \int_{-\infty}^{\infty} f e^{-i\omega t}\, dt \right\} \frac{d\omega}{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} f_\omega f_{-\omega} \frac{d\omega}{2\pi},$$

oppure, tenendo conto della (49,7),

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f_\omega|^2 \frac{d\omega}{2\pi} = 2 \int_{0}^{\infty} |f_\omega|^2 \frac{d\omega}{2\pi}. \tag{49,8}$$

§ 50. *Luce parzialmente polarizzata*

Ogni onda monocromatica è, per definizione, necessariamente polarizzata. Tuttavia le onde con cui si ha di solito a che fare sono onde quasi monocromatiche le cui frequenze sono contenute in un intervallo piccolo $\Delta\omega$. Consideriamo un'onda di questo tipo e supponiamo che ω sia una frequenza media. Il suo campo (per chiarezza, parleremo del campo elettrico **E**) in un punto dato dello spazio può

essere scritto allora nella forma

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(t)\, e^{-i\omega t},$$

dove l'ampiezza complessa $\mathbf{E}_0(t)$ è una funzione del tempo, variabile lentamente (per un'onda strettamente monocromatica si avrebbe $\mathbf{E}_0 =$ costante). Siccome $\mathbf{E}_0$ definisce la polarizzazione dell'onda, ciò significa che la polarizzazione di un'onda in ogni punto varia con il tempo; un'onda di questo tipo si chiama onda *parzialmente polarizzata*.

Le proprietà di polarizzazione delle onde elettromagnetiche, in particolare della luce, si possono osservare sperimentalmente facendo passare il fascio di luce studiata attraverso diverse sostanze (per esempio, il prisma di Nicol) e misurando l'intensità della luce che ne emerge. Dal punto di vista matematico, ciò vuol dire che si fanno conclusioni sulle proprietà di polarizzazione della luce partendo dai valori di certe funzioni quadratiche del suo campo. È ben chiaro che si tratta dei valori medi rispetto al tempo di queste funzioni.

Una funzione quadratica del campo è composta di termini proporzionali ai prodotti $E_\alpha E_\beta$, $E^*_\alpha E^*_\beta$ oppure $E_\alpha E^*{}_\beta$. I prodotti della forma

$$E_\alpha E_\beta = E_{0\alpha} E_{0\beta} e^{-2i\omega t}, \quad E^*_\alpha E^*_\beta = E^*_{0\alpha} E^*_{0\beta} e^{2i\omega t},$$

contenenti i fattori $e^{\pm 2i\omega t}$ oscillanti rapidamente, si annullano allorché si prende la loro media rispetto al tempo. I prodotti $E_\alpha E^*_\beta = E_{0\alpha} E^*_{0\beta}$ non contengono tali fattori, e, di conseguenza, i loro valori medi sono differenti da zero. Vediamo dunque che le proprietà della luce parzialmente polarizzata sono caratterizzate completamente dal tensore

$$J_{\alpha\beta} = \overline{E_{0\alpha} E^*_{0\beta}}. \tag{50,1}$$

Siccome il vettore $\mathbf{E}_0$ giace sempre nel piano perpendicolare alla direzione dell'onda, il tensore $J_{\alpha\beta}$ ha in tutto quattro componenti (in questo paragrafo si suppone che gli indici α, β prendano solamente due valori: α, $\beta = 1, 2$ che corrispondono agli assi y e z; l'asse x coincide con la direzione di propagazione dell'onda).

La somma delle componenti diagonali del tensore $J_{\alpha\beta}$ (che indicheremo con J) è una grandezza reale, uguale al valore medio del quadrato del modulo del vettore $\mathbf{E}_0$ (oppure, che è lo stesso, del vettore $\mathbf{E}$):

$$J \equiv J_{\alpha\alpha} = \overline{\mathbf{E}_0 \mathbf{E}^*_0}. \tag{50,2}$$

Questa grandezza determina l'intensità dell'onda, misurata dalla densità del flusso d'energia. Per escludere questa grandezza che non riguarda direttamente le proprietà di polarizzazione, introdu-

ciamo in luogo di $J_{\alpha\beta}$ il tensore

$$\rho_{\alpha\beta} = \frac{J_{\alpha\beta}}{J}, \tag{50,3}$$

per il quale $\rho_{\alpha\alpha} = 1$; lo chiameremo *tensore di polarizzazione.*

Dalla definizione (50,1) segue che le componenti del tensore $J_{\alpha\beta}$ e del tensore $\rho_{\alpha\beta}$ sono legate dalle relazioni

$$\rho_{\alpha\beta} = \rho^*_{\beta\alpha} \tag{50,4}$$

(cioè il tensore hermitiano). In virtú di queste relazioni, le componenti diagonali ρ_{11} e ρ_{22} sono reali (inoltre, $\rho_{11} + \rho_{22} = 1$), e $\rho_{21} = \rho^*_{12}$. Dunque, il tensore di polarizzazione è caratterizzato in tutto da tre parametri reali.

Troviamo ora le condizioni che debbono essere soddisfatte dal tensore $\rho_{\alpha\beta}$ di una luce totalmente polarizzata. In questo caso E_0 = costante, e si ha semplicemente

$$J_{\alpha\beta} = J\rho_{\alpha\beta} = E_{0\alpha}E^*_{0\beta} \tag{50,5}$$

(senza aver preso la media), cioè le componenti del tensore si possono rappresentare sotto forma di prodotto delle componenti di un certo vettore costante. Condizione necessaria e sufficiente perché questo avvenga è che si annulli il determinante:

$$|\rho_{\alpha\beta}| = \rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}\rho_{21} = 0. \tag{50,6}$$

Un caso contrario è quello della luce non polarizzata o *naturale.* L'assenza totale di polarizzazione significa che tutte le direzioni (nel piano yz) sono completamente equivalenti. In altri termini, il tensore di polarizzazione deve essere della forma

$$\rho_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}. \tag{50,7}$$

dove il determinante è $|\rho_{\alpha\beta}| = 1/4$.

Nel caso generale di polarizzazione arbitraria questo determinante prende i valori da 0 a 1/4[1]). Chiameremo *grado di polarizzazione* la grandezza positiva P determinata dalla relazione

$$|\rho_{\alpha\beta}| = \frac{1}{4}(1 - P^2). \tag{50,8}$$

Essa prende i valori da 0 per una luce non polarizzata a 1 per una luce polarizzata.

[1]) Il determinante di un tensore della forma (50,1) è positivo. È facile verificarlo considerando, per semplicità, che l'operazione di media è una somma estesa a una serie di diversi valori discreti ed applicando la nota disuguaglianza algebrica

$$\left|\sum_{a,b} x_a y_b\right|^2 \leqslant \sum_a |x_a|^2 \sum_b |y_b|^2.$$

Il tensore arbitrario $\rho_{\alpha\beta}$ può essere scomposto in due parti: simmetrica ed antisimmetrica. La prima di esse,

$$S_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\rho_{\alpha\beta} + \rho_{\beta\alpha}),$$

è reale, in virtú della proprietà hermitiana di $\rho_{\alpha\beta}$. La parte antisimmetrica è, al contrario, immaginaria pura. Come ogni tensore antisimmetrico di ordine uguale al numero delle dimensioni, essa si riduce ad uno pseudoscalare (vedi la nota alla pag. 36):

$$\frac{1}{2}(\rho_{\alpha\beta} - \rho_{\beta\alpha}) = -\frac{i}{2} e_{\alpha\beta} A,$$

dove A è uno pseudoscalare reale, $e_{\alpha\beta}$ il tensore unitario antisimmetrico (con componenti $e_{12} = -e_{21} = 1$). Dunque, il tensore di polarizzazione avrà la forma

$$\rho_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta} - \frac{i}{2} e_{\alpha\beta} A, \quad S_{\alpha\beta} = S_{\beta\alpha}, \tag{50,9}$$

cioè sarà composto di un tensore simmetrico reale e di uno pseudoscalare.

Per un'onda polarizzata circolarmente, il vettore $\mathbf{E}_0$ = costante, dove

$$E_{02} = \pm i E_{01}.$$

È facile vedere in questo caso che $S_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}$ ed $A = \pm 1$. Al contrario, per un'onda polarizzata linearmente il vettore costante $\mathbf{E}_0$ può essere scelto reale, in modo che $A = 0$. Nel caso generale la grandezza A può essere chiamata grado di polarizzazione circolare; essa prende i valori da $+1$ a -1; questi valori limite corrispondono rispettivamente alle onde polarizzate circolarmente destra e sinistra.

Il tensore reale $S_{\alpha\beta}$, come qualsiasi tensore simmetrico, può essere ridotto ai due assi principali con due differenti valori principali che indicheremo con λ_1 e λ_2. Le direzioni degli assi principali sono reciprocamente perpendicolari. Indichiamo con $\mathbf{n}^{(1)}$ ed $\mathbf{n}^{(2)}$ i vettori unitari di queste direzioni. Si può allora scrivere $S_{\alpha\beta}$ nella forma

$$S_{\alpha\beta} = \lambda_1 n_\alpha^{(1)} n_\beta^{(1)} + \lambda_2 n_\alpha^{(2)} n_\beta^{(2)}, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1. \tag{50,10}$$

Le grandezze λ_1 e λ_2 sono positive; esse prendono i valori da 0 ad 1.

Sia $A = 0$, cosicché $\rho_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta}$. Ciascuno dei due termini nella (50,10) ha la forma di un prodotto di due componenti di un vettore reale costante ($\sqrt{\lambda_1}\mathbf{n}^{(1)}$ o $\sqrt{\lambda_2}\mathbf{n}^{(2)}$). In altre parole, ciascuno di questi termini corrisponde a luce polarizzata linearmente. Vediamo inoltre che nella (50,10) non ci sono termini contenenti prodotti di componenti di queste due onde. Ciò significa che le due parti si

possono considerare come fisicamente indipendenti, ossia *incoerenti*. Infatti, se due onde sono indipendenti l'una dall'altra, il valore medio del prodotto $E_\alpha^{(1)} E_\beta^{(2)}$ è uguale al prodotto dei valori medi di ciascun fattore, e siccome ciascuno di quest'ultimi è nullo, si ha

$$\overline{E_\alpha^{(1)} E_\beta^{(2)}} = 0.$$

Siamo giunti quindi al risultato che per $A = 0$ un'onda parzialmente polarizzata può essere rappresentata come la sovrapposizione di due onde incoerenti (di intensità proporzionali a λ_1 e λ_2), polarizzate linearmente in due direzioni mutuamente perpendicolari[1]). (Nel caso generale del tensore complesso $\rho_{\alpha\beta}$, si può mostrare che la luce può essere rappresentata come la sovrapposizione di due onde incoerenti polarizzate ellitticamente, le cui ellissi di polarizzazione sono simili e mutuamente perpendicolari; vedi il problema 2.)

Sia φ l'angolo tra l'asse 1 (asse delle y) e il vettore unitario $\mathbf{n}^{(1)}$; abbiamo allora:

$$\mathbf{n}^{(1)} = (\cos\varphi,\ \operatorname{sen}\varphi), \qquad \mathbf{n}^{(2)} = (-\operatorname{sen}\varphi,\ \cos\varphi).$$

Introducendo la grandezza $l = \lambda_1 - \lambda_2$ (sia $\lambda_1 > \lambda_2$), scriviamo le componenti del tensore (50,10) nella seguente forma:

$$S_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 + l\cos 2\varphi & l\operatorname{sen} 2\varphi \\ l\operatorname{sen} 2\varphi & 1 - l\cos 2\varphi \end{pmatrix}. \tag{50,11}$$

Dunque, quando la scelta degli assi y e z è arbitraria, le proprietà di polarizzazione di un'onda si possono caratterizzare coi tre parametri reali seguenti: il grado di polarizzazione circolare A, il grado di polarizzazione lineare massima l, l'angolo φ tra la direzione $\mathbf{n}^{(1)}$ della polarizzazione massima e l'asse delle y.

Invece di questi parametri, può essere utile definire i seguenti parametri:

$$\xi_1 = l\operatorname{sen} 2\varphi,\ \xi_2 = A,\ \xi_3 = l\cos 2\varphi \tag{50,12}$$

(detti *parametri di Stokes*). Essi permettono di esprimere il tensore di polarizzazione come segue:

$$\rho_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 + \xi_3 & \xi_1 - i\xi_2 \\ \xi_1 + i\xi_2 & 1 - \xi_3 \end{pmatrix}. \tag{50,13}$$

Tutti e tre i parametri prendono i valori nell'intervallo tra -1 e $+1$. Il parametro ξ_3 caratterizza la polarizzazione lungo gli assi y e z; al valore $\xi_3 = 1$ corrisponde la polarizzazione lineare completa lungo

---

[1]) Il determinante $|S_{\alpha\beta}| = \lambda_1\lambda_2$; sia $\lambda_1 > \lambda_2$, allora il grado di polarizzazione, determinato dalla (50,8), è $P = 1 - 2\lambda_2$. In questo caso ($A = 0$), per caratterizzare il grado di polarizzazione della luce si ricorre spesso al *coefficiente di depolarizzazione* definito come rapporto λ_2/λ_1.

l'asse y, al valore $\xi_3 = -1$ quella lungo l'asse z. Il parametro ξ_1 caratterizza invece la polarizzazione lineare lungo le direzioni che formano un angolo di 45° con l'asse y; al valore $\xi_1 = 1$ corrisponde la polarizzazione totale nella direzione definita da $\varphi = \pi/4$, e al valore $\xi_1 = -1$ quella nella direzione definita da $\varphi = -\pi/4$[1]).

Il determinante del tensore (50, 13) è uguale a

$$|\rho_{\alpha\beta}| = \frac{1}{4}(1 - \xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2). \tag{50,14}$$

Confrontando con la (50,8), vediamo che

$$P = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}. \tag{50,15}$$

Dunque, essendo dato il grado generale di polarizzazione P, sono possibili diversi tipi di polarizzazione, caratterizzati dai valori delle tre grandezze ξ_1, ξ_2, ξ_3 di cui è data la somma dei quadrati; queste grandezze formano una specie di vettore di lunghezza data.

Notiamo che le grandezze $\xi_2 = A$ e $\sqrt{\xi_1^2 + \xi_3^2} = l$ sono invarianti nelle trasformazioni di Lorentz. Questa proprietà risulta abbastanza evidente già dal significato di queste grandezze come gradi di polarizzazione circolare e lineare[2]).

PROBLEMI

1. Decomporre una luce arbitraria polarizzata parzialmente nelle parti « naturale » e « polarizzata ».

Soluzione. Decomporre la luce nel modo richiesto vuol dire scrivere il tensore $J_{\alpha\beta}$ nella forma

$$J_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} J^{(n)} \delta_{\alpha\beta} + E_{0\alpha}^{(p)} E_{0\beta}^{(p)*}.$$

Il primo termine corrisponde alla parte naturale, il secondo alla parte polarizzata della luce. Per determinare l'intensità di queste parti, notiamo che il

---

[1] Per un'onda con una polarizzazione ellittica totale i cui assi d'ellisse siano $\mathbf{b}_1$ e $\mathbf{b}_2$ (vedi § 48), i parametri di Stokes sono:

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_2 = \pm 2 b_1 b_2 / J, \quad \xi_3 = (b_1^2 - b_2^2)/J.$$

Inoltre, l'asse y è diretto lungo $\mathbf{b}_1$, e i due segni di ξ_2 corrispondono alle direzioni di $\mathbf{b}_2$ nel senso positivo o negativo dell'asse z.

[2]) Per una dimostrazione diretta osserviamo che è a priori evidente che il tensore $\rho_{\alpha\beta}$ resterà bidimensionale in un nuovo sistema di riferimento, perché il campo dell'onda è trasversale in qualsiasi sistema di riferimento. Inoltre, la trasformazione di $\rho_{\alpha\beta}$ in $\rho'_{\alpha\beta}$ lascia invariata la somma dei quadrati dei moduli $\rho_{\alpha\beta}\rho^*_{\alpha\beta}$ (infatti, la forma della trasformazione non dipende dalle proprietà concrete di polarizzazione della luce, e per un'onda totalmente polarizzata questa somma è uguale ad 1 in qualsiasi sistema di riferimento). Essendo questa trasformazione reale, le parti reale ed immaginaria del tensore $\rho_{\alpha\beta}$ (50,9) si trasformano indipendentemente, e, di conseguenza, restano invariate anche le somme dei quadrati delle componenti di ciascuna di esse, che si esprimono rispettivamente in funzione di l e di A.

determinante

$$\left| J_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} J^{(n)} \delta_{\alpha\beta} \right| = | E_{0\alpha}^{(p)} E_{0\beta}^{(p)*} | = 0.$$

Scrivendo $J_{\alpha\beta} = J\rho_{\alpha\beta}$ nella forma (50,13) e risolvendo questa equazione, otteniamo:

$$J^{(n)} = J\,(1 - P).$$

L'intensità della parte polarizzata è $J^{(p)} = | \mathbf{E}_0^{(p)} |^2 = J - J^{(n)} = JP$.

La parte polarizzata della luce rappresenta, in generale, un'onda polarizzata ellitticamente quando le direzioni degli assi dell'ellisse coincidono con gli assi principali del tensore $S_{\alpha\beta}$. Le grandezze b_1 e b_2 degli assi delle'ellisse e l'angolo φ formato dall'asse $\mathbf{b}_1$ con l'asse y vengono determinati dalle uguaglianze:

$$b_1^2 + b_2^2 = JP, \quad 2b_1 b_2 = JP\xi_2, \quad \operatorname{tg} 2\varphi = \frac{\xi_1}{\xi_3}.$$

2. Rappresentare un'onda arbitraria polarizzata parzialmente sotto forma di sovrapposizione di due onde incoerenti polarizzate ellitticamente.

Soluzione. Per il tensore hermitiano $\rho_{\alpha\beta}$ gli « assi principali » sono determinati da due vettori unitari complessi $\mathbf{n}$ ($\mathbf{nn}^* = 1$) che soddisfano le equazioni

$$\rho_{\alpha\beta} n_\beta = \lambda n_\alpha. \tag{1}$$

Gli autovalori di λ_1 e λ_2 sono dati dalle radici della equazione

$$| \rho_{\alpha\beta} - \lambda \delta_{\alpha\beta} | = 0.$$

Moltiplicando i due membri dell'equazione (1) per n_α^*, abbiamo:

$$\lambda = \rho_{\alpha\beta} n_\alpha^* n_\beta = \frac{1}{J} \overline{| E_{0\alpha} n_\alpha^* |^2},$$

da cui risulta che λ_1 e λ_2 sono reali e positive. Moltiplicando le equazioni

$$\rho_{\alpha\beta} n_\beta^{(1)} = \lambda_1 n_\alpha^{(1)}, \quad \rho_{\alpha\beta}^* n_\beta^{(2)*} = \lambda_2 n_\alpha^{(2)*}$$

la prima per $n_\alpha^{(2)*}$, e la seconda per $n_\alpha^{(1)}$, sottraendo membro a membro ed utilizzando il carattere hermitiano del tensore $\rho_{\alpha\beta}$, otteniamo:

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\, n_\alpha^{(1)} n_\alpha^{(2)*} = 0.$$

da cui segue che $\mathbf{n}^{(1)}\mathbf{n}^{(2)*} = 0$, cioè i vettori unitari $\mathbf{n}^{(1)}$ ed $\mathbf{n}^{(2)}$ sono ortogonali.

La decomposizione cercata dell'onda è data dalla formula

$$\rho_{\alpha\beta} = \lambda_1 n_\alpha^{(1)} n_\beta^{(1)*} + \lambda_2 n_\alpha^{(2)} n_\beta^{(2)*}.$$

Si può sempre scegliere l'ampiezza complessa in maniera tale che delle due componenti perpendicolari l'una sia reale e l'altra immaginaria (cfr. § 48). Ponendo

$$n_1^{(1)} = b_1, \quad n_2^{(1)} = ib_2$$

(dove b_1 e b_2 sono normalizzati dalla condizione $b_1^2 + b_2^2 = 1$), dall'equazione $\mathbf{n}^{(1)}\mathbf{n}^{(2)*} = 0$ ricaviamo:

$$n_1^{(2)} = ib_2, \quad n_2^{(2)} = b_1.$$

Da queste relazioni risulta che le ellissi di ambedue le oscillazioni polarizzate ellitticamente sono simili, cioè il rapporto fra gli assi è uguale per le due ellissi, e una di esse è ruotata di un angolo retto rispetto all'altra.

3. Trovare la legge di trasformazione dei parametri di Stokes allorché gli assi y, z ruotano di un angolo φ.

Soluzione. La legge cercata è determinata dalla relazione tra i parametri di Stokes e le componenti di un tensore bidimensionale nel piano yz; questa legge è data dalle formule:

$$\xi_1' = \xi_1 \cos 2\varphi - \xi_3 \operatorname{sen} 2\varphi, \quad \xi_3' = \xi_1 \operatorname{sen} 2\varphi + \xi_3 \cos 2\varphi, \quad \xi_2' = \xi_2.$$

§ 51. *Decomposizione del campo elettrostatico*

Un campo creato da cariche può essere formalmente decomposto in onde piane (in integrale di Fourier). Tuttavia, questa decomposizione si distingue sostanzialmente dalla decomposizione delle onde elettromagnetiche nel vuoto. Infatti, il campo creato da cariche non soddisfa l'equazione omogenea d'onda e, di conseguenza, nessun termine dello sviluppo del campo soddisfa questa equazione. Ne segue che per le onde piane, in cui può essere decomposto il campo di cariche, non si verifica la relazione $k^2 = \omega^2/c^2$, che si ha invece per le onde elettromagnetiche monocromatiche piane.

In particolare, se il campo elettrostatico è formalmente rappresentato sotto forma di sovrapposizione di onde piane, la « frequenza » di queste onde sarà nulla, perché il campo considerato non dipende dal tempo; quanto ai vettori d'onda, essi sono, naturalmente, differenti da zero.

Consideriamo il campo generato da una carica puntiforme e che si trova nell'origine delle coordinate. Il potenziale φ di questo campo è determinato dall'equazione (vedi § 36)

$$\Delta\varphi = -4\pi e \delta(\mathbf{r}). \tag{51,1}$$

Sviluppiamo φ in integrale spaziale di Fourier, cioè rappresentiamolo nella forma

$$\varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\mathbf{kr}} \varphi_{\mathbf{k}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}, \quad d^3k = dk_x\, dk_y\, dk_z, \tag{51,2}$$

dove

$$\varphi_{\mathbf{k}} = \int \varphi(\mathbf{r})\, e^{-i\mathbf{kr}}\, dV,$$

Applicando ai due membri dell'uguaglianza (51,2) l'operatore di Laplace, troviamo:

$$\Delta\varphi = -\int_{-\infty}^{+\infty} k^2 e^{i\mathbf{kr}} \varphi_{\mathbf{k}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3},$$

in modo che la componente di Fourier dell'espressione $\Delta\varphi$ è

$$(\Delta\varphi)_{\mathbf{k}} = -k^2\varphi_{\mathbf{k}}.$$

D'altra parte, si può trovare $(\Delta\varphi)_{\mathbf{k}}$ prendendo la componente di Fourier di ambedue i membri dell'equazione (51,1):

$$(\Delta\varphi)_{\mathbf{k}} = -\int 4\pi e\delta(\mathbf{r})\, e^{-i\mathbf{kr}}\, dV = -4\pi e.$$

Confrontando le due espressioni ottenute, troviamo:

$$\varphi_{\mathbf{k}} = \frac{4\pi e}{k^2}. \tag{51,3}$$

Questa formula dà la soluzione del problema posto.

Analogamente al potenziale φ, si può sviluppare anche il vettore campo eletrico:

$$\mathbf{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kr}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}. \tag{51,4}$$

In virtú della (51,2), abbiamo:

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kr}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} = -\int i\mathbf{k}\varphi_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kr}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}.$$

Confrontando con la (51,4), troviamo:

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}} = -i\mathbf{k}\varphi_{\mathbf{k}} = -i\frac{4\pi e\mathbf{k}}{k^2}. \tag{51,5}$$

Da questa relazione si vede che il campo di onde in cui abbiamo scomposto il campo coulombiano è diretto lungo il vettore d'onda. Perciò onde di questo tipo si possono chiamare onde longitudinali.

§ 52. *Oscillazioni proprie del campo*

Consideriamo un campo elettromagnetico libero (senza cariche) localizzato in un volume finito dello spazio. Per semplificare i calcoli che seguiranno, partiamo dall'ipotesi che questo volume sia limitato da un parallelepipedo di lati A, B, C. Possiamo allora sviluppare tutte le grandezze che caratterizzano il campo in questo parallelepipedo in serie tripla di Fourier (secondo la terna di coordinate). Scriviamo questo sviluppo (ad esempio, per il potenziale vettore) nella forma

$$\mathbf{A} = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{A}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kr}}. \tag{52,1}$$

La sommatoria è qui estesa a tutti i valori possibili del vettore **k** le cui componenti, come è noto, prendono i valori

$$k_x = \frac{2\pi n_x}{A}, \quad k_y = \frac{2\pi n_y}{B}, \quad k_z = \frac{2\pi n_z}{C}, \tag{52,2}$$

dove n_x, n_y, n_z sono numeri interi positivi o negativi.

Siccome **A** è reale, i coefficienti dello sviluppo (52,1) sono legati dalle uguaglianze $\mathbf{A}_{-\mathbf{k}} = \mathbf{A}_{\mathbf{k}}^*$. Dalla equazione div $\mathbf{A} = 0$ risulta che, per ogni **k**:

$$\mathbf{k}\mathbf{A}_{\mathbf{k}} = 0, \tag{52,3}$$

cioè i vettori complessi $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}$ sono ortogonali ai corrispondenti vettori d'onda **k**. I vettori $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}$ sono naturalmente funzioni del tempo; in virtú dell'equazione d'onda (46,7), ciascuno di essi verifica l'equazione

$$\ddot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}} + c^2k^2\mathbf{A}_{\mathbf{k}} = 0. \tag{52,4}$$

Se le dimensioni A, B, C del volume scelto sono sufficientemente grandi, i valori consecutivi di k_x, k_y, k_z sono molto vicini. Si può allora parlare del numero di valori possibili di k_x, k_y, k_z in piccoli intervalli Δk_x, Δk_y, Δk_z. Siccome i valori vicini, per esempio di k_x, corrispondono ai valori di n_x differenti di un'unità, il numero Δn_x di valori possibili di k_x nell'intervallo Δk_x è uguale semplicemente all'intervallo corrispondente dei valori di n_x. Troviamo dunque:

$$\Delta n_x = \frac{A}{2\pi}\Delta k_x, \quad \Delta n_y = \frac{B}{2\pi}\Delta k_y, \quad \Delta n_z = \frac{C}{2\pi}\Delta k_z.$$

Il numero totale Δn di valori del vettore **k** con componenti negli intervalli dati è uguale al prodotto

$$\Delta n = \Delta n_x \Delta n_y \Delta n_z = \frac{V}{(2\pi)^3}\Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z, \tag{52,5}$$

dove $V = ABC$ è il volume del campo. È facile di qui determinare il numero di valori del vettore d'onda di modulo compreso nell'intervallo Δk e nell'elemento d'angolo solido Δo. È sufficiente a questo scopo passare a coordinate sferiche nello « spazio **k** » e scrivere in luogo di $\Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z$ l'elemento di volume in queste coordinate. Cosí,

$$\Delta n = \frac{V}{(2\pi)^3} k^2 \Delta k \Delta o. \tag{52,6}$$

Sostituendovi Δo con 4π, otteniamo il numero di vettori **k** aventi modulo nell'intervallo Δk e diretti arbitrariamente: $\Delta n = Vk^2\Delta k/2\pi^2$.

Calcoliamo l'energia totale del campo

$$\mathscr{E} = \frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2)\, dV,$$

esprimendola in funzione delle grandezze $\mathbf{A_k}$. Per i campi elettrico e magnetico abbiamo:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}} = -\frac{1}{c}\sum_{\mathbf{k}} \dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kr}}, \\ \mathbf{H} &= \operatorname{rot} \mathbf{A} = i \sum_{\mathbf{k}} [\mathbf{kA_k}]\, e^{i\mathbf{kr}}. \end{aligned} \tag{52,7}$$

Calcolando i quadrati di queste somme, notiamo che tutti i prodotti di termini con vettori d'onda $\mathbf{k}$ e $\mathbf{k}'$, tali che $\mathbf{k}' \neq -\mathbf{k}$, danno zero quando l'integrazione è estesa a tutto il volume. Infatti, tali termini contengono i fattori $e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\mathbf{r}}$, e per esempio, l'integrale

$$\int_0^A e^{i\frac{2\pi}{A} n_x x}\, dx$$

con il numero intero n_x è nullo. Per quanto concerne i termini con $\mathbf{k}' = -\mathbf{k}$, i fattori esponenziali scompaiono e l'integrazione in dV dà semplicemente il volume V.

Troviamo quindi

$$\mathscr{E} = \frac{V}{8\pi} \sum_{\mathbf{k}} \left\{ \frac{1}{c^2} \dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}} \dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}}^* + [\mathbf{kA_k}]\, [\mathbf{kA_k^*}] \right\}.$$

Ma data la (52,3), abbiamo:

$$[\mathbf{kA_k}]\, [\mathbf{kA_k^*}] = k^2 \mathbf{A_k} \mathbf{A_k^*},$$

cosicché

$$\mathscr{E} = \frac{V}{8\pi c^2} \sum_{\mathbf{k}} \{\dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}} \dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}}^* + k^2 c^2 \mathbf{A_k} \mathbf{A_k^*}\}. \tag{52,8}$$

Ciascun termine di questa somma corrisponde a uno dei termini dello sviluppo (52,1).

In virtú dell'equazione (52,4), i vettori $\mathbf{A_k}$ sono funzioni armoniche del tempo con frequenze $\omega_k = ck$, dipendenti solamente dal valore assoluto del vettore d'onda. Secondo la scelta di queste funzioni i termini dello sviluppo (52,1) possono rappresentare onde piane stazionarie oppure progressive. Scriviamo lo sviluppo del campo nella forma tale che i suoi termini rappresentino onde progressive:

$$\mathbf{A} = \sum_{\mathbf{k}} (\mathbf{a_k} e^{i\mathbf{kr}} + \mathbf{a_k^*} e^{-i\mathbf{kr}}), \tag{52,9}$$

questa forma mostra esplicitamente che A è reale; inoltre, ogni vettore $\mathbf{a}_\mathbf{k}$ dipende dal tempo secondo la legge

$$\mathbf{a}_\mathbf{k} \backsim e^{-i\omega_k t}, \quad \omega_k = ck. \tag{52,10}$$

Allora, ciascun termine della somma (52,9) sarà funzione soltanto della differenza $\mathbf{kr} - \omega_k t$, il che corrisponde ad onda che si propaga nella direzione di $\mathbf{k}$.

Confrontando gli sviluppi (52,9) e (52,1), troviamo che i loro coefficienti sono legati dalle uguaglianze

$$\mathbf{A}_\mathbf{k} = \mathbf{a}_\mathbf{k} + \mathbf{a}^*_{-\mathbf{k}},$$

e, in virtú della (52,10), le derivate rispetto al tempo sono

$$\dot{\mathbf{A}}_\mathbf{k} = -ick\,(\mathbf{a}_\mathbf{k} - \mathbf{a}^*_\mathbf{k}).$$

Sostituendo nella (52,8), esprimiamo l'energia del campo in funzione dei coefficienti dello sviluppo (52,9). I termini contenenti prodotti del tipo $\mathbf{a}_\mathbf{k}\mathbf{a}_{-\mathbf{k}}$ oppure $\mathbf{a}^*_\mathbf{k}\mathbf{a}^*_{-\mathbf{k}}$ si annullano; notando anche che le somme $\sum \mathbf{a}_\mathbf{k}\mathbf{a}^*_\mathbf{k}$ e $\sum \mathbf{a}_{-\mathbf{k}}\mathbf{a}^*_{-\mathbf{k}}$ si distinguono soltanto per l'indice di sommatoria e, di conseguenza, coincidono, avremo

$$\mathscr{E} = \sum_\mathbf{k} \mathscr{E}_\mathbf{k}, \quad \mathscr{E}_\mathbf{k} = \frac{k^2 V}{2\pi}\,\mathbf{a}_\mathbf{k}\mathbf{a}^*_\mathbf{k}. \tag{52,11}$$

In tal modo, l'energia totale del campo si esprime come somma delle energie $\mathscr{E}_\mathbf{k}$ legate a ciascuna delle onde piane prese separatamente.

Analogamente si può calcolare l'impulso totale del campo:

$$\frac{1}{c^2}\int \mathbf{S}\,dV = \frac{1}{4\pi c}\int [\mathbf{EH}]\,dV,$$

e si ottiene

$$\sum_\mathbf{k} \frac{\mathbf{k}}{k}\,\frac{\mathscr{E}\mathbf{k}}{c}. \tag{52,12}$$

Ci si poteva aspettare a priori questo risultato, in virtú della nota relazione tra l'energia e l'impulso delle onde piane (vedi § 47).

Lo sviluppo (52,9) permette di descrivere un campo con un insieme discreto di variabili (vettori $\mathbf{a}_\mathbf{k}$), anziché con un insieme continuo, quale è in realtà la descrizione mediante il potenziale $\mathbf{A}\,(x, y, z, t)$ dato in tutti i punti dello spazio. Facciamo ora una trasformazione delle variabili $\mathbf{a}_\mathbf{k}$, che ci permetterà di dare alle equazioni del campo una forma analoga alle equazioni canoniche della meccanica (equazioni di Hamilton).

Introduciamo le « variabili canoniche » reali $\mathbf{Q_k}$ e $\mathbf{P_k}$ tramite relazioni

$$\begin{aligned} \mathbf{Q_k} &= \sqrt{\frac{V}{4\pi c^2}}\,(\mathbf{a_k}+\mathbf{a_k^*}), \\ \mathbf{P_k} &= -i\omega_k\sqrt{\frac{V}{4\pi c^2}}\,(\mathbf{a_k}-\mathbf{a_k^*}) = \dot{\mathbf{Q}}_\mathbf{k}. \end{aligned} \tag{52,13}$$

L'hamiltoniana del campo si ottiene sostituendo queste espressioni nell'energia (52,11):

$$\mathscr{H} = \sum_\mathbf{k} \mathscr{H}_\mathbf{k} = \sum_\mathbf{k} \frac{1}{2}(\mathbf{P_k^2}+\omega_\mathbf{k}^2\mathbf{Q_k^2}). \tag{52,14}$$

Le equazioni di Hamilton $\partial\mathscr{H}/\partial\mathbf{P_k} = \dot{\mathbf{Q}}_\mathbf{k}$ coincidono inoltre con le uguaglianze $\mathbf{P_k} = \dot{\mathbf{Q}}_\mathbf{k}$ le quali quindi sono effettivamente una conseguenza delle equazioni del moto (il che è stato ottenuto mediante una scelta appropriata dei coefficienti nella trasformazione (52,13)). Per quanto concerne le equazioni $\partial\mathscr{H}/\partial\mathbf{Q_k} = -\dot{\mathbf{P}}_\mathbf{k}$, esse conducono alle equazioni

$$\ddot{\mathbf{Q}}_\mathbf{k} + \omega_k^2\mathbf{Q_k} = 0, \tag{52,15}$$

cioè sono identiche alle equazioni del campo.

Ciascuno dei vettori $\mathbf{Q_k}$ e $\mathbf{P_k}$ è perpendicolare al vettore d'onda $\mathbf{k}$, cioè ha due componenti indipendenti. La direzione di questi vettori determina la direzione della polarizzazione dell'onda progressiva corrispondente. Indicando le due componenti del vettore $\mathbf{Q_k}$ (nel piano perpendicolare a $\mathbf{k}$) con $Q_{\mathbf{k}j}$, $j = 1, 2$, otteniamo $\mathbf{Q_k^2} = \sum_j Q_{\mathbf{k}j}^2$ e in modo analogo per $\mathbf{P_k}$. Allora

$$\mathscr{H} = \sum_{\mathbf{k}j} \mathscr{H}_{\mathbf{k}j}, \quad \mathscr{H}_{\mathbf{k}j} = \frac{1}{2}(P_{\mathbf{k}j}^2 + \omega_k^2 Q_{\mathbf{k}j}^2). \tag{52,16}$$

Si vede che l'hamiltoniana si scompone nella somma di termini indipendenti ciascuno dei quali contiene soltanto una coppia delle grandezze $Q_{\mathbf{k}j}$, $P_{\mathbf{k}j}$. Ciascuno di questi termini corrisponde ad una onda progressiva con un vettore d'onda ed una polarizzazione determinati. Inoltre, $\mathscr{H}_{\mathbf{k}j}$ ha la forma dell'hamiltoniana di un « oscillatore » lineare che compie oscillazioni armoniche semplici. Per questo la decomposizione ottenuta si dice decomposizione del campo in oscillatori.

Scriviamo le formule che esprimono esplicitamente il campo in funzione delle variabili $\mathbf{P_k}$ e $\mathbf{Q_k}$. Dalla (52,13) abbiamo:

$$\mathbf{a_k} = \frac{i}{k}\sqrt{\frac{\pi}{V}}\,(\mathbf{P_k} - i\omega_k\mathbf{Q_k}), \quad \mathbf{a_k^*} = -\frac{i}{k}\sqrt{\frac{\pi}{V}}\,(\mathbf{P_k} + i\omega_k\mathbf{Q_k}). \tag{52,17}$$

Sostituendo queste espressioni nella (52,1), troviamo il potenziale vettore del campo:

$$\mathbf{A} = \sqrt{\frac{4\pi}{V}} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{k} (ck\mathbf{Q}_{\mathbf{k}} \cos \mathbf{kr} - \mathbf{P}_{\mathbf{k}} \operatorname{sen} \mathbf{kr}). \tag{52,18}$$

Per i campi elettrico e magnetico abbiamo rispettivamente:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\sqrt{\frac{4\pi}{V}} \sum_{\mathbf{k}} (ck\mathbf{Q}_{\mathbf{k}} \operatorname{sen} \mathbf{kr} + \mathbf{P}_{\mathbf{k}} \cos \mathbf{kr}), \\ \mathbf{H} &= -\sqrt{\frac{4\pi}{V}} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{k} (ck\,[\mathbf{kQ}_{\mathbf{k}}] \operatorname{sen} \mathbf{kr} + [\mathbf{kP}_{\mathbf{k}}] \cos \mathbf{kr}). \end{aligned} \tag{52,19}$$

Capitolo VII

PROPAGAZIONE DELLA LUCE

§ 53. *Ottica geometrica*

Un'onda piana è caratterizzata dalla proprietà che la direzione di propagazione e l'ampiezza sono ovunque le stesse. Onde elettromagnetiche arbitrarie non posseggono ovviamente questa proprietà.

Ciò nondimeno, accade spesso che onde elettromagnetiche, non piane, sono tali da poter essere considerate piane in ogni piccola regione dello spazio. La condizione perché questa approssimazione sia lecita è che l'ampiezza e la direzione dell'onda non varino molto su una distanza dell'ordine della lunghezza d'onda.

Soddisfatta questa condizione, si possono introdurre le cosiddette *superfici d'onda*, luogo geometrico dei punti nei quali la fase dell'onda (all'istante dato) è la stessa (per un'onda piana queste superfici d'onda sono piani perpendicolari alla direzione di sua propagazione). In ogni piccola regione dello spazio si può parlare della direzione di propagazione dell'onda, normale alla superficie d'onda. Si può introdurre anche la nozione di *raggi*, cioè di linee le cui tangenti in ogni punto coincidono con la direzione di propagazione dell'onda.

Lo studio delle leggi di propagazione delle onde in questo caso costituisce l'oggetto dell'*ottica geometrica*. L'ottica geometrica interpreta quindi la propagazione delle onde elettromagnetiche, della luce in particolare, come la propagazione di raggi, a prescindere completamente dalla loro natura ondulatoria. In altri termini, l'ottica geometrica corrisponde al caso limite in cui le lunghezze d'onda sono piccole, $\lambda \to 0$.

Deduciamo ora l'equazione fondamentale dell'ottica geometrica, equazione che determina la direzione dei raggi. Sia f una grandezza qualsiasi che descrive il campo di un'onda (una componente qualsiasi di **E** o di **H**). Per un'onda monocromatica piana f assume la forma

$$f = ae^{i(\mathbf{kr}-\omega t+\alpha)} = a \exp\left[i\left(-k_i x^i + \alpha\right)\right] \tag{53,1}$$

(omettiamo il segno Re; si sottintende che ovunque si prende la parte reale).

Scriviamo l'espressione generale del campo nella forma

$$f = ae^{i\psi}. \tag{53,2}$$

Nel caso in cui l'onda non è piana ma l'ottica geometrica è applicabile, l'ampiezza a è generalmente una funzione delle coordinate e del tempo, e la fase ψ, detta anche *iconale*, non ha una forma semplice come nella (53,1). È essenziale però il fatto che l'iconale ψ è una quantità grande. Ciò risulta evidente se si osserva che esso varia di 2π su una lunghezza d'onda, e l'ottica geometrica corrisponde al limite $\lambda \to 0$.

In regioni piccole dello spazio e per intervalli di tempo piccoli l'iconale ψ si può sviluppare in serie; con l'approssimazione sino ai termini del primo ordine abbiamo:

$$\psi = \psi_0 + \mathbf{r}\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{r}} + t\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

(l'origine delle coordinate e l'origine del tempo sono scelte nella regione dello spazio e nell'intervallo di tempo considerati; i valori delle derivate sono calcolati nell'origine delle coordinate). Confrontando questa espressione con la (53,1), troviamo:

$$\mathbf{k} = \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{r}} \equiv \operatorname{grad}\psi, \quad \omega = -\frac{\partial\psi}{\partial t}, \tag{53,3}$$

dato che in ogni regione piccola dello spazio (e in piccoli intervalli di tempo) l'onda può essere considerata piana. Le equazioni (53,3) si scrivono in forma quadridimensionale come segue:

$$k_i = -\frac{\partial\psi}{\partial x^i}, \tag{53,4}$$

dove k_i è il quadrivettore d'onda.

Nel § 48 abbiamo visto che le componenti del quadrivettore k^i sono legate dalla relazione $k_i k^i = 0$. Sostituendo in questa uguaglianza la (53,4), troviamo l'equazione

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\frac{\partial\psi}{\partial x^i} = 0. \tag{53,5}$$

Questa equazione, detta *equazione dell'iconale*, è l'equazione fondamentale dell'ottica geometrica.

Si può dedurre l'equazione dell'iconale anche passando direttamente al limite $\lambda \to 0$ nell'equazione d'onda. Il campo f soddisfa l'equazione d'onda

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x^i} = 0.$$

Sostituendovi $f = ae^{i\psi}$, troviamo:

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x_i\,\partial x^i}e^{i\psi} + 2i\frac{\partial a}{\partial x_i}\frac{\partial\psi}{\partial x^i}e^{i\psi} + if\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i\,\partial x^i} - \frac{\partial\psi}{\partial x_i}\frac{\partial\psi}{\partial x^i}f = 0. \tag{53,6}$$

Come però è stato detto prima, l'iconale ψ è una quantità grande; si possono quindi trascurare i tre primi termini rispetto al quarto, e si arriva nuovamente all'equazione (53,5).

Indichiamo ancora alcune relazioni che, applicate alla propagazione della luce nel vuoto, conducono soltanto a risultati evidenti *a priori*. È essenziale, tuttavia, che nella loro forma generale queste conclusioni sono valide anche nella propagazione della luce nei mezzi materiali.

Dalla forma dell'equazione dell'iconale si deduce un'analogia rimarchevole tra l'ottica geometrica e la meccanica delle particelle materiali. Il moto di una particella materiale è determinato dall'equazione di Hamilton-Jacobi (16,11). Quest'ultima, come anche l'equazione dell'iconale, è un'equazione alle derivate parziali del primo ordine e di secondo grado. Come è noto, l'azione S è legata all'impulso $\mathbf{p}$ e all'hamiltoniana $\mathscr{H}$ della particella dalle relazioni

$$\mathbf{p} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{r}}, \quad \mathscr{H} = -\frac{\partial S}{\partial t}.$$

Confrontando queste formule con le formule (53,3), vediamo che il vettore d'onda ha in ottica geometrica lo stesso ruolo che l'impulso di una particella ha in meccanica, mentre la frequenza sostituisce qui l'hamiltoniana, cioè l'energia della particella. Il valore assoluto del vettore d'onda k è legato alla frequenza dalla formula $k = \omega/c$. Questa relazione è analoga alla relazione $p = \mathscr{E}/c$ tra l'impulso e l'energia di una particella di massa nulla che si move alla velocità della luce.

Per le particelle si hanno le equazioni di Hamilton

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \mathbf{r}}, \quad \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \mathbf{p}}.$$

In virtú dell'analogia indicata, possiamo scrivere direttamente equazioni simili per i raggi:

$$\dot{\mathbf{k}} = -\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{r}}, \quad \dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}. \tag{53,7}$$

Nel vuoto $\omega = ck$, e quindi $\dot{\mathbf{k}} = 0$, $\mathbf{v} = c\mathbf{n}$ ($\mathbf{n}$ è il versore della direzione di propagazione), cioè, come ci si doveva aspettare, i raggi nel vuoto sono delle rette che la luce descrive propagandosi con velocità c.

L'analogia tra il vettore d'onda e l'impulso di una particella si rivela in modo particolarmente chiaro nella seguente circostanza. Consideriamo un'onda che rappresenti la sovrapposizione di onde monocromatiche di frequenze comprese in un piccolo intervallo e che occupi una regione finita dello spazio (il cosiddetto *pacchetto d'onda*). Calcoliamo il 4-impulso del campo di questa onda, utilizzando la formula (32,6) nella quale il tensore energia-impulso è dato dalla (48,15) (per ciascuna componente monocromatica). Sostituendo in questa formula k^i con il suo valore medio, otteniamo un'espressione della forma

$$P^i = Ak^i, \tag{53,8}$$

dove il coefficiente di proporzionalità A tra i due quadrivettori P^i e k^i è uno scalare. Questa relazione scritta in forma tridimensionale ci dà:

$$\mathbf{p} = A\mathbf{k}, \quad \mathscr{E} = A\omega. \tag{53,9}$$

Vediamo dunque che l'impulso e l'energia di un pacchetto d'onda si trasformano nel passaggio da un sistema di riferimento ad un altro rispettivamente come il vettore d'onda e la frequenza.

Spingendo oltre l'analogia, si può enunciare per l'ottica geometrica un principio analogo al principio di minima azione in meccanica. Non si potrà tuttavia scriverlo in forma hamiltoniana, $\delta \int L\, dt = 0$, perché è impossibile, per i raggi, introdurre una funzione analoga alla funzione di Lagrange per una particella. In effetti, la lagrangiana L di una particella è legata all'hamiltoniana $\mathscr{H}$ dalla relazione $L = \mathbf{p}\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \mathbf{p}} - \mathscr{H}$. Sostituendo l'hamiltoniana con la frequenza ω e l'impulso con il vettore d'onda $\mathbf{k}$, per la lagrangiana in ottica avremmo dovuto scrivere $\mathbf{k}\frac{\partial w}{\partial \mathbf{k}} - \omega$. Ma questa espressione è nulla perché $\omega = ck$. L'impossibilità di introdurre una lagrangiana per i raggi è del resto evidente dal fatto in quanto, come accennato, la propagazione dei raggi è analoga al moto di particelle di massa nulla.

Se un'onda è dotata di una determinata frequenza costante ω, la dipendenza del campo dal tempo è determinata allora da un fattore del tipo $e^{-i\omega t}$. Per l'iconale di una tale onda si può dunque scrivere

$$\psi = -\omega t + \psi_0(x, y, z), \tag{53,10}$$

dove ψ_0 è una funzione delle sole coordinate. L'equazione dell'iconale (53,5) assume la forma

$$(\operatorname{grad} \psi_0)^2 = \frac{\omega^2}{c^2}. \tag{53,11}$$

Le superfici d'onda sono superfici d'iconale costante, cioè una famiglia di superfici determinate dall'equazione $\psi_0(x, 5, z) =$ $=$ costante. I raggi sono invece normali in ciascun punto alla superficie d'onda corrispondente; la loro direzione è quella del gradiente $\nabla\psi_0$.

Come è noto, nel caso in cui l'energia è costante, il principio di minima azione per una particella può essere anche espresso come principio di Maupertuis:

$$\delta S = \delta \int \mathbf{p}\, d\mathbf{l} = 0,$$

dove l'integrazione è estesa alla traiettoria della particella tra due sue posizioni date. Si suppone anche che l'impulso sia espresso

come una funzione dell'energia delle coordinate della particella. Il principio analogo per i raggi si chiama *principio di Fermat*. In questo caso, per analogia si può scrivere:

$$\delta\psi = \delta \int \mathbf{k}\, d\mathbf{l} = 0. \qquad (53,12)$$

Nel vuoto $\mathbf{k} = \frac{\omega}{c}\mathbf{n}$, ed otteniamo ($\mathbf{n}\, d\mathbf{l} = dl$):

$$\delta \int dl = 0; \qquad (54,13)$$

da questa equazione si deduce che la propagazione dei raggi è rettilinea.

§ 54. *Intensità*

In ottica geometrica un'onda luminosa si può considerare come un fascio di raggi. Tuttavia, i raggi di per sé stessi determinano solo

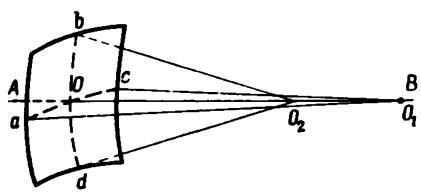

Fig. 7

la direzione di propagazione della luce in ogni punto; resta la questione relativa alla distribuzione dell'intensità della luce nello spazio.

Consideriamo un elemento infinitesimo su una superficie d'onda del fascio considerato. Dalla geometria differenziale è noto che ogni superficie ha, in ciascun suo punto, due raggi principali diversi di curvatura. Siano *ca* e *db* (fig. 7) gli elementi dei cerchi principali di curvatura descritti sull'elemento considerato della superficie d'onda. Allora, i raggi passanti per i punti *a* e *c* s'intersecheranno nel centro di curvatura corrispondente e i raggi passanti per *b* e *d* nell'altro centro di curvatura O_2.

Per gli angoli d'apertura dei raggi, uscenti da O_1 e O_2, le lunghezze dei segmenti *ac* e *bd* sono proporzionali ai raggi di curvatura corrispondenti R_1 ed R_2 (cioè alle lunghezze O_1O ed O_2O); l'area dell'elemento di superficie è proporzionale al prodotto delle lunghezze *ac* e *bd*, cioè al prodotto R_1R_2. In altri termini, se si considera un ele-

mento di superficie d'onda limitato da un certo insieme di raggi, l'area di questo elemento, quando ci si sposta lungo questi raggi, varia proporzionalmente ad R_1R_2.

D'altra parte, l'intensità, ossia la densità del flusso d'energia, è inversamente proporzionale all'area della superficie attraversata dalla quantità data di energia luminosa. Siamo giunti cosí alla conclusione che l'intensità è

$$I = \frac{\text{costante}}{R_1R_2}. \tag{54,1}$$

Questa formula va intesa nel modo seguente. Esistono su ogni raggio dato (AB nella fig. 7) due punti determinati O_1 ed O_2 che sono i centri di curvatura di tutte le superfici d'onda intersecanti il raggio dato. Le distanze OO_1 ed OO_2 dal punto d'intersezione O della superficie d'onda con il raggio ai punti O_1 ed O_2 sono i raggi di curvatura R_1 ed R_2 della superficie d'onda nel punto O. In tal modo, la formula (54,1) determina la variazione dell'intensità della luce lungo un raggio dato in funzione delle distanze da determinati punti giacenti su questo raggio. Sottolineiamo che questa formula non dà la possibilità di confrontare le intensità in punti differenti della stessa superficie d'onda.

Siccome l'intensità è determinata dal quadrato del modulo del campo, il campo stesso varia lungo un raggio secondo la legge:

$$f = \frac{\text{costante}}{\sqrt{R_1R_2}} e^{ikR}, \tag{54,2}$$

dove nel fattore di fase e^{ikR} s'intenderà con R sia R_1 che R_2; le grandezze e^{ikR_1} ed e^{ikR_2} si distinguono l'una dall'altra solamente per un fattore costante (per un raggio dato), essendo costante la differenza $R_1 - R_2$, cioè la distanza tra i due centri di curvatura.

Se i due raggi di curvatura della superficie d'onda coincidono, le espressioni (54,1) e (54,2) assumono allora la forma

$$I = \frac{\text{costante}}{R^2}, \qquad f = \frac{\text{costante}}{R} e^{ikR}. \tag{54,3}$$

Questo ha luogo, in particolare, in tutti i casi in cui la luce è emessa da una sorgente puntiforme (le superfici d'onda sono allora sfere concentriche, ed R è la distanza dalla sorgente luminosa).

Dalla (54,1) segue che l'intensità diventa infinita nei punti $R_1 = 0$, $R_2 = 0$, cioè nei centri di curvatura della superficie d'onda. Se si tiene conto di questo per tutti i raggi del fascio, vediamo che l'intensità della luce nel fascio dato diventa, in generale, infinita su due superfici: il luogo geometrico di tutti i centri di curvatura delle superfici d'onda. Queste superfici sono dette *caustiche*. Nel caso particolare di un fascio di raggi con superfici d'onda sferiche le due caustiche si riducono ad un punto (*fuoco*).

Notiamo che, in virtú delle proprietà, note dalla geometria differenziale, del luogo geometrico dei centri di curvatura di una famiglia di superfici, i raggi sono tangenti alle caustiche.

Bisogna tener presente che (per superfici d'onda convesse) i centri di curvatura delle superfici d'onda possono venire a trovarsi non sui raggi stessi, ma sui loro prolungamenti al di là del sistema ottico dal quale essi provengono. Si parla allora di *caustiche* (o di fuochi) *virtuali*. In questo caso l'intensità della luce non diventa infinita in nessun punto.

Per quanto riguarda l'affermazione che l'intensità della luce, diventa infinita, è ovvio che in realtà, pur essendo grande nei punti della caustica, l'intensità rimane finita (vedi problema del § 59).

Questa divergenza formale significa che l'approssimazione dell'ottica geometrica in prossimità delle caustiche è inadeguata. A questa circostanza è dovuto anche il fatto che la variazione della fase lungo un raggio possa essere definita dalla formula (54,2) solo negli intervalli del raggio non contenenti punti di contatto con le caustiche. Verrà precisato piú avanti (§ 59) che in realtà la fase diminuisce di $\pi/2$ quando passa in prossimità della caustica. Ciò vuol dire che se nella parte del raggio, prima che questi toccasse la prima caustica, il campo era proporzionale al fattore e^{ikx} (essendo x la coordinata sul raggio), dopo aver attraversato la caustica il campo sarà proporzionale al fattore $e^{i(kx-\pi/2)}$. La stessa cosa si verificherà in prossimità del punto di contatto con la seconda caustica, al di là del quale il campo sarà porporzionale a $e^{i(kx-\pi)}$ [1]).

§ 55. *Iconale angolare*

Un raggio di luce che si propaga nel vuoto nel passaggio attraverso un corpo trasparente, cambia generalmente direzione iniziale di propagazione. È ovvio che questo cambiamento di direzione dipende dalle proprietà fisiche del corpo e dalla sua forma. Ciò nondimeno, risulta possibile stabilire leggi generali relative al cambiamento di direzione dei raggi luminosi nel loro passaggio attraverso la materia. Si suppone a tale scopo che l'ottica geometrica sia applicabile ai raggi che si propagano all'interno del corpo considerato. I corpi trasparenti attraverso i quali si considera il passaggio dei raggi luminosi, vengono chiamati *sistemi ottici*.

---

[1]) Sebbene la formula (54,2), di per se stessa, non sia valida in prossimità delle caustiche, la variazione indicata della fase del campo corrisponde formalmente al cambiamento di segno (cioè alla comparsa del fattore $e^{i\pi}$) di R_1 o di R_2 in questa formula.

In virtú dell'analogia indicata nel § 53 tra la propagazione dei raggi e il moto di una particella, le stesse leggi generali restano valide anche per quanto riguarda il cambiamento di direzione del moto di particelle che si muovono prima in linea retta nel vuoto e poi, dopo aver attraversato un campo elettromagnetico, emergono nuovamente nel vuoto. Per chiarezza, parleremo in seguito solo della propagazione di raggi luminosi.

Abbiamo visto che l'equazione dell'iconale che determina la propagazione dei raggi può essere scritta (per una luce di frequenza determinata) nella forma (53,11). Per comodità, indicheremo in seguito con ψ il rapporto tra l'iconale ψ_0 e la grandezza costante ω/c. L'equazione fondamentale della ottica geometrica assume allora la forma

$$(\nabla\psi)^2 = 1. \tag{55,1}$$

Ogni soluzione di questa equazione descrive un fascio di raggi, e la direzione del raggio passante per un punto dato dello spazio è determinata dal gradiente di ψ in questo punto. Tuttavia, questa descrizone è insufficiente per i nostri fini, perché vogliamo deferminare relazioni generali che definiscano il passaggio attraverso sistemi ottici non di un fascio determinato di raggi, bensí di raggi qualsiasi. Dobbiamo dunque servirci dell'iconale in una forma tale che descriva in generale tutti i raggi di luce possibili, cioè raggi passanti per ogni coppia di punti dello spazio. Nella sua forma solita, l'iconale $\psi(\mathbf{r})$ è la fase di un raggio di un certo fascio passante per il punto $\mathbf{r}$. Ora, dobbiamo trovare l'iconale come funzione $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ delle coordinate di due punti ($\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$ sono i raggi vettori dell'origine e dell'estremo del raggio). Per una coppia qualsiasi di punti $\mathbf{r}$ ed $\mathbf{r}'$ si può far passare un raggio, e $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ è la differenza di fase (oppure, come si dice, il *cammino ottico*) di questo raggio tra i punti $\mathbf{r}$ ed $\mathbf{r}'$. In seguito, supporremo sempre che $\mathbf{r}$ ed $\mathbf{r}'$ siano i raggi vettori di punti su un raggio rispettivamente prima e dopo il suo passaggio attraverso un sistema ottico.

Se in $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ si suppone dato uno dei raggi vettori, per esempio $\mathbf{r}'$, allora ψ come funzione di $\mathbf{r}$ descriverà un determinato fascio di raggi, e cioè il fascio di raggi passanti per il punto $\mathbf{r}'$. In questo caso, ψ soddisfa l'equazione (55,1), dove la derivazione è fatta rispetto alle componenti di $\mathbf{r}$. Analogamente, considerando dato $\mathbf{r}$, troviamo ancora un'equazione per $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, cosicché

$$(\nabla\psi)^2 = 1, \quad (\nabla'\psi)^2 = 1. \tag{55,2}$$

La direzione di un raggio è determinata dal gradiente della sua ase. Siccome $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ è la differenza delle fasi nei punti $\mathbf{r}'$ ed $\mathbf{r}$, la direzione del raggio nel punto $\mathbf{r}'$ sarà determinata dal vettore $\mathbf{n}' = \partial\psi/\partial\mathbf{r}'$, e nel punto $\mathbf{r}$ dal vettore $\mathbf{n} = -\partial\psi/\partial\mathbf{r}$. Dalla (55,2)

risulta che i vettori **n** ed **n**′ sono unitari:

$$\mathbf{n}^2 = \mathbf{n}'^2 = 1. \tag{55,3}$$

I quattro vettori **r**, **r**′, **n**, **n**′ sono legati tra di loro da una relazione, poiché due di essi (**n**, **n**′) sono le derivate rispetto agli altri due (**r**, **r**′) di una certa funzione ψ. Per quanto concerne la funzione stessa ψ, essa soddisfa condizioni supplementari, ossia le equazioni (55,2).

Per trovare la relazione tra **n**, **n**′, **r**, **r**′, è opportuno introdurre in luogo di ψ un'altra grandezza per la quale non ci siano condizioni supplementari (la quale cioè non debba soddisfare nessuna equazione differenziale). A questo scopo si procede come segue. Nella funzione ψ le variabili indipendenti sono **r** ed **r**′, e quindi il differenziale d ψ si scrive:

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{r}}\, d\mathbf{r} + \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{r}'}\, d\mathbf{r}' = -\mathbf{n}\, d\mathbf{r} + n'\, d\mathbf{r}'.$$

Applichiamo ora la trasformazione di Legendre che fa passare dalle variabili indipendenti **r**, **r**′ alle variabili, **n** ed **n**′, cioè scriviamo:

$$d\psi = -d\,(\mathbf{nr}) + \mathbf{r}\; d\mathbf{n} + d\,(\mathbf{n}'\mathbf{r}') - \mathbf{r}'d\mathbf{n}',$$

da cui, introducendo la funzione

$$\chi = \mathbf{n}'\mathbf{r}' - \mathbf{nr} - \psi, \tag{55,4}$$

abbiamo

$$d\chi = -\mathbf{r}\; d\mathbf{n} + \mathbf{r}'d\mathbf{n}'. \tag{55,5}$$

La funzione χ è detta *iconale angolare*; come segue dalla (55,5) le sue variabili indipendenti sono **n** ed **n**′. La funzione χ non è sottoposta a condizioni supplementari. Infatti, le equazioni (55,3) rappresentano ora soltanto condizioni relative alle variabili indipendenti, che mostrano che delle tre componenti n_x, n_y, n_z del vettore **n** (e analogamente per **n**′) solo due sono indipendenti. Prenderemo allora per variabili indipendenti le componenti n_y, n_z, n'_y, n'_z, in modo che

$$n_x = \sqrt{1 - n_y^2 - n_z^2}, \qquad n'_x = \sqrt{1 - n_y'^2 - n_z'^2}.$$

Sostituendo queste espressioni in

$$d\chi = -x\, dn_x - y\, dn_y - z\, dn_z + x'\, dn'_x + y'\, dn'_y + z'\, dn'_z,$$

per il differenziale $d\chi$ troviamo:

$$d\chi = -\left(y - \frac{n_y}{n_x}\, x\right) dn_y - \left(z - \frac{n_z}{n_x}\, x\right) dn_z +$$
$$+ \left(y' - \frac{n'_y}{n'_x}\, x'\right) dn'_y + \left(z' - \frac{n'_z}{n'_x}\, x'\right) dn'_z.$$

Da cui ricaviamo in definitiva le seguenti equazioni:

$$y - \frac{n_y}{n_x} x = -\frac{\partial \chi}{\partial n_y}, \quad z - \frac{n_z}{n_x} x = -\frac{\partial \chi}{\partial n_z},$$
$$y' - \frac{n'_y}{n'_x} x' = \frac{\partial \chi}{\partial n'_y}, \quad z' - \frac{n'_z}{n'_x} x' = \frac{\partial \chi}{\partial n'_z}, \tag{55,6}$$

le quali definiscono la relazione generale cercata tra **n**, **n**′, **r**, **r**′. La funzione χ caratterizza le proprietà fisiche dei corpi attraversati dai raggi (e anche le proprietà del campo nel caso del moto di particelle cariche).

Quando **n** ed **n**′ sono dati, ciascuna delle due coppie di equazioni (55,6) rappresenta una retta. Queste rette non sono altro che i raggi prima e dopo il passaggio attraverso il sistema ottico. In tal modo, le equazioni (55,6) definiscono direttamente il cammino dei raggi da ambedue le parti del sistema ottico.

§ 56. *Fasci sottili di raggi*

Nello studio di fasci di raggi attraversanti sistemi ottici, i fasci in cui tutti i raggi convergono in un punto (fasci *omocentrici*) presentano un interesse particolare.

Nel passaggio attraverso un sistema ottico, un fascio omocentrico cessa, in generale, di essere tale, cioè dopo il passaggio attraverso la materia i raggi non convergono piú in un punto. Soltanto in casi particolari i raggi uscenti da un punto luminoso convergono tutti, dopo aver attraversato un sistema ottico, in un punto, detto l'immagine del punto luminoso[1])

Si può mostrare (vedi § 57) che l'unico caso in cui tutti i fasci omocentrici restano rigorosamente omocentrici dopo il passaggio attraverso un sistema ottico è il caso di una rappresentazione identica dell'oggetto, cioè quando l'immagine si differenzia dall'oggetto stesso per una traslazione, una rotazione o una riflessione speculare.

Di conseguenza, nessun sistema ottico può dare un'immagine assolutamente netta di un oggetto (avente dimensioni finite), tranne che nel caso banale della rappresentazione identica[2]). Una rappresentazione non identica di oggetti estesi può essere solo approssimata, cioè non del tutto netta.

Il caso piú importante di trasformazione approssimata di fasci omocentrici in fasci omocentrici è quello di fasci sufficientemente

---

[1]) Il punto d'intersezione può giacere sia sui raggi stessi, sia ancora sul loro prolungamento; nel primo caso, l'immagine si dice reale, nel secondo, virtuale.

[2]) Una rappresentazione identica può essere ottenuta con specchi piani.

sottili (cioè fasci con apertura angolare piccola) che si propagano in prossimità di una linea determinata (relativa al sistema ottico dato). Questa linea si chiama *asse ottico* del sistema.

È necessario notare inoltre che nemmeno i fasci di raggi indefinitamente sottili (nello spazio tridimensionale) sono generalmente omocentrici; abbiamo visto (fig. 7) che anche in questi casi raggi diversi si intersecano in punti diversi (fenomeno detto *astigmatismo*). Fanno eccezione i punti della superficie d'onda nei quali i due raggi di curvatura principali sono uguali; in prossimità di questi punti un elemento di superficie può essere considerato sferico, e il fascio sottile di raggi corrispondente è omocentrico.

Considereremo sistemi ottici dotati di simmetria assiale[1]). L'asse di simmetria di un tale sistema coincide con il suo asse ottico. Infatti, la superficie d'onda di un fascio parassiale è dotata anche di una simmetria assiale; ma le superfici di rivoluzione hanno, nei punti della loro intersezione con l'asse di simmetria, due raggi di curvatura uguali. Ne segue che un fascio sottile che si propaga in questa direzione resta omocentrico.

Per trovare le relazioni quantitative generali che determinano le rappresentazioni con fasci sottili passanti per sistemi ottici a simmetria assiale, utilizziamo le equazioni (55,6) dopo aver preliminarmente determinato la forma della funzione χ nel caso considerato.

Siccome i fasci di raggi sono sottili e vicini all'asse ottico, i vettori $\mathbf{n}$ ed $\mathbf{n}'$ per ciascun fascio sono diretti quasi parallelamente a questo asse. Se prendiamo l'asse ottico come asse x, le componenti n_y, n_z, n'_y, n'_z risulteranno piccole rispetto all'unità. Quanto alle componenti n_x ed n'_x, si ha $n_x \approx 1$, ed n'_x può essere approssimativamente posta uguale a $+1$ o -1. Nel primo caso, i raggi, emersi nello spazio dall'altra parte del sistema ottico, detto in questo caso *lente*, continuano a propagarsi quasi nella direzione iniziale. Nel secondo caso, i raggi prendono una direzione quasi opposta a quella iniziale; il sistema in questo caso è detto *specchio*.

Utilizzando il fatto che n_y, n_z, n'_y, n'_z sono piccole, sviluppiamo l'iconale angolare $\chi\,(n_y, n_z, n'_y, n'_z)$ in serie e limitiamoci ai primi termini. In virtú della simmetria assiale dell'intero sistema, χ deve essere invariante rispetto alle rotazioni del sistema di coordinate intorno all'asse ottico. Ne segue che non si possono avere termini del primo ordine proporzionali alle componenti di primo grado sugli assi y e z dei vettori $\mathbf{n}$ ed $\mathbf{n}'$ nello sviluppo di χ: tali termini non sarebbero dotati dell'invarianza richiesta. Tra i termini

---

[1]) Si può dimostrare che il problema della rappresentazione con fasci sottili passanti in prossimità dell'asse ottico di un sistema non dotato di simmetria assiale può essere ridotto alla rappresentazione mediante un sistema a simmetria assiale, con successiva rotazione dell'immagine intera rispetto all'oggetto.

del secondo ordine, hanno la proprietà d'invarianza i quadrati $\mathbf{n}^2$, $\mathbf{n}'^2$ e il prodotto scalare $\mathbf{nn}'$. In tal modo, l'iconale angolare di un sistema ottico a simmetria assiale è, con l'approssimazione sino ai termini del secondo ordine:

$$\chi = \text{costante} + \frac{g}{2}(n_y^2 + n_z^2) + f(n_y n_y' + n_z n_z') + \frac{h}{2}(n_y'^2 + n_z'^2), \qquad (56,1)$$

dove f, g, h sono costanti.

Per chiarezza, considereremo ora il caso di una lente dove poniamo $n_x' \approx 1$; per gli specchi, come sarà indicato piú avanti, tutte le formule sono analoghe. Sostituendo ora l'espressione (56,1) nelle equazioni generali (55,6), troviamo:

$$\begin{aligned} n_y(x-g) - fn_y' &= y, \quad & fn_y + n_y'(x'+h) &= y', \\ n_z(x-g) - fn_z' &= z, \quad & fn_z + n_z'(x'+h) &= z'. \end{aligned} \qquad (56,2)$$

Consideriamo un fascio omocentrico uscente dal punto x, y, z; sia x', y', z' il punto dove convergono tutti i raggi del fascio dopo esser passato attraverso la lente. Se la prima e la seconda coppie di equazioni (56,2) fossero indipendenti, queste quattro equazioni definirebbero, per x, y, z, x', y', z' date, un unico determinato sistema di valori n_y, n_z, n_y', n_z', cioè uno solo dei raggi uscenti dal punto x, y, z sarebbe passato per il punto x', y', z'. Perché tutti i raggi uscenti da x, y, z passino per x', y', z' è necessario quindi che le equazioni (56,2) non siano indipendenti, cioè che una coppia di queste equazioni sia una conseguenza dell'altra. La condizione necessaria di una tale dipendenza è, evidentemente, che i coefficienti di una coppia di equazioni siano proporzionali ai coefficienti dell'altra coppia. Dunque, si deve avere

$$\frac{x-g}{f} = -\frac{f}{x'+h} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'}\,; \qquad (56,3)$$

in particolare,

$$(x-g)(x'+h) = -f^2. \qquad (56,4)$$

Le equazioni ottenute definiscono la relazione cercata tra le coordinate del punto dell'immagine e quelle dell'oggetto quando la rappresentazione è fatta con fasci sottili.

I punti $x = g$, $x' = -h$ dell'asse ottico sono chiamati *fuochi principali* del sistema ottico. Consideriamo fasci di raggi paralleli all'asse ottico. Il punto emettente un tale fascio si trova, evidentemente, all'infinito sull'asse ottico, cioè $x = \infty$. Dalla (56,3) si vede che in questo caso $x' = -h$. Cosí, i raggi di un fascio vicino all'asse ottico convergono, dopo aver attraversato un sistema ottico, nel fuoco principale. Al contrario, un fascio di raggi uscenti da un fuoco principale dopo aver attraversato il sistema ottico diventa parallelo.

Nelle equazioni (56,3), le coordinate x ed x' hanno un origine comune che giace sull'asse ottico. È tuttavia piú comodo deferminare

le coordinate dell'oggetto e dell'immagine rispetto ad origini differenti, che saranno rispettivamente i fuochi principali. Scegliamo per senso positivo delle coordinate la direzione di propagazione di un raggio a partire da un fuoco dato. Indicando con lettere maiuscole le nuove coordinate dell'oggetto e dell'immagine, abbiamo:

$$X = x - g,\ X' = x' + h,\ Y = y,\ Y' = y',\ Z = z,\ Z' = z'.$$

Le equazioni della rappresentazione (56,3) e (56,4) nelle nuove coordinate diventano:

$$XX' = -f^2, \tag{56,5}$$

$$\frac{Y'}{Y} = \frac{Z'}{Z} = \frac{f}{X} = -\frac{X'}{f}. \tag{56,6}$$

La grandezza f è detta *distanza focale principale* del sistema.

Il rapporto Y'/Y si chiama *ingrandimento trasversale*. L'ingrandimento longitudinale invece, siccome le coordinate non sono legate da una semplice relazione, deve essere scritto in forma differenziale, paragonando l'elemento di lunghezza dell'oggetto (nella direzione dell'asse) all'elemento di lunghezza dell'immagine. La formula (56,5) per l'*ingrandimento longitudinale* ci permette di scrivere:

$$\left|\frac{dX'}{dX}\right| = \frac{f^2}{X^2} = \left(\frac{Y'}{Y}\right)^2. \tag{56,7}$$

Da questa relazione vediamo che persino per oggetti infinitesimi non è possibile ottenere un'immagine geometricamente simile. L'ingrandimento longitudinale non è mai uguale all'ingrandimento trasversale (eccezione fatta per il caso banale della rappresentazione identica).

Un fascio uscito dal punto $X = f$ sull'asse ottico interseca di nuovo l'asse nel punto $X' = -f$; questi due punti si dicono *principali*. Dalle equazioni (56,2) ($n_yX - fn'_y = Y$, $n_zX - fn'_z = Z$) si vede che in questo caso ($X = f$, $Y = Z = 0$) hanno luogo le uguaglianze $n_y = n'_y$, $n_z = n'_z$. Quindi ogni raggio uscente da un punto principale interseca di nuovo l'asse ottico in un altro punto principale nella direzione parallela a quella iniziale.

Se le coordinate dell'oggetto e della sua immagine sono definite a partire dai punti principali (anziché dai fuochi principali), per queste coordinate ξ e ξ' si ha allora:

$$\xi' = X' + f,\ \xi = X - f.$$

Sostituendo queste espressioni nella (56,5), si ottiene facilmente l'equazione della rappresentazione nella forma

$$\frac{1}{\xi} - \frac{1}{\xi'} = -\frac{1}{f}. \tag{56,8}$$

Si può mostrare che per i sistemi ottici di spessore piccolo (ad esempio, specchio, lente sottile) i due punti principali quasi coinci-

dono. L'equazione (56,8) è particolarmente comoda in questo caso, perché ξ e ξ' sono riferite praticamente alla stessa origine.

Se la distanza focale è positiva, le immagini degli oggetti che si trovano davanti (nel senso del raggio) al fuoco ($X > 0$) sono dirette ($Y'/Y > 0$); tali sistemi ottici sono detti *convergenti*. Se, invece, $f < 0$, allora per $X > 0$ si ha $Y'/Y < 0$, cioè l'immagine è capovolta; tali sistemi sono detti *divergenti*.

Esiste ancora un caso limite della rappresentazione che non è contenuto nelle formule (56,8): è il caso in cui tutti e tre i coefficienti f, g, h sono infiniti (cioè la distanza focale del sistema ottico è infinita e i suoi fuochi principali si trovano all'infinito). Passando al limite nelle equazioni (56,4) e per f, g, h tendenti all'infinito, abbiamo:

$$x' = \frac{h}{g}\, x + \frac{f^2 - gh}{g}.$$

Poiché solo il caso in cui l'oggetto e l'immagine si trovano a distanze finite dal sistema ottico presenta un interesse, f, g, h debbono tendere all'infinito in maniera tale che i rapporti h/g, $(f^2 - gh)/g$ restino finiti. Indicandoli rispettivamente con α^2 e β, abbiamo: $x' = \alpha^2 x + \beta$.

La equazione (56,7) ci dà ora per le altre due coordinate:

$$\frac{y'}{y} = \frac{z'}{z} = \pm\alpha.$$

Infine, se prendiamo le coordinate x ed x' a partire da origini differenti, scelte rispettivamente come punto arbitrario sull'asse dove si trova l'oggetto e l'immagine del punto, le equazioni della rappresentazione assumono la semplice forma:

$$X' = \alpha^2 X, \quad Y' = \pm\alpha Y, \quad Z' = \pm\alpha Z. \qquad (56,9)$$

Di conseguenza, gli ingrandimenti longitudinali e trasversali sono costanti (ma non uguali tra di loro). Il caso considerato di rappresentazione è detto *telescopico*.

Tutte le formule dalla (56,5) alla (56,9) stabilite per le lenti sono ugualmente applicabili anche agli specchi, nonché a sistemi ottici privi di simmetria assiale, purché si abbiano fasci di raggi sottili e vicini all'asse ottico. Inoltre, le coordinate x dell'oggetto e dell'immagine lungo l'asse ottico vanno riferite a punti adeguati (fuochi principali o punti principali) nel senso della propagazione del raggio. Bisogna intanto tener presente che per i sistemi ottici non dotati di simmetria assiale le direzioni dell'asse ottico dai lati opposti del sistema non coincidono.

PROBLEMI

1. Determinare la distanza focale per il caso di due sistemi ottici con simmetria assiale i cui assi ottici coincidono.

Soluzione. Siano f_1 ed f_2 le distanze focali dei due sistemi. Per ciascun sistema preso separatamente abbiamo:

$$X_1X_1' = -f_1^2, \quad X_2X_2' = -f_2^2.$$

Siccome le immagini formate dal primo sistema sono oggetti per il secondo, indichiamo con l la distanza tra il fuoco principale posteriore del primo sistema e il fuoco anteriore del secondo; abbiamo $X_2 = X_1' - l$. Esprimendo X_2' in funzione di X_1, troviamo:

$$X_2' = \frac{X_1 f_2^2}{f_1^2 + lX_1},$$

oppure

$$\left(X_1 + \frac{f_1^2}{l}\right)\left(X_2' - \frac{f_2^2}{l}\right) = -\left(\frac{f_1 f_2}{l}\right)^2,$$

da cui si vede che i fuochi principali del sistema composto si trovano nei punti $X_1 = -f_1^2/l$, $X_2' = f_2^2/l$, e la distanza focale è

$$f = -\frac{f_1 f_2}{l}$$

(per la scelta del segno in questa espressione, è necessario scrivere l'equazione corrispondente per l'ingrandimento trasversale).

Quando $l = 0$, la distanza focale è $f = \infty$, cioè il sistema composto produce un'immagine telescopica. Abbiamo in questo caso: $X_2' = X_1 (f_2/f_1)^2$, cioè il parametro α nella formula generale (56,9) è $\alpha = f_2/f_1$.

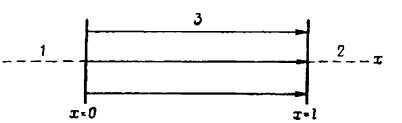

Fig. 8

2. Determinare la distanza focale di una « lente magnetica » per particelle cariche che rappresenta un campo magnetico uniforme longitudinale in una regione di lunghezza l (fig. 8) [1])

Soluzione. Nel moto in un campo magnetico l'energia cinetica di una particella si conserva; quindi l'equazione di Hamilton-Jacobi per l'azione parziale S_0 (r) (l'azione totale è $S = -\mathscr{E}t + S_0$) è

$$\left(\nabla S_0 - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 = p^2,$$

dove

$$p^2 = \frac{\mathscr{E}^2}{c^2} - m^2c^2 = \text{costante}.$$

Utilizzando la formula (19,4) per il potenziale vettore di un campo magnetico uniforme, scegliendo l'asse delle x lungo la direzione del campo e considerandolo come asse ottico di un sistema ottico a simmetria assiale, l'equazione

---

[1]) Per esempio, si può parlare del campo in un solenoide lungo, trascurando le distorsioni dell'uniformità del campo vicino alle estremità del solenoide.

di Hamilton-Jacobi si scrive

$$\left(\frac{\partial S_0}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S_0}{\partial r}\right)^2+\frac{e^2}{4c^2}H^2r^2=p^2, \tag{1}$$

dove r è la distanza dall'asse delle x, ed S_0 una funzione di x ed r.

Per fasci sottili e vicini all'asse ottico di particelle la coordinata r è piccola e quindi si può sviluppare in S_0 in serie di potenze di r. I due primi termini di questa serie sono:

$$S_0=px+\frac{1}{2}\sigma(x)r^2, \tag{2}$$

dove $\sigma(x)$ soddisfa l'equazione

$$p\sigma'(x)+\sigma^2+\frac{e^2}{4c^2}H^2=0. \tag{3}$$

Nella regione *1* davanti alla lente si ha:

$$\sigma^{(1)}=\frac{p}{x-x_1},$$

dove $x_1<0$ è una costante. Questa soluzione corrisponde a un fascio libero di particelle che si propagano in modo rettilineo dal punto $x=x_1$ sull'asse ottico della regione 1. Infatti, l'azione per il moto libero di una particella d'impulso p partita dal punto $x=x_1$ è

$$S_0=p\sqrt{r^2+(x-x_1)^2}\approx p(x-x_1)+\frac{pr^2}{2(x-x_1)}.$$

Analogamente nella regione *2* oltre la lente si ha:

$$\sigma^{(2)}=\frac{p}{x-x_2},$$

dove la costante x_2 rappresenta la coordinata dell'immagine del punto x_1.

Nella regione *3*, all'interno della lente, la soluzione dell'equazione (3) è:

$$\sigma^{(3)}=\frac{eH}{2c}\operatorname{ctg}\left(\frac{eH}{2cp}x+C\right),$$

dove C è una costante arbitraria.

Le costanti C ed x_2 (per x_1 dato) sono determinate dalle condizioni di continuità di $\sigma(x)$ per $x=0$ ed $x=l$:

$$-\frac{p}{x_1}=\frac{eH}{2c}\operatorname{ctg}C,\qquad \frac{p}{l-x_2}=\frac{eH}{2c}\operatorname{ctg}\left(\frac{eH}{2cp}l+C\right).$$

Eliminando la costante C da queste uguaglianze, otteniamo:

$$(x_1-g)(x_2+h)=-f^2$$

dove [1])

$$g=\frac{2cp}{eH}\operatorname{ctg}\frac{eHl}{2cp},\quad h=g-l,\quad f=\frac{2cp}{eH\operatorname{sen}\frac{eHl}{2cp}}.$$

---

[1]) f è data con il segno corretto, ma per determinarla sono necessarie ulteriori considerazioni:

§ 57. *Rappresentazione con fasci larghi di raggi*

La rappresentazione di oggetti con fasci sottili di raggi, studiata nel paragrafo precedente, è approssimata; essa è tanto piú precisa (netta) quanto piú sottili sono i fasci. Passiamo ora al problema della rappresentazione di oggetti con fasci di raggi di spessore arbitrario.

Contrariamente alla rappresentazione di oggetti con fasci sottili, che può essere realizzata con un qualsiasi sistema ottico dotato di simmetria assiale, la rappresentazione con fasci larghi è possibile soltanto con l'aiuto di sistemi ottici adeguatamente congegnati. Come è stato però già detto nel § 56, non si potranno ottenere le immagini di tutti i punti dello spazio.

I ragionamenti che seguiranno sono fondati sulla seguente importante osservazione. Supponiamo che tutti i raggi uscenti da un punto O si intersechino di nuovo in un altro punto O' dopo aver attraversato un sistema ottico. È facile vedere che il cammino ottico ψ è lo stesso per tutti questi raggi. In effetti, in prossimità di ciascuno dei punti O ed O' le superfici d'onda per i raggi intersecantisi in questi punti sono delle sfere i cui centri sono rispettivamente O ed O' e che al limite si riducono a questi stessi punti. Essendo le superfici d'onda superfici di fase costante, le variazioni di fase lungo diversi raggi tra i loro punti d'intersezione con due superfici d'onda determinate sono uguali. Da quanto detto risulta che sono uguali (per raggi differenti) anche le variazioni totali della fase tra i punti O ed O'.

Precisiamo le condizioni necessarie per la rappresentazione di un piccolo segmento mediante fasci larghi; anche l'immagine sarà allora un piccolo segmento. Orientiamo gli assi (che indicheremo con ξ e ξ') lungo questi segmenti e scegliamo per origini i punti O ed O' di cui uno sia l'immagine dell'altro. Sia ψ il cammino ottico per raggi uscenti da O e convergenti in O'. Per i raggi uscenti da un punto infinitamente vicino ad O di coordinata $d\xi$ e convergenti nel punto immagine di coordinata $d\xi'$ il cammino ottico è $\psi + d\psi$, dove

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial\xi}\, d\xi + \frac{\partial\psi}{\partial\xi'}\, d\xi'.$$

Introduciamo l'« ingrandimento »

$$\alpha_\xi = \frac{d\xi'}{d\xi}$$

come rapporto tra le lunghezze dell'elemento d'immagine $d\xi'$ e dell'elemento di oggetto $d\xi$. Dato che il segmento oggetto è piccolo, α si può considerare l'ingrandimento, una grandezza costante lungo questo segmento. Scrivendo, come al solito, $\partial\varphi/\partial\xi = -n_\xi$, $\partial\psi/\partial\xi' = n'_\xi$ (n_ξ, n'_ξ sono i coseni degli angoli rispettivamente tra il

raggio e gli assi ξ, ξ'), abbiamo:

$$d\psi = (\alpha_\xi n'_\xi - n_\xi)\, d\xi.$$

Come per ogni punto oggetto e punto immagine che si corrispondono, il cammino ottico $\psi + d\psi$ deve essere uguale per tutti i raggi uscenti dal punto di coordinata $d\xi$ e convergenti nel punto $d\xi'$. Da questa considerazione ricaviamo la condizione:

$$\alpha_\xi n'_\xi - n_\xi = \text{costante}. \tag{57,1}$$

Questa è la condizione cercata cui deve soddisfare il percorso dei raggi in un sistema ottico nella rappresentazione di un piccolo segmento con fasci larghi. La relazione (57,1) deve essere soddisfatta per tutti i raggi uscenti dal punto O.

Applichiamo ora la condizione ottenuta alla rappresentazione mediante un sistema ottico dotato di simmetria assiale.

Cominciamo cercare l'immagine di un segmento giacente sull'asse ottico del sistema (l'asse delle x); per ragione di simmetria, è evidente che l'immagine giacerà pure sull'asse. In virtú della simmetria assiale, il raggio diretto lungo l'asse ottico ($n_x = 1$) non cambia la sua direzione dopo il passaggio attraverso il sistema, cioè $n'_x = 1$. Ne segue che la costante nella (57,1) è uguale, nel caso considerato, ad $\alpha_x - 1$, e si può quindi scrivere la (57,1) nella forma

$$\frac{1 - n_x}{1 - n'_x} = \alpha_x.$$

Indicando con θ e θ' gli angoli formati dai raggi con l'asse ottico nei punti oggetto ed immagine, otteniamo:

$$1 - n_x = 1 - \cos\theta = 2\,\text{sen}^2\frac{\theta}{2}, \qquad 1 - n_x = 2\,\text{sen}^2\frac{\theta'}{2}.$$

In tal modo, si ottiene la condizione per la rappresentazione nella forma

$$\frac{\text{sen}\,\dfrac{\theta}{2}}{\text{sen}\,\dfrac{\theta'}{2}} = \text{costante} = \sqrt{\alpha_x}. \tag{57,2}$$

Consideriamo inoltre la rappresentazione di una piccola porzione di piano perpendicolare all'asse ottico, prodotta da un sistema dotato di simmetria assiale; è ovvio che l'immagine sarà pure perpendicolare all'asse. Applicando la (57,1) a qualsiasi segmento che si trovi nella porzione del piano immagine, otteniamo:

$$\alpha_r\,\text{sen}\,\theta' - \text{sen}\,\theta = \text{costante},$$

dove θ e θ' sono, come precedentemente, gli angoli tra il raggio e l'asse ottico. Per i raggi uscenti dal punto d'intersezione del piano

oggetto con l'asse ottico e diretti lungo questo asse ($\theta = 0$), si deve avere anche, data la simmetria, $\theta' = 0$. Ne risulta che costante $= 0$, e si ottiene quindi la condizione per la rappresentazione nella forma

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta'} = \text{costante} = \alpha_r. \tag{57,3}$$

Per quanto concerne la rappresentazione di oggetti a tre dimensioni con fasci larghi, è facile vedere che essa è impossibile persino per piccoli volumi, perché le condizioni (57,2) e (57,3) sono incompatibili.

§ 58. I limiti dell'ottica geometrica

Per definizione, in un'onda piana monocromatica l'ampiezza è sempre e ovunque la stessa. Un'onda piana si estende in tutto lo spazio ed esiste in tutti gli istanti compresi tra $-\infty$ e $+\infty$. Invece, un'onda la cui ampiezza non è costante nello spazio e nel tempo, può essere solo approssimativamente monocromatica. Esamineremo ora il problema del grado di *acromatismo*.

Consideriamo un'onda elettromagnetica la cui ampiezza è in ogni punto dello spazio una funzione del tempo. Sia ω_0 la frequenza media dell'onda. Allora il campo d'onda (il campo elettrico per esempio) in un punto fissato è della forma $\mathbf{E}_0(t)\, e^{-i\omega_0 t}$. Questo campo, pur non essendo ovviamente monocromatico, può essere, tuttavia, decomposto in componenti monocromatiche, cioè nell'integrale di Fourier. L'ampiezza della componente di questa decomposizione in frequenza ω è proporzionale all'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}_0(t)\, e^{i(\omega-\omega_0)t}\, d$$

Il fattore $e^{i(\omega-\omega_0)t}$ è una funzione periodica il cui valore medio è nullo. Se $\mathbf{E}_0$ fosse costante, l'integrale sarebbe esattamente nullo per tutte le $\omega \neq \omega_0$. Se invece $\mathbf{E}_0(t)$ è variabile, ma varia poco in un intervallo di tempo dell'ordine di $1/|\omega - \omega_0|$, l'integrale sarà allora quasi nullo; esso sarà tanto piú piccolo quanto piú lentamente varierà $\mathbf{E}_0$. Perché l'integrale sia sensibilmente differente da zero, è necessario che $\mathbf{E}_0(t)$ varii sensibilmente in un intervallo di tempo dell'ordine di $1/|\omega - \omega_0|$.

Indichiamo con Δt l'ordine di grandezza dell'intervallo di tempo nel quale l'ampiezza dell'onda varia sensibilmente in un punto dato dello spazio. Dalle considerazioni fatte segue che le frequenze che si distinguono maggiormente da ω_0 e che entrano nella decompo-

sizione spettrale di questa onda con intensità apprezzabili, sono determinate dalla condizione $1/|\omega - \omega_0| \sim \Delta t$. Indicando con $\Delta\omega$ l'intervallo delle frequenze (intorno alla frequenza media ω_0) nella decomposizione spettrale, si ottiene quindi la relazione

$$\Delta\omega\Delta t \sim 1. \tag{58,1}$$

Si vede effettivamente che l'onda è tanto piú monocromatica (cioè tanto piú piccolo è $\Delta\omega$), quanto piú grande è Δt, cioè quanto piú lentamente varia la sua ampiezza in ogni punto dello spazio.

Si possono dedurre facilmente relazioni analoghe alla (58,1) anche per il vettore d'onda. Siano Δx, Δy, Δz ordini di grandezza delle distanze lungo gli assi x, y, z nelle quali l'ampiezza dell'onda varia sensibilmente. Ad ogni istante il campo, come funzione delle coordinate, è dato da:

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r})\, e^{i\mathbf{k}_0\mathbf{r}},$$

dove $\mathbf{k}_0$ è il valore medio del vettore d'onda. In modo del tutto analogo alla deduzione della formula (58,1), si può trovare un intervallo $\Delta\mathbf{k}$ di valori contenuti nello sviluppo dell'onda considerata in integrale di Fourier:

$$\Delta k_x \Delta x \sim 1, \quad \Delta k_y \Delta y \sim 1, \quad \Delta k_z \Delta z \sim 1. \tag{58,2}$$

Consideriamo, in particolare, un'onda emessa in un intervallo di tempo finito. Indichiamo con Δt l'ordine di grandezza di questo intervallo di tempo. In un punto dato dello spazio l'ampiezza varia sensibilmente nel tempo Δt nel corso del quale l'onda transita completamente per questo punto. In virtú della relazione (58,1), possiamo dire ora che il «grado di acromatismo» $\Delta\omega$ di quest'onda non può essere comunque minore di $1/\Delta t$ (ma può essere eventualmente maggiore):

$$\Delta\omega \gtrsim \frac{1}{\Delta t}. \tag{58,3}$$

Analogamente, se Δx, Δy, Δz sono gli ordini di grandezza dell'onda nello spazio, per gli intervalli di valori delle componenti del vettore d'onda, che entrano nello sviluppo dell'onda, troviamo allora:

$$\Delta k_x \gtrsim \frac{1}{\Delta x}, \quad \Delta k_y \gtrsim \frac{1}{\Delta y}, \quad \Delta k_z \gtrsim \frac{1}{\Delta z}. \tag{58,4}$$

Da queste diseguaglianze segue che se si ha un fascio di luce di larghezza finita, la direzione di propagazione della luce in questo fascio non può essere rigorosamente costante. Orientando l'asse delle x lungo la direzione (media) della luce nel fascio, otteniamo:

$$\theta_y \gtrsim \frac{1}{k\Delta y} \sim \frac{\lambda}{\Delta y}, \tag{58,5}$$

dove θ_y è l'ordine di grandezza della deviazione del fascio dalla direzione media nel piano xy e λ la lunghezza d'onda.

D'altra parte, la formula (58,5) rappresenta la risposta al problema della nitidezza limite delle immagini ottiche. Un fascio di luce, tutti i raggi del quale si dovrebbero intersecare, secondo l'ottica geometrica, in un solo punto produce in realtà un'immagine non puntiforme, bensí a forma di macchia. Per la larghezza Δ di questa macchia, in virtú della (58,5) si ha:

$$\Delta \sim \frac{1}{k\theta} \sim \frac{\lambda}{\theta}, \tag{58,6}$$

dove θ è l'angolo d'apertura del fascio. Questa formula è applicabile non solo all'immagine, ma anche all'oggetto. Piú precisamente, si può affermare che, osservando un fascio di luce emesso da un punto luminoso, non si può distinguere questo punto da un corpo di dimensione λ/θ. Pertanto la formula (58,6) definisce il *potere risolutivo* limite di un microscopio. Il valore minimo di Δ, che si ottiene per $\theta \sim 1$, è λ, in pieno accordo con il fatto che i limiti dell'ottica geometrica sono determinati dalla lunghezza d'onda della luce.

PROBLEMA

Trovare l'ordine di grandezza della larghezza minima di un fascio luminoso formato da un fascio parallelo di luce a distanza l dal diaframma.

Soluzione. Indicando con d la dimensione del diaframma, ricaviamo dalla (58,5) che l'angolo di deviazione dei raggi (« angolo di diffrazione ») è circa $\sim\lambda/d$, per cui la larghezza del fascio è dell'ordine $d + \frac{\lambda}{d} l$. Il minimo di questa grandezza è $\sim\sqrt{\lambda l}$.

§ 59. *Diffrazione*

Le leggi dell'ottica geometrica sono rigorosamente esatte soltanto nel caso ideale in cui la lunghezza d'onda può essere considerata come infinitesima. Quanto meno è rispettata questa condizione, tanto piú forte è la deviazione dall'ottica geometrica. I fenomeni dovuti a queste deviazioni sono chiamati fenomeni di *diffrazione*.

I fenomeni di diffrazione si possono osservare, ad esempio, allorché la luce inconrta[1]) sul suo percorso ostacoli, ossia corpi opachi di forma arbitraria (che chiameremo *schermi*) oppure, ad esempio, allorché la luce passa attraverso fenditure praticate su schermi opachi. Se le leggi della ottica geometrica fossero rigorosamente valide,

[1]) Parleremo, per fissare le idee, della luce; tutto ciò che segue è valido per qualsiasi onda elettromagnetica.

dietro gli schermi si dovrebbero avere delle zone d'*ombra* nettamente distinte dalle zone illuminate. A causa della diffrazione invece di confine netto tra luce e ombra, si ha un quadro assai complesso di distribuzione della intensità della luce. Questi fenomeni di diffrazione sono tanto piú marcati, quanto minori sono le dimensioni degli schermi e delle fenditure in essi, oppure quanto maggiore è la lunghezza d'onda.

La teoria della diffrazione consiste, una volta note la disposizione e la forma dei corpi (ed anche la disposizione delle sorgenti di luce), nel determinare la distribuzione della luce, cioè il campo elettromagnetico in tutto lo spazio. La risoluzione esatta di questo problema è possibile soltanto se si risolve l'equazione d'onda con le condizioni corrispondenti sulle superfici dei corpi, condizioni che dipendono anche dalle proprietà ottiche dei vari materiali. La risoluzione presenta generalmente grosse difficoltà matematiche.

In molti casi tuttavia, è sufficiente ricorrere a un metodo approssimato di risoluzione del problema della distribuzione della luce in prossimità della frontiera tra luce e ombra. Questo metodo è applicabile ai casi in cui la deviazione dall'ottica geometrica è piccola. Con ciò si intende: primo, che tutte le dimensioni siano grandi in confronto alla lunghezza d'onda (questo riguarda sia le dimensioni degli schermi e delle fenditure, sia le distanze dei corpi dai punti d'emissione e d'osservazione della luce); secondo, che si prendano in considerazione soltanto piccole deviazioni della luce dalla direzione dei raggi, definite dall'ottica geometrica.

Consideriamo uno schermo qualsiasi con una fenditura attraverso la quale passa la luce emessa da sorgenti date. La figura 9 rappresenta la sezione (linea continua) di questo schermo; la luce si propaga da sinistra a destra. Indicheremo con u una componente qualsiasi del campo **E** od **H**. Con u intenderemo peraltro un campo dipendente soltanto dalle coordinate, cioè senza il fattore $e^{-i\omega t}$ che determina la dipendenza dal tempo. Ci proponiamo di determinare l'intensità della luce, cioè il campo u in ogni punto d'osservazione P dietro lo schermo. Nei casi in cui le deviazioni dall'ottica geometrica sono piccole, il problema si risolve approssimativamente, e si può ammettere allora che nei punti della fenditura il campo è lo stesso che si avrebbe se non ci fosse lo schermo.

In altri termini, i valori del campo sono in questo caso gli stessi dati dall'ottica geometrica. Nei punti immediatamente dietro lo schermo, il campo si può supporre nullo. È evidente inoltre, che le proprietà dello schermo stesso (del materiale di cui è fatto) non hanno generalmente nessuna importanza. È evidente anche che, nei casi considerati, soltanto la forma della fenditura ha importanza per la diffrazione, mentre la forma dello schermo opaco non ha importanza.

Tracciamo una superficie che chiuda la fenditura e sia limitata dal suo bordo (la sezione di questa superficie è data dalla linea tratteggiata nella fig. 9). Dividiamo questa superficie in elementi d'area df, piccoli in confronto alle dimensioni della fenditura, ma grandi in confronto alla lunghezza d'onda della luce. In questo caso ciascuno degli elementi raggiunti dall'onda luminosa può essere considerato a sua volta come centro di emissione, in tutte le direzioni, di nuove onde. Considereremo il campo nel punto P come il risultato della sovrapposizione dei campi emessi da tutti gli elementi df della superficie che chiude la fenditura (*principio di Huygens*).

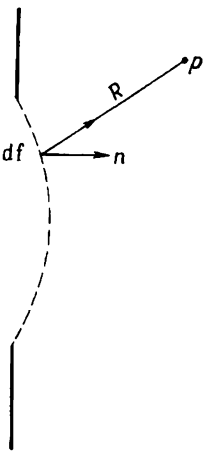

Fig. 9

Il campo creato dall'elemento df nel punto P è proporzionale al valore u del campo sull'elemento stesso df (ricordiamo che il campo su df è supposto tale quale esso sarebbe in assenza di schermo). Inoltre, esso è proporzionale alla proiezione df_n dell'area di df sul piano perpendicolare alla direzione **n** del raggio giunto dalla sorgente di luce su df. Ciò è dovuto al fatto che, qualunque sia la forma dell'elemento df, il numero di raggi che lo attraversa è propozzionale á df_n, e, di conseguenza, anche la sua azione sul campo nel punto P è la stessa.

Cosí, il campo creato nel punto P dall'elemento df è proporzionale ad $u\ df_n$. Bisogna inoltre tener conto della variazione dell'ampiezza e della fase dell'onda quando essa si propaga da df al punto P. Questa variazione è data dalla formula (54,3). Bisogna dunque moltiplicare ancora $u\ df_n$ per $\frac{1}{R}e^{ikR}$ (dove R è la distanza tra df e P, e k il valore assoluto del vettore d'onda della luce), e si trova che il campo cercato è

$$au\frac{e^{ikR}}{R}df_n,$$

dove a è, per il momento, una costante da determinare. Il campo totale in P, che è il risultato della sovrapposizione dei campi creati da tutti gli elementi df, è

$$u_P = a\int\frac{ue^{ikR}}{R}df_n, \qquad (59,1)$$

dove l'integrale è esteso alla superficie limitata dal bordo della fenditura. Questo integrale, nell'approssimazione considerata, non dipende ovviamente dalla forma della superficie. La formula (59,1) è applicabile, evidentemente, anche alla diffrazione da parte di uno schermo intorno al quale la luce può propagarsi liberamente. In

questo caso, la superficie di integrazione nella (59,1) è una superficie infinita non contenente lo schermo.

Per determinare la costante a, consideriamo un'onda piana che si propaga lungo l'asse delle x; le superfici d'onda sono parallele al piano yz. Sia u il valore del campo nel piano yz. Allora, nel punto P, che prendiamo sull'asse delle x, il campo è uguale ad $u_P = ue^{ikx}$. D'altra parte, il campo nel punto P può essere determinato, partendo dalla formula (59,1) e scegliendo per superficie d'integrazione, per esempio, il piano yz. Essendo piccolo l'angolo di diffrazione, all'integrale contribuiscono soltanto i punti del piano yz, vicini all'origine delle coordinate, cioè i punti nei quali y, $z \ll x$ (x è la coordinata del punto P).

Allora

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \approx x + \frac{y^2 + z^2}{2x}$$

e la (59,1) dà:

$$u_P = au \frac{e^{ikx}}{x} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik\frac{y^2}{2x}} dy \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik\frac{z^2}{2x}} dz,$$

dove u è costante (il campo nel piano yz); nel fattore $1/R$ si può porre $R \approx x =$ costante. Sostituendo $y = \xi \sqrt{2x/k}$, gli ultimi integrali assumono la forma

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi^2} d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \xi^2 d\xi + i \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sen} \xi^2 d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{2}} (1 + i),$$

e si ottiene: $u_P = aue^{ikx} \frac{2i\pi}{k}$. D'altra parte, $u_P = ue^{ikx}$ e, di conseguenza, $a = \frac{k}{2\pi i}$. Sostituendo questa espressione nella (59,1), troviamo in definitiva la soluzione del problema posto nella forma

$$u_P = \int \frac{ku}{2\pi i R} e^{ikR} df_n. \tag{59,2}$$

Nella deduzione della formula (59,2) si suppone che la sorgente di luce sia praticamente puntiforme, e che la luce stessa sia rigorosamente monocromatica. Il caso di una sorgente reale estesa, che emette raggi di luce non monocromatica non comporta, tuttavia, uno studio particolare. In virtú della completa indipendenza (incoerenza) della luce emessa da differenti punti della sorgente e dell'incoerenza delle diverse componenti spettrali, il risultato globale della diffrazione si riduce semplicemente alla somma delle distribuzioni dell'intensità ottenuta dalla diffrazione di ciascuna delle componenti indipendenti della luce.

Applichiamo la formula (59,2) alla soluzione del problema della variazione della fase allorché il raggio passa per il punto di contatto con la caustica (vedi la fine del § 54). Nella (59,2) scegliamo per superficie d'integrazione una superficie d'onda qualsiasi e determiniamo il campo u_P nel punto P che giace su un certo raggio a distanza x dal suo punto d'intersezione con la superficie d'onda scelta (prendiamo questo punto come origine delle coordinate O e come piano yz il piano tangente alla superficie d'onda nel punto O). Integrando la (59,2) è sufficiente limitarsi a quella piccola parte della superficie d'onda che si trova in prossimità del punto O. Se i piani xy ed xz sono stati scelti in maniera tale da farli coincidere con i piani principali di curvatura della superficie d'onda nel punto O, in prossimità di questo punto l'equazione della superficie è

$$X = \frac{y^2}{2R_1} + \frac{z^2}{2R_2},$$

dove R_1 ed R_2 sono i raggi di curvatura. La distanza R tra il punto della superficie d'onda di coordinate X, y, z e il punto P di coordinate x, 0, 0, è:

$$R = \sqrt{(x-X)^2 + y^2 + z^2} \approx x + \frac{y^2}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{R_1}\right) + \frac{z^2}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{R_2}\right).$$

Il campo u sulla superficie d'onda si può considerare costante lo stesso si può dire del fattore $1/R$. Poiché ci interessa soltanto la variazione della fase, possiamo omettere il coefficiente e scrivere semplicemente:

$$u_P \sim \frac{1}{i}\int e^{ikR}\,df_n \approx$$

$$\approx \frac{e^{ikx}}{i}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik\frac{y^2}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{R_1}\right)}dy \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik\frac{z^2}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{R_2}\right)}dz. \qquad (59,3)$$

I centri di curvatura della superficie d'onda giacciono sul raggio considerato nei punti $x = R_1$ ed $x = R_2$; questi sono esattamente i punti di contatto del raggio con le due caustiche. Sia $R_2 < R_1$. Per $x < R_2$ i coefficienti di i negli esponenti delle espressioni integrande sono positivi, e ciascuno di questi integrali contiene il fattore $1 + i$. Di conseguenza, sul segmento di raggio, precedente il punto di contatto con la prima caustica, abbiamo $u_P \sim e^{ikx}$. Per $R_2 < x < R_1$, cioè sul segmento di raggio compreso tra i due punti di contatto, l'integrale in dy contiene il fattore $1 + i$, e l'integrale in dz il fattore $1 - i$, quindi il loro prodotto non contiene i. Abbiamo dunque: $u_P \sim -ie^{ikx} = e^{i(kx-\pi/2)}$, cioè la fase varia ancora una volta di $-\pi/2$ quando il raggio passa in prossimità della prima caustica. Infine, per $x > R_1$ abbiamo $u_P \sim -e^{ikx} = e^{i(kx-\pi)}$, cioè la fase varia di $-\pi/2$ quando il raggio passa in prossimità della seconda caustica.

PROBLEMA

Determinare la distribuzione dell'intensità della luce in prossimità del punto di contatto di un raggio con la caustica.

Soluzione. Per risolvere il problema, prendiamo la formula (59,2) dove l'integrale è esteso a una superficie d'onda sufficientemente distante dal punto di contatto del raggio con la caustica. Nella figura 10 ab è la sezione di questa superficie d'onda, ed $a'b'$ la sezione della caustica; $a'b'$ è l'inviluppo della curva ab. Quello che vogliamo determinare è la distribuzione dell'intensità in prossimità del punto di contatto O del raggio QO con la caustica; si suppone che la lunghezza D del segmento di raggio QO sia sufficientemente

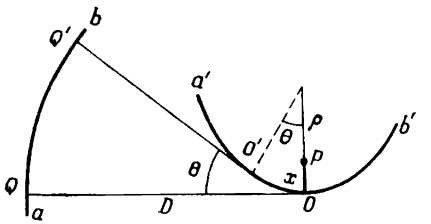

Fig. 10

grande. Indichiamo con x la distanza lungo la normale tra il punto O e la caustica, considerando come positive le x dei punti della normale situati dalla parte del centro di curvatura.

L'espressione integranda nella (59,2) è una funzione della distanza R tra un'punto arbitrario Q' sulla superficie d'onda e il punto P. È ben noto che, per un iviluppo, la somma delle lunghezze del segmento $Q'O'$ tangente nel punto O' e dell'arco OO' è uguale alla lunghezza del segmento QO tangente nel punto O. Quando i punti O ed O' sono vicini, si ha $OO' = \theta\rho$ (ρ è il raggio di curvatura della caustica nel punto O). Perciò la lunghezza $Q'O' = D - \theta\rho$. Per quanto concerne la distanza $Q'O$ (lungo la retta), essa è uguale approssimativamente (l'angolo θ è supposto piccolo) a:

$$Q'O \approx Q'O' + \rho \operatorname{sen} \theta = D - \theta\rho + \rho \operatorname{sen} \theta \approx D - \frac{\rho\theta^3}{6}.$$

Infine, la distanza $R = Q'P$ è $R \approx Q'O - x \operatorname{sen} \theta \approx Q'O - x\theta$, cioè

$$R \approx D - x\theta - \frac{1}{6}\rho\theta^3.$$

Sostituendo questa espressione nella (59,2), troviamo:

$$u_P \sim \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx\theta - \frac{ik\rho}{6}\theta^3} d\theta = 2\int_0^{\infty} \cos\left(kx\theta + \frac{k\rho}{6}\theta^3\right) d\theta$$

(il fattore $1/D$, che varia lentamente, non ha un'importanza sostanziale nell'espressione integranda rispetto al fattore esponenziale e si può considerarlo costante). Introducendo la nuova variabile d'integrazione $\xi = (k\rho/2)^{1/3}\theta$ otteniamo:

$$u_P \sim \Phi\left(x\sqrt[3]{\frac{2k^2}{\rho}}\right),$$

dove $\Phi(t)$ è la funzione di *Airy* [1]). Per l'intensità $I \sim |u_p|^2$ troviamo:

$$I = 2A\left(\frac{2k^2}{\rho}\right)^{1/6}\Phi^2\left(x\sqrt[3]{\frac{2k^2}{\rho}}\right)$$

(per la scelta del fattore costante vedi piú avanti).

Dall'ultima formula, per valori positivi grandi di x, l'espressione asintotica è

$$I \approx \frac{A}{2\sqrt{x}}\exp\left(-\frac{4x^{3/2}}{3}\sqrt{\frac{2k^2}{\rho}}\right),$$

cioè l'intensità decresce esponenzialmente (zona d'« ombra »). Per valori assoluti negativi grandi di x, abbiamo:

$$I \approx \frac{2A}{\sqrt{-x}}\,\mathrm{sen}^2\left[\frac{2(-x)^{3/2}}{3}\sqrt{\frac{2k^2}{\rho}}+\frac{\pi}{4}\right],$$

cioè l'intensità oscilla rapidamente; il valore medio di I rispetto a queste oscillazioni è

$$\bar{I} = \frac{A}{\sqrt{-x}}.$$

Da cui risulta chiaro il significato della costante A: essa definisce l'intensità in regioni lontane dalla caustica che si avrebbero secondo l'ottica geometrica in assenza dei fenomeni di diffrazione.

La funzione $\Phi(t)$ raggiunge il valore massimo, uguale a 0,949, per $t = -1{,}02$; di conseguenza, l'intensità massima si ottiene per $x\,(2k^2/\rho)^{1/3} = -1{,}02$, dove

$$I = 2{,}03Ak^{1/3}\rho^{-1/6}$$

---

[1]) La funzione di Airy $\Phi(t)$ è data dalla formula

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \cos\left(\frac{\xi^3}{3}+\xi t\right)d\xi \tag{1}$$

(vedi vol. III, *Meccanica quantistica*, § b). Per valori positivi grandi di t, la funzione $\Phi(t)$ decresce esponenzialmente secondo la legge asintotica

$$\Phi(t) \approx \frac{1}{2t^{1/4}}\exp\left(-\frac{2}{3}t^{3/2}\right). \tag{2}$$

Per valori negativi grandi di t la funzione $\Phi(t)$ oscilla con un'ampiezza decrescente secondo la legge

$$\Phi(t) \approx \frac{1}{(-t)^{1/4}}\,\mathrm{sen}\left[\frac{2}{3}(-t)^{3/2}+\frac{\pi}{4}\right]. \tag{3}$$

La funzione di Airy è legata alla funzione di MacDonald (funzione di Hankel modificata) dell'ordine 1/3 dalla formula:

$$\Phi(t) = \sqrt{\frac{t}{3\pi}}\,K_{1/3}\left(\frac{2}{3}t^{3/2}\right). \tag{4}$$

La (2) corrisponde all'espressione asintotica delle funzioni $K_\nu(t)$:

$$K_\nu(t) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2t}}\,e^{-t}.$$

(nel punto stesso di contatto del raggio con la caustica, $x = 0$, si ha $I = 0{,}89\, Ak^{1/3}\rho^{-1/6}$, essendo $\Phi(0) = 0{,}629$). In tal modo, in prossimità della caustica l'intensità è proporzionale a $k^{1/3}$, cioè a $\lambda^{-1/3}$ (λ è la lunghezza d'onda). Per $\lambda \to 0$, l'intensità, come sappiamo (cfr. § 54), tende all'infinito.

§ 60. *Diffrazione di Fresnel*

Se la sorgente luminosa e il punto P, dove vogliamo determinare l'intensità della luce, si trovano ad una distanza finita dallo schermo, contribuisce all'intensità in P solo una piccola regione della superficie d'onda alla quale è estesa l'integrazione nella (59,2); questa regione giace in prossimità della retta che congiunge la sorgente luminosa con il punto P. Infatti, poiché le deviazioni dall'ottica geometrica sono piccole, l'intensità della luce che giunge in P dai diversi punti della superficie d'onda diminuisce molto

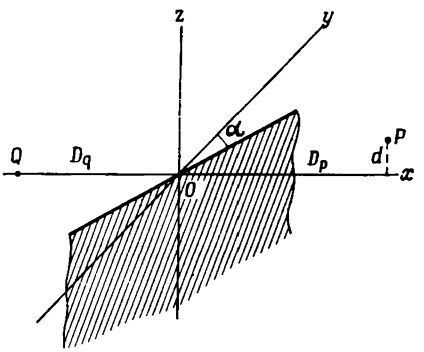

Fig. 11

rapidamente allontanandosi dalla retta in questione. I fenomeni di diffrazione in cui intervengono solamente regioni piccole della superficie d'onda sono detti le *diffrazioni di Fresnel.*

Consideriamo la diffrazione di Fresnel da parte di uno schermo. In virtú della proprietà indicata all'inizio del paragrafo, dato il punto P è rilevante soltanto una piccola parte del bordo dello schermo. Per tratti sufficientemente piccoli si può sempre supporre che il bordo dello schermo sia rettilineo. In seguito, con schermo intenderemo proprio un piccolo tratto rettilineo.

Scegliamo come piano xy il piano passante per la sorgente della luce incidente Q (fig. 11) e per la linea che definisce il bordo dello schermo. Scegliamo il piano xz, perpendicolare al piano xy in maniera che passi per il punto Q e il punto d'osservazione P dove si vuole determinare l'intensità della luce. Infine, prendendo l'origine delle

coordinate O sulla linea che costituisce il bordo dello schermo, la posizione di tutti e tre gli assi risulterà completamente definita.

Sia D_q la distanza della sorgente Q dall'origine delle coordinate. Indichiamo con D_p la coordinata x del punto d'osservazione P e con d la sua coordinata z, cioè la distanza dal piano xy. Secondo l'ottica geometrica, la luce potrebbe arrivare soltanto nei punti situati sopra il piano xy; la regione situata sotto questo piano dovrebbe rimanere, sempre secondo l'ottica geometrica, in ombra (zona dell'ombra geometrica).

Determiniamo ora la distribuzione dell'intensità della luce dietro lo schermo, in prossimità della frontiera dell'ombra geometrica, cioè per valori piccoli di d (rispetto a D_p e D_q). Un valore negativo di d significa che il punto P si trova nella zona dell'ombra geometrica.

Per superficie d'integrazione nella (59,2) prendiamo il semipiano passante per il bordo dello schermo e perpendicolare al piano xy. Le coordinate x ed y dei punti di questa superficie sono legate dalla relazione $x = y \operatorname{tg} \alpha$ (α è l'angolo tra la linea del bordo dello schermo e l'asse delle y), e la coordinata z è positiva. Il campo dell'onda incidente alla distanza R_q dalla sorgente Q è proporzionale al fattore $\exp(ikR_q)$. Ne segue che il campo u sulla superficie d'integrazione è proporzionale a

$$u \sim \exp\left[ik\sqrt{y^2 + z^2 + (D_q + y \operatorname{tg} \alpha)^2}\right].$$

Nell'integrale (59,2) bisogna ora sostituire R con

$$R = \sqrt{y^2 + (z - d)^2 + (D_p - y \operatorname{tg} \alpha)^2}.$$

Nell'espressione integranda, i fattori lentamente variabili sono poco importanti rispetto all'esponenziale. Possiamo dunque considerare $1/R$ come costante e sostituire df_n con $dy\, dz$. Per il campo nel punto P troviamo allora:

$$u_P \sim \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{0}^{\infty} \exp\left[ik\sqrt{(D_q + y \operatorname{tg} \alpha)^2 + y^2 + z^2} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{(D_p - y \operatorname{tg} \alpha)^2 + y^2 + (z - d)^2}\right] dy\, dz. \qquad (60,1)$$

Come abbiamo già detto, la luce giunge nel punto P proveniente soprattutto dai punti del piano d'integrazione, vicini ad O. Quindi nell'integrale (60,1) danno un apporto sensibile soltanto valori piccoli (rispetto a D_q e D_p) di y e z. Possiamo quindi scrivere:

$$\sqrt{(D_q + y \operatorname{tg} \alpha)^2 + y^2 + z^2} \approx D_q + \frac{y^2 \sec^2 \alpha + z^2}{2D_q} + y \operatorname{tg} \alpha,$$

$$\sqrt{(D_p - y \operatorname{tg} \alpha)^2 + y^2 + (z - d)^2} \approx D_p + \frac{y^2 \sec^2 \alpha + (z - d)^2}{2D_p} - y \operatorname{tg} \alpha.$$

Sostituiamo queste espressioni nella (60,1). Poiché il campo ci interessa soltanto come funzione della distanza d, possiamo quindi omettere il fattore costante $\exp[ik(D_p + D_q)]$ e anche l'integrale in dy che pure non contiene d. Troviamo allora:

$$u_P \sim \int_0^\infty \exp\left[ik\left(\frac{1}{2D_q}z^2 + \frac{1}{2D_p}(z-d)^2\right)\right]dz.$$

Questa espressione può essere scritta nella forma seguente:

$$u_P \sim \exp\left[ik\frac{d^2}{2(D_p+D_q)}\right]\int_0^\infty \exp\left[ik\frac{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{D_p}+\frac{1}{D_q}\right)z-\frac{d}{D_p}\right]^2}{\frac{1}{D_p}+\frac{1}{D_q}}\right]dz. \tag{60,2}$$

L'intensità della luce è determinata dal quadrato del campo, cioè dal quadrato del modulo $|u_P|^2$. Dunque, il fattore che precede l'integrale non ha importanza per la determinazione dell'intensità, perché ha modulo unitario. Con una sostituzione evidente l'integrale si riduce alla forma

$$u_P \sim \int_{-w}^\infty e^{i\eta^2}d\eta, \tag{60,3}$$

dove

$$w = d\sqrt{\frac{kD_q}{2D_p(D_q+D_p)}}. \tag{60,4}$$

Cosí, l'intensità I nel punto P è:

$$I = \frac{I_0}{2}\left|\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-w}^\infty e^{i\eta^2}d\eta\right|^2 = \frac{I_0}{2}\left[\left(C(w^2)+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(S(w^2)+\frac{1}{2}\right)^2\right], \tag{60,5}$$

dove

$$C(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\sqrt{z}}\cos\eta^2 d\eta, \quad S(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\sqrt{z}}\operatorname{sen}\eta^2 d\eta$$

sono i cosiddetti integrali di Fresnel. La formula (60,5) rappresenta la soluzione del problema, determinando l'intensità della luce come una funzione di d; I_0 è l'intensità nella zona illuminata in punti sufficientemente distanti dal confine della zona d'ombra, cioè per $w \gg 1$ (al limite $w \to \infty$ si ha $C(\infty) = S(\infty) = 1/2$).

Le zone dell'ombra geometrica corrispondono a w negative. È facile stabilire la forma asintotica della funzione $I(w)$ per valori grandi negativi di w. A questo scopo procediamo come segue. Integriamo per parti:

$$\int_{|w|}^{\infty} e^{i\eta^2}\,d\eta = -\frac{1}{2i\,|w|}\,e^{iw^2} + \frac{1}{2i}\int_{|w|}^{\infty} e^{i\eta^2}\,\frac{d\eta}{\eta^2}.$$

Integrando per parti ancora una volta nel secondo membro di questa uguaglianza e ripetendo questo procedimento, otteniamo una serie di potenze di $1/\,|\,w\,|$:

$$\int_{|w|}^{\infty} e^{i\eta^2}\,d\eta = e^{iw^2}\left(-\frac{1}{2i\,|w|} + \frac{1}{4\,|w|^3} - \ldots\right). \tag{60,6}$$

Sebbene una serie infinita di questo tipo non sia convergente, già il suo primo termine dà, per valori di $|\,w\,|$ sufficientemente grandi, una buona rappresentazione della funzione a primo membro, poiché per $|\,w\,|$ i termini successivi tendono rapidamente a zero. (Tali serie sono dette asintotiche). In tal modo, per l'intensità $I(w)$ (60,5) otteniamo la seguente espressione asintotica, valida per valori grandi negativi di w:

$$I = \frac{I_0}{4\pi w^2}. \tag{60,7}$$

Si vede che nella zona dell'ombra geometrica, in regioni lontane dal confine, l'intensità tende a zero in modo inversamente proporzionale al quadrato della distanza dal confine stesso.

Consideriamo ora i valori positivi di w, cioè la zona sopra il piano xy. Scriviamo:

$$\int_{-w}^{\infty} e^{i\eta^2}\,d\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\eta^2}\,d\eta - \int_{-\infty}^{-w} e^{i\eta^2}\,d\eta = (1+i)\sqrt{\frac{\pi}{2}} - \int_{w}^{\infty} e^{i\eta^2}\,d\eta.$$

Per w sufficientemente grandi si può utilizzare la rappresentazione asintotica dell'integrale del primo membro dell'uguaglianza, e si avrà:

$$\int_{-w}^{\infty} e^{i\eta^2}\,d\eta \approx (1+i)\sqrt{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2iw}\,e^{iw^2}. \tag{60,8}$$

Sostituendo questa espressione nella (60,5), otteniamo:

$$I = I_0\left[1 + \sqrt{\frac{1}{\pi}}\,\frac{\operatorname{sen}\left(w^2 - \frac{\pi}{4}\right)}{w}\right]. \tag{60,9}$$

In tal modo, nella regione illuminata, distante dal confine dell'ombra, l'intensità presenta infiniti massimi e minimi, cosicché il rapporto I/I_0 oscilla intorno al valore 1. L'ampiezza di queste oscillazioni diminuisce al crescere di w in modo inversamente proporzionale alla distanza dal confine dell'ombra geometrica, mentre i punti di massimo e minimo si avvicinano.

Per valori piccoli di w la funzione $I(w)$ ha qualitativamente le stesse proprietà (fig. 12). Nella zona dell'ombra geometrica l'intensità decresce monotonamente quando ci si allontana dal confine

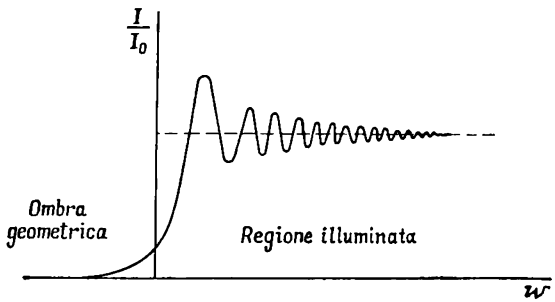

Fig. 12

dell'ombra (su cui $I/I_0 = {}^1/_4$). Per w positivi l'intensità ha dei massimi e dei minimi alternati. Nel primo massimo, il maggiore, $I/I_0 = 1{,}37$.

§ 61. *Diffrazione di Fraunhofer*

I fenomeni di diffrazione generati dall'incidenza su schermi di fasci piani e paralleli presentano un interesse particolare per le applicazioni fisiche. In seguito alla diffrazione il fascio cessa di essere parallelo e la luce si propaga anche in direzioni differenti dalla direzione iniziale. Poniamo il problema di determinare la distribuzione in direzioni dell'intensità della luce diffratta a grandi distanze oltre lo schermo (questa situazione corrisponde alla cosiddetta *diffrazione di Fraunhofer*). Ci limitiamo, intanto, ancora una volta al caso di deviazioni piccole dall'ottica geometrica, supponendo cioè piccoli gli angoli di deviazione dalla direzione iniziale dei raggi (angoli di diffrazione).

Il problema posto si potrebbe risolvere partendo dalla formula generale (59,2) e passando in essa al limite per cui la sorgente luminosa e il punto d'osservazione sono separati dallo schermo a una distanza infinita. Una caratteristica particolare del caso considerato

sta nel fatto che nell'integrale che definisce l'intensità della luce diffratta, la superficie d'onda, alla quale è estesa l'integrazione, ha un ruolo essenziale (contrariamente al caso della diffrazione di Fresnel, dove erano effettivamente importanti solamente le parti della superficie d'onda vicine al bordo dello schermo)[1].

È piú semplice, però, riesaminare il problema posto, senza ricorrere alla formula generale (59,2).

Indichiamo con u_0 il campo che si avrebbe oltre lo schermo se le leggi dell'ottica geometrica fossero rigorosamente valide. Esso rappresenta un'onda piana la cui sezione trasversale comprende, tuttavia, dei tratti (corrispondenti all' « ombra » degli schermi opachi) dove il campo è nullo. Indichiamo con S la parte del piano della sezione trasversale dove il campo u_0 è differente da zero; siccome ciascun piano di questo genere è una superficie di un'onda piana, si ha $u_0 =$ costante su tutta l'area S.

In realtà, un'onda la cui sezione trasversale ha un'area limitata, non può essere rigorosamente piana (vedi § 58). Lo sviluppo spaziale di Fourier di questa onda contiene componenti con vettori d'onda di direzioni diverse; questo fatto sta all'origine dei fenomeni di diffrazione.

Sviluppiamo il campo u_0 in un integrale doppio di Fourier secondo le coordinate y, z nel piano della sezione trasversale dell'onda. Per le componenti di Fourier si ha:

$$u_{\mathbf{q}} = \iint\limits_S u_0 e^{-i\mathbf{qr}}\, dy\, dz, \tag{61,1}$$

dove $\mathbf{q}$ sono vettori costanti nel piano yz; l'integrazione è effettuata di fatto soltanto sulla parte S del piano yz, dove u_0 è differente da zero. Se $\mathbf{k}$ è il vettore d'onda dell'onda incidente, alla componente $u_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{qr}}$ del campo corrisponde il vettore d'onda $\mathbf{k}' = \mathbf{k} + \mathbf{q}$. In tal modo, il vettore $\mathbf{q} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}$ determina la variazione del vettore d'onda della luce nella diffrazione. Siccome i valori assoluti sono $k = k' = \omega/c$, ne segue che i piccoli angoli di diffrazione θ_y e θ_z nei piani xy ed xz sono legati alle componenti del vettore

[1]) Si possono ottenere facilmente i criteri per distinguere le diffrazioni di Fresnel e di Fraunhofer, riprendendo la formula (60,2) ed applicandola, per esempio, ad una fessura di larghezza a (in luogo del bordo di uno schermo isolato). L'integrazione su dz nella (60,2) sarà fatta allora da 0 ad a. La diffrazione di Fresnel corrisponde al caso in cui nell'esponenziale dell'espressione integranda il termine in z^2 è essenziale e l'estremo superiore d'integrazione può essere sostituito con ∞. A questo scopo si dovrà avere:

$$ka^2\left(\frac{1}{D_p}+\frac{1}{D_q}\right) \gg 1.$$

Al contrario, se questa disuguaglianza ha il segno opposto, il termine in z^2 può essere omesso e si ha il caso della diffrazione di Fraunhofer.

q dalle relazioni

$$q_y = \frac{\omega}{c}\theta_y, \quad q_z = \frac{\omega}{c}\theta_z. \tag{61,2}$$

Quando la deviazione dall'ottica geometrica è piccola, si può supporre che le componenti dello sviluppo del campo u_0 coincidano con quelle del campo reale della luce diffratta, cosicché la formula (61,1) risolve il problema posto.

La distribuzione dell'intensità della luce diffratta è determinata dal quadrato $|u_{\mathbf{q}}|^2$ come funzione del vettore **q**. Il legame quantitativo con l'intensità della luce incidente è dato dalla formula

$$\int\int u_0^2\, dy\, dz = \int\int |u_{\mathbf{q}}|^2 \frac{dq_y\, dq_z}{(2\pi)^2} \tag{61,3}$$

(cfr. (49,8)). Si vede che l'intensità relativa della diffrazione nell'elemento d'angolo solido $do = d\theta_y d\theta_z$ è data dall'espressione:

$$\frac{|u_{\mathbf{q}}|^2}{u_0^2}\frac{dq_y\, dq_z}{(2\pi)^2} = \left(\frac{\omega}{2\pi c}\right)^2 \left|\frac{u_{\mathbf{q}}}{u_0}\right|^2 do. \tag{61,4}$$

Consideriamo la diffrazione di Fraunhofer da due schermi « complementari » tra di loro: il primo schermo ha una fenditura laddove il secondo è opaco, e viceversa. Indichiamo con $u^{(1)}$ ed $u^{(2)}$ i campi della luce diffratta da questi schermi (se la luce incidente in ambedue i casi è uguale). Siccome $u_{\mathbf{q}}^{(1)}$ ed $u_{\mathbf{q}}^{(2)}$ sono dati dagli integrali (61,1) presi sulle aree delle fenditure negli schermi e le fenditure di ambedue gli scermi si completano vicendevolmente sino a costituire un piano intero, la somma $u_{\mathbf{q}}^{(1)} + u_{\mathbf{q}}^{(2)}$ è la componente di Fourier del campo che si ottiene in assenza degli schermi, cioè del campo prodotto semplicemente dalla luce incidente. La luce incidente rappresenta però un'onda rigorosamente piana con una determinata direzione di propagazione, quindi $u_{\mathbf{q}}^{(1)} + u_{\mathbf{q}}^{(2)} = 0$ per qualsiasi **q** differente da zero. In tal modo, si ha $u_{\mathbf{q}}^{(1)} = -u_{\mathbf{q}}^{(2)}$ oppure, per le intensità corrispondenti,

$$|u_{\mathbf{q}}^{(1)}|^2 = |u_{\mathbf{q}}^{(2)}|^2 \quad \text{per} \quad \mathbf{q} \neq 0. \tag{61,5}$$

Ciò vuol dire che gli schermi complementari danno distribuzioni identiche di intensità della luce diffratta (*principio di Babinet*).

Ricordiamo qui una conseguenza interessante del principio di Babinet. Consideriamo un corpo nero qualsiasi, cioè un corpo che assorbe totalmente tutta la luce incidente. Secondo l'ottica geometrica, l'illuminazione di un tale corpo produrrebbe dietro di esso una zona dell'ombra geometrica la cui sezione avrebbe un'area uguale all'area della sezione del corpo nella direzione perpendicolare a quella d'incidenza della luce. La presenza della diffrazione provocherà però una parziale deviazione della luce dalla direzione iniziale. Come risultato, a grandi distanze dal corpo nero non

ci sarà ombra, ma, insieme alla luce che si propaga nella direzione iniziale, si avrà pure luce propagantesi sotto piccoli angoli rispetto alla direzione iniziale. È facile determinare l'intensità di questa luce detta diffusa. A questo scopo, osserviamo, che in virtú del principio di Babinet, la quantità di luce deviata in seguito alla diffrazione sul corpo considerato è uguale alla quantità di luce che devierebbe nella diffrazione su una fenditura praticata su schermo opaco, la cui forma e area coincidano con la forma e area della sezione trasversale del corpo. Nel caso della diffrazione di Fraunhofer da una fenditura devia tutta la luce passante per essa. Ne segue che la quantità totale della luce diffusa dal corpo nero è uguale alla quantità di luce incidente sulla sua superficie e da esso assorbita.

PROBLEMI

1. Determinare la diffrazione di Fraunhofer di un'onda piana che incide normalmente su una fenditura infinita (di larghezza $2a$) con bordi paralleli ricavata da uno schermo opaco.

Soluzione. Prendiamo il piano della fenditura per piano yz, e dirigiamo l'asse delle z lungo la fenditura (la fig. 13 rappresenta la sezione dello schermo). Per

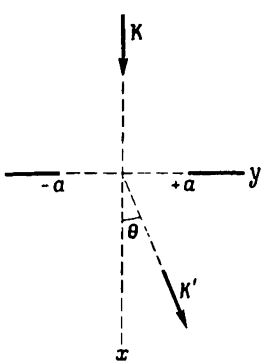

Fig. 13

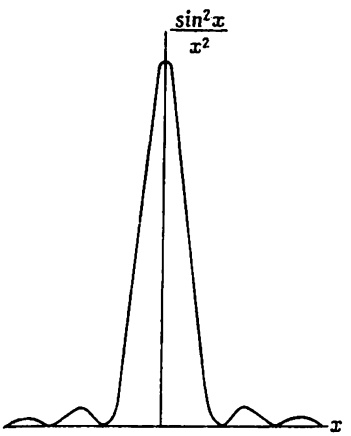

Fig. 14

una incidenza normale della luce, il piano della fenditura è una delle superficie d'onda che scegliamo per superficie d'integrazione nella (61,1). Dato che la fenditura è infinita, la luce devia soltanto nel piano xy (l'integrale (61,1) si annulla per $q_z \neq 0$). Di conseguenza, lo sviluppo del campo u_0 va fatto soltanto secondo la coordinata y:

$$u_q = u_0 \int_{-a}^{a} e^{-iqy}\, dy = \frac{2u_0}{q} \operatorname{sen} qa.$$

L'intensità della luce diffratta nell'intervallo angolare $d\theta$ è

$$dI = \frac{I_0}{2a} \left| \frac{u_q}{u_0} \right|^2 \frac{dq}{2\pi} = \frac{I_0}{\pi a k} \frac{\operatorname{sen}^2 ka\theta}{\theta^2} d\theta,$$

dove $k = \omega/c$, I_0 è l'intensità totale della luce incidente sulla fenditura.

$dI/d\theta$ come funzione dell'angolo di diffrazione ha la forma rappresentata nella fig. 14. Quando θ si sposta dal valore $\theta = 0$, l'intensità ha una serie di massimi la cui altezza diminuisce rapidamente. I massimi sono separati da minimi nei punti $\theta = n\pi/ka$ (n intero) dove l'intensità è nulla.

2. Risolvere il problema precedente per la diffrazione da un reticolo: cioè da uno schermo piano attraversato da una serie di fenditure parallele identiche (la larghezza di una fenditura è $2a$, la larghezza di un tratto opaco che separa due fenditure vicine è $2b$, il numero di fenditure N).

Soluzione. Prendiamo il piano del reticolo per piano yz, e dirigiamo l'asse delle z parallelamente alle fenditure. La diffrazione avrà luogo nuovamente nel piano xy, e l'integrazione nella (61,1) dà:

$$u_q = u'_q \sum_{n=0}^{N-1} e^{-2inqd} = u'_q \frac{1 - e^{-2iNqd}}{1 - e^{-2iqd}},$$

dove $d = a + b$, e u'_q è il risultato dell'integrazione fatta su una fenditura. Sfruttando i risultati del problema 1, abbiamo:

$$dI = \frac{I_0 a}{N\pi} \left(\frac{\operatorname{sen} Nqd}{\operatorname{sen} qd} \right)^2 \left(\frac{\operatorname{sen} qa}{qa} \right)^2 dq = \frac{I_0}{N\pi a k} \left(\frac{\operatorname{sen} Nk\theta d}{\operatorname{sen} k\theta d} \right)^2 \frac{\operatorname{sen}^2 ka\theta}{\theta^2} d\theta$$

(I_0 è l'intensità totale della luce passante per tutte le fenditure).

Per un numero grande di fenditure ($N \to \infty$), questa formula può esser scritta in un'altra forma. Per i valori $q = \pi n/d$ (n è un numero intero), dI/dq ha dei massimi; in prossimità di un massimo (cioè per $qd = n\pi + \varepsilon$, ε piccola) si ha:

$$dI = I_0 a \left(\frac{\operatorname{sen} qa}{qa} \right)^2 \frac{\operatorname{sen}^2 N\varepsilon}{\pi N \varepsilon^2} dq.$$

Ma per $N \to \infty$, si può usare la proprietà[1])

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 Nx}{\pi N x^2} = \delta(x).$$

Di conseguenza, in prossimità di ogni massimo si ha:

$$dI = I_0 \frac{a}{d} \left(\frac{\operatorname{sen} qa}{qa} \right)^2 \delta(\varepsilon)\, d\varepsilon,$$

cioè i massimi hanno al limite una larghezza infinitesima, e l'intensità totale della luce nell'n-esimo massimo è

$$I^{(n)} = I_0 \frac{d}{\pi^2 a} \frac{\operatorname{sen}^2 (n\pi a/d)}{n^2}.$$

---

[1]) Per $x \neq 0$, la funzione a primo membro dell'uguaglianza è nulla, e, in virtú delle formule note dalla teoria delle serie di Fuorier, si ha

$$\lim_{N\to\infty} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-a}^{a} f(x) \frac{\operatorname{sen}^2 Nx}{Nx^2} dx \right) = f(0).$$

da cui si vede che le proprietà di questa funzione coincidono effettivamente con le proprietà della funzione δ (vedi nota alla pag. 100.)

3. Determinare la distribuzione dell'intensità nelle varie direzioni per diffrazione della luce incidente in direzione normale su una apertura circolare di raggio a.

Soluzione. Introduciamo le coordinate cilindriche z, r, φ e l'asse delle z passante per il centro della apertura e ad essa perpendicolare. È evidente che la diffrazione è simmetrica rispetto all'asse delle z, e guindi il vettore $\mathbf{q}$ ha solamente una componente radiale $q_r = q = k\theta$. Misurando l'angolo φ a partire dalla direzione di $\mathbf{q}$ ed integrando nella (61,1) sul piano dell'apertura, troviamo:

$$u_q = u_0 \int_0^a \int_0^{2\pi} e^{-iqr\cos\varphi} r\, d\varphi\, dr = 2\pi u_0 \int_0^a J_0(qr)\, r\, qr,$$

dove J_0 è la funzione di Bessel d'ordine zero. Con l'aiuto della nota formula

$$\int_0^a J_0(qr)\, r\, dr = \frac{a}{q} J_1(aq)$$

ricaviamo:

$$u_q = \frac{2\pi u_0 a}{q} J_1(aq),$$

e, in virtú della (61,4), troviamo in definitiva l'intensità della luce diffratta nell'elemento d'angolo solido do:

$$dI = I_0 \frac{J_1^2(ak\theta)}{\pi\theta^2}\, do,$$

dove I_0 è l'intensità totale della luce incidente.

Capitolo VIII

CAMPO DI CARICHE IN MOTO

§ 62. *Potenziali ritardati*

Nel capitolo V abbiamo studiato il campo costante generato da cariche in quiete, nel capitolo VI abbiamo considerato un campo variabile ma in assenza di cariche. Passiamo ora allo studio di campi variabili in presenza di cariche animate da un moto arbitrario.

Deduciamo le equazioni che determinano i potenziali di un campo generato da cariche in moto. A questo scopo la notazione quadridimensionale risulta piú comoda; ripetiamo qui nuovamente la deduzione fatta alla fine del § 46 con la sola differenza che bisogna prendere in questo caso le equazioni di Maxwell (30,2)

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} j^i$$

dove il secondo membro è differente da zero. Un secondo membro identico apparirà anche nell'equazione (46,8), e dopo aver imposto ai potenziali la condizione di Lorentz

$$\frac{\partial A^i}{\partial x^i} = 0, \quad \text{cioè} \quad \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{A} = 0, \tag{62,1}$$

otteniamo:

$$\frac{\partial^2 A^i}{\partial x_k \, \partial x^k} = \frac{4\pi}{c} j^i. \tag{62,2}$$

Questa è l'equazione che definisce i potenziali di un campo elettromagnetico arbitrario. In forma tridimensionale, questa equazione si scrive sotto forma di due equazioni: per $\mathbf{A}$ e per φ:

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \tag{62,3}$$

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho. \tag{62,4}$$

Per un campo costante esse si riducono alle già note equazioni (36,4) e (43,4), e per un campo variabile senza cariche alle equazioni d'onda omogenee.

La soluzione delle equazioni lineari non omogenee (62,3) e (62,4) può essere rappresentata, come è noto, come somma della solu-

zione generale delle equazioni omogenee associate e un integrale particolare delle equazioni stesse. Per trovare questo integrale particolare, dividiamo tutto lo spazio in elementi infinitesimi e determiniamo il campo generato da una carica in uno di questi elementi di volume. In virtú della linearità delle equazioni, il campo reale sarà uguale alla somma dei campi creati da tutti gli elementi di questo tipo.

La carica de nell'elemento di volume dato è generalmente una funzione del tempo. Se si prende l'origine delle coordinate nell'elemento di volume considerato, la densità della carica sarà allora $\rho = de\,(t)\,\delta\,(\mathbf{R})$, dove $\mathbf{R}$ è la distanza dall'origine delle coordinate. In tal modo, dobbiamo risolvere l'equazione

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -4\pi\, de\,(t)\,\delta\,(\mathbf{R}). \tag{62,5}$$

$\delta\,(\mathbf{R})$ è nulla ovunque, tranne che nell'origine delle coordinate, e si ha l'equazione

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0. \tag{62,6}$$

È evidente che nel caso considerato φ è dotata di simmetria centrale, cioè è funzione soltanto di R, oltre che di t Quindi, se si scrive l'operatore di Laplace in coordinate sferiche, l'equazione (62,6) assume la forma

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial\varphi}{\partial R}\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0.$$

Per risolvere questa equazione, facendo la sostituzione $\varphi = \chi\,(R,\,t)/R$, per χ otteniamo:

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial R^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} = 0.$$

Questa è però l'equazione delle onde piane la cui soluzione è (vedi § 47):

$$\chi = f_1\left(t - \frac{R}{c}\right) + f_2\left(t + \frac{R}{c}\right).$$

Poiché stiamo cercando soltanto un integrale particolare dell'equazione, è sufficiente allora prendere una sola delle funzioni f_1 ed f_2. È di solito piú comodo porre $f_2 = 0$ (vedi piú avanti). Allora il potenziale φ è ovunque, tranne che nell'origine delle coordinate,

$$\varphi = \frac{\chi\left(t - \frac{R}{c}\right)}{R}. \tag{62,7}$$

La funzione χ in questa uguaglianza è per il momento arbitraria; possiamo quindi sceglierla in maniera tale da ottenere il giusto

valore anche nell'origine delle coordinate. In altri termini, dobbiamo scegliere χ in modo tale che nell'origine delle coordinate sia soddisfatta l'equazione (62,5). Per fare questo osserviamo che per $R \to 0$ il potenziale stesso tende all'infinito, e che, di conseguenza, le sue derivate rispetto alle coordinate crescono piú velocemente delle derivate rispetto al tempo. Perciò, quando $R \to 0$, si può trascurare nell'equazione (62,5) il termine $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$ rispetto a $\Delta\varphi$. Allora (62,5) si riduce all'equazione già nota (36,9) che porta alla legge di Coulomb. In tal modo, vicino all'origine delle coordinate la formula (62,7) deve coincidere con la legge di Coulomb, donde segue che $\chi(t) = de(t)$, cioè

$$\varphi = \frac{de\left(t - \frac{R}{c}\right)}{R}$$

È ora facile passare alla soluzione dell'equazione (62,4) per una distribuzione arbitraria delle cariche $\rho(x, y, z, t)$. È sufficiente a questo scopo scrivere $de = \rho\, dV$ (dV è l'elemento di volume) ed integrare in tutto lo spazio. Alla soluzione dell'equazione non omogenea (62,4) cosí ottenuta si può aggiungere ancora un' altra soluzione φ_0 di questa equazione omogenea. In tal modo, la soluzione generale è

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{1}{R}\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c}\right) dV' + \varphi_0, \tag{62,8}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}', \quad dV' = dx'dy'dz',$$

dove $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{r}' = (x', y', z')$; R è la distanza tra l'elemento di volume dV e il « punto d'osservazione » nel quale vogliamo determinare il potenziale. In forma concisa questa espressione si può scrivere:

$$\varphi = \int \frac{\rho_{t-R/c}}{R}\, dV + \varphi_0, \tag{62,9}$$

dove l'indice $t - R/c$ significa che il valore di ρ deve essere preso all'istante $t - R/c$, e l'apice di dV è omesso.

In modo analogo per il potenziale vettore abbiamo:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c}\int \frac{\mathbf{j}_{t-R/c}}{R}\, dV + \mathbf{A}_0, \tag{62,10}$$

dove $\mathbf{A}_0$ è la soluzione dell'equazione omogenea associata.

Le espressioni (62,9) e (62,10) (senza φ_0 ed $\mathbf{A}_0$) si chiamano *potenziali ritardati.*

Nel caso di cariche immobili (cioè quando la densità ρ non dipende dal tempo) la formula (62,9) si riduce alla formula già nota (36,8) per il potenziale di un campo elettrostatico; per quanto riguarda la formula (62,10), nel caso di un moto stazionario

delle cariche essa (dopo aver preso la media) si riduce all'espressione (43,5) per il potenziale vettore di un campo magnetico costante.

Le grandezze φ_0 ed $\mathbf{A}_0$ nelle (62,9) e (62,10) vengono determinate in modo tale da soddisfare le condizioni del problema. È evidente che a questo scopo sarebbe sufficiente porre le condizioni iniziali, cioè il campo nell'istante iniziale. Tuttavia, nei problemi pratici non si hanno tali condizioni. Si hanno invece delle condizioni cui devono soddisfare le equazioni in reggioni molto distanti dal sistema di cariche a ogni istante. Piú precisamente, viene data una radiazione esterna incidente sul sistema. In queste condizioni, il campo generato dall'interazione di questo sistema con la radiazione si distingue dal campo esterno soltanto per la radiazione emessa dal sistema. La radiazione emessa dal sistema, a grandi distanze, deve avere l'aspetto di un'onda che si propaga dal sistema verso l'esterno, cioè nella direzione di R crescente. Questa condizione è appunto soddisfatta dai potenziali ritardati. In tal modo, quest'ultimi rappresentano il campo generato dal sistema, e φ_0 ed $\mathbf{A}_0$ debbono essere identificati con il campo esterno agente sul sistema.

§ 63. *Potenziali di Lienard-Wiechert*

Determiniamo i potenziali di un campo creato da una carica puntiforme in moto lungo la traiettoria $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(t)$.

In virtú delle equazioni dei potenziali ritardati, il campo nel punto d'osservazione $P(x, y, z)$ è determinato nell'istante t dallo stato di moto della carica nell'istante precedente t' per il quale il tempo di propagazione del segnale luminoso dal punto dove è localizzata la carica $\mathbf{r}_0(t')$ al punto d'osservazione P coincide precisamente con la differenza $t - t'$. Sia $\mathbf{R}(t) = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)$ il raggio vettore uscente dalla carica e verso il punto P; analogamente a $\mathbf{r}_0(t)$, esso è una funzione data del tempo. Allora l'istante t' è determinato dall'equazione

$$t' + \frac{R(t')}{c} = t. \tag{63,1}$$

Per ogni valore di t, questa equazione ha una sola radice t'[1]).

---

[1]) Questo fatto è abbastanza evidente di per se stesso, ma può essere verificato anche direttamente. A questo scopo, prendiamo per punto d'osservazione P nell'istante t l'origine O di un sistema quadridimensionale di coordinate e costruiamo cono di luce (vedi § 2) con il vertice nel punto O. La falda inferiore di questo cono, che abbraccia la regione del « passato assoluto » (rispetto all'evento O), rappresenta il luogo geometrico di punti d'universo tali che un segnale luminoso emesso da questi punti raggiunge il punto O. I punti d'intersezione di questa

Nel sistema di riferimento di quiete della particella nell'istante t', il campo nel punto d'osservazione nell'istante t è dato semplicemente dal potenziale coulombiano, cioè

$$\varphi = \frac{e}{R(t')}, \qquad \mathbf{A} = 0. \tag{63,2}$$

Le espressioni dei potenziali in un sistema di riferimento arbitrario si possono ora ottenere scrivendo un quadrivettore tale che per la velocità $\mathbf{v} = 0$ dia i valori della (63,2) per φ ed $\mathbf{A}$. Notando che, in virtú della (63,1), φ nella (63,2) si può anche scrivere nella forma

$$\varphi = \frac{e}{c(t-t')},$$

troviamo che il quadrivettore cercato è

$$A^i = e\frac{u^i}{R_k u^k}, \tag{63,3}$$

dove u^k è la 4-velocità della carica, e il quadrivettore $R^k = [c(t - t'), \mathbf{r} - \mathbf{r}']$, dove x', y', z', t' sono legate tra di loro dalla relazione (63,1); quest'ultima può essere scritta in forma invariante come

$$R_k R^k = 0. \tag{63,4}$$

Passando ora alle notazioni tridimensionali, otteniamo le seguenti espressioni per i potenziali del campo creato da una carica puntiforme animata da un moto arbitrario:

$$\varphi = \frac{e}{\left(R - \frac{\mathbf{vR}}{c}\right)}, \qquad \mathbf{A} = \frac{e\mathbf{v}}{c\left(R - \frac{\mathbf{vR}}{c}\right)}, \tag{63,5}$$

dove $\mathbf{R}$ è il raggio vettore uscente dal punto dove si trova la carica al punto d'osservazione P, e tutte le grandezze nei secondi membri delle uguaglianze debbono essere prese nell'istante t' definito dalla (63,1). I potenziali del campo nella forma (63,5) sono detti *potenziali di Lienard-Wiechert.*

Per calcolare le intensità dei campi elettrico e magnetico secondo le relazioni

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi, \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A},$$

bisogna derivare φ ed $\mathbf{A}$ rispetto alle coordinate x, y, z del punto ed al tempo d'osservazione t. Le formule (63,5) esprimono però i poten-

ipersuperficie con la linea d'universo descritta dalla carica corrispondono esattamente alle radici dell'equazione (63,1). Poiché la velocità di una particella è sempre inferiore alla velocità della luce, la sua linea d'universo è in ogni punto meno inclinata sull'asse del tempo che non la superficie del cono di luce. Ne risulta quindi che la linea di universo della particella può intersecare la falda inferiore del cono di luce in un solo punto.

ziali come funzioni di t', e soltanto la relazione (63,1) permette di esprimerli come funzioni implicite di x, y, z, t. Bisogna dunque, per calcolare le derivate cercate, calcolare preliminarmente le derivate rispetto a t'. Derivando la relazione $R(t') = c(t - t')$ rispetto a t, otteniamo:

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t} = -\frac{\mathbf{Rv}}{R}\frac{\partial t'}{\partial t} = c\left(1 - \frac{\partial t'}{\partial t}\right)$$

(l'espressione $\partial R/\partial t'$ si ottiene derivando l'identità $R^2 = \mathbf{R}^2$ e sostituendo $\partial \mathbf{R}(t')/\partial t = -\mathbf{v}(t')$; il segno meno è dovuto al fatto che $\mathbf{R}$ è il raggio vettore della carica e verso il punto P, e non viceversa). Di qui

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{1 - \frac{\mathbf{vR}}{Rc}}. \tag{63,6}$$

Analogamente derivando la stessa relazione rispetto alle coordinate si ottiene:

$$\operatorname{grad} t' = -\frac{1}{c}\operatorname{grad} R(t') = -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial R}{\partial t'}\operatorname{grad} t' + \frac{\mathbf{R}}{R}\right),$$

donde

$$\operatorname{grad} t' = -\frac{\mathbf{R}}{c\left(R - \frac{\mathbf{Rv}}{c}\right)}. \tag{63,7}$$

Queste formule permettono senza difficoltà di calcolare i campi $\mathbf{E}$ ed $\mathbf{H}$. Omettiamo i calcoli intermedi e diamo il risultato finale:

$$\mathbf{E} = e\frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(R - \frac{\mathbf{Rv}}{c}\right)^3}\left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{v}}{c}R\right) + \frac{e}{c^2\left(R - \frac{\mathbf{Rv}}{c}\right)^3}\left[\mathbf{R}\left[\left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{v}}{c}R\right)\dot{\mathbf{v}}\right]\right], \tag{63,8}$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{R}[\mathbf{RE}]. \tag{63,9}$$

Si ha qui $\dot{\mathbf{v}} = \partial \mathbf{v}/\partial t'$; tutte le grandezze dei secondi membri delle uguaglianze sono prese nell'istante t'. È interessante notare che il campo magnetico è ovunque perpendicolare al campo elettrico.

Il campo elettrico (63,8) è composto di due termini di carattere differente. Il primo termine dipende solamente dalle velocità della particella (e non dalla sua accelerazione) e varia a grandi distanze come $1/R^2$. Il secondo termine dipende dall'accelerazione e varia come $1/R$ per le R grandi. Vedremo in seguito (§ 66) che quest'ultimo termine è legato alle onde elettromagnetiche irradiate dalla particella.

Il primo termine, non dipendente dall'accelerazione, deve corrispondere al campo creato da una carica in moto uniforme. Infatti, essendo costante la velocità, la differenza

$$\mathbf{R}_{t'} - \frac{\mathbf{v}}{c} R_{t'} = \mathbf{R}_{t'} - \mathbf{v}(t - t')$$

è la distanza $\mathbf{R}_t$ tra la carica e il punto d'osservazione nell'istante stesso d'osservazione. È facile verificare direttamente che

$$R_{t'} - \frac{1}{c}\mathbf{R}_{t'}\mathbf{v} = \sqrt{R_t^2 - \frac{1}{c^2}[\mathbf{v}\mathbf{R}_t]^2} = R_t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}\operatorname{sen}^2\theta_t},$$

dove θ_t è l'angolo tra $\mathbf{R}_t$ e $\mathbf{v}$. In conclusione, risulta che il primo termine nella (63,8) coincide con l'espressione (38,8).

PROBLEMA

Dedurre i potenziali di Lienard-Wiechert per integrazione delle formule (62,9) e (62.10).

Soluzione. Scriviamo la formula (62,8) come segue:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int\int \frac{\rho(\mathbf{r}', \tau)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\,\delta\left(\tau - t + \frac{1}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|\right) d\tau\, dV'$$

(e in modo analogo per $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$), introducendo in essa ancora un'altra funzione δ che serve per ottenere la funzione ρ calcolata al tempo «ritardato». Per una carica puntiforme che si muove sulla traiettoria data $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(t)$, abbiamo:

$$\rho(\mathbf{r}', \tau) = e\delta]\,\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0(\tau)].$$

Sostituendo quest'espressione ed integrando in dV', otteniamo:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = e\int \frac{d\tau}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(\tau)|}\,\delta\left[\tau - t + \frac{1}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(\tau)|\right].$$

Integrando in $d\tau$ e tenendo presente la proprieta:

$$\delta[F(\tau)] = \frac{\delta(\tau - t')}{F'(t')}$$

(dove t' è la radice dell'equazione $F(t') = 0$), si ottiene la formula (63,5).

§ 64. *Decomposizione spettrale dei potenziali ritardati*

Il campo creato da cariche in moto può essere decomposto in onde monocromatiche. I potenziali di una singola componente monocromatica del campo hanno la forma $\varphi_\omega e^{-i\omega t}$, $\mathbf{A}_\omega e^{-i\omega t}$. Le densità di carica e di corrente del sistema che crea il campo si possono pure sottoporre ad una decomposizione spettrale. È ovvio che una componente monocromatica determinata del campo è creata dalle componenti corrispondenti di ρ e di $\mathbf{j}$.

Per esprimere le componenti spettrali del campo mediante le componenti delle densità di carica e di corrente, sostituiamo nella

(62,9) φ e ρ rispettivamente con $\varphi_\omega e^{-i\omega t}$ e $\rho_\omega e^{-i\omega t}$. Troviamo allora:

$$\varphi_\omega e^{-i\omega t} = \int \rho_\omega \frac{e^{-i\omega(t-R/c)}}{R} dV.$$

Dividendo i due membri per $e^{-i\omega t}$ ed introducendo il valore assoluto del vettore d'onda $k = \omega/c$, otteniamo:

$$\varphi_\omega = \int \rho_\omega \frac{e^{ikR}}{R} dV. \tag{64,1}$$

Analogamente per $\mathbf{A}_\omega$ abbiamo:

$$\mathbf{A}_\omega = \int \mathbf{j}_\omega \frac{e^{ikR}}{cR} dV. \tag{64,2}$$

Notiamo che la formula (64,1) rappresenta la soluzione dell'equazione di Poisson generalizzata ad un'equazione piú generale del tipo:

$$\Delta\varphi_\omega + k^2\varphi_\omega = -4\pi\rho_\omega \tag{64,3}$$

(dedotta dall'equazione (62,4) per ρ, φ dipendenti dal tempo per mezzo del fattore $e^{-i\omega t}$).

Nello sviluppo in integrale di Fourier, la componente di Fourier della densità di carica è

$$\rho_\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho e^{i\omega t} dt.$$

Sostituendo questa espressione nella (64,1), si ottiene:

$$\varphi_\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \int \frac{\rho}{R} e^{i(\omega t + kR)} dV\, dt. \tag{64,4}$$

In questa espressione, bisogna ancora passare dalla distribuzione continua della densità di carica a cariche puntiformi, poiché è il loro moto che di fatto ci interessa. Se esiste una sola carica puntiforme, poniamo:

$$\rho = e\delta\,[\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)],$$

dove $\mathbf{r}_0(t)$, raggio vettore della carica, è una funzione data del tempo. Sostituendo questa espressione nella (64,4) ed integrando in dV (l'integrazione si riduce alla sostituzione di $\mathbf{r}$ con $\mathbf{r}_0(t)$), otteniamo:

$$\varphi_\omega = e \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{R(t)} e^{i\omega[t+R(t)/c]} dt, \tag{64,5}$$

dove ora $R(t)$ è la distanza della carica in moto dal punto di osservazione. In modo analogo per il potenziale vettore si ottiene:

$$\dot{\mathbf{A}}_\omega = \frac{e}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{v}(t)}{R(t)} e^{i\omega[t+R(t)/c]}\, dt, \tag{64,6}$$

dove $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}_0(t)$ è la velocità della particella.

Formule analoghe alla (64,5) e (64,6) si possono scrivere anche nel caso in cui la scomposizione spettrale delle densità di carica e di corrente contiene una serie discreta di frequenze. Cosí, per il moto periodico (di periodo $T = 2\pi/\omega_0$) di una carica puntiforme la scomposizione spettrale del campo contiene soltanto le frequenze tipo $n\omega_0$, e le componenti corrispondenti del potenziale vettore sono

$$\mathbf{A}_n = \frac{e}{cT} \int_0^T \frac{\mathbf{v}(t)}{R(t)} e^{in\omega_0[t+R(t)/c]}\, dt \tag{64,7}$$

(e in modo analogo per φ_n). In ambedue i casi (64,6) e (64,7), le componenti di Fourier si determinano secondo quanto esposto al § 49.

PROBLEMA

Decomporre il campo di una carica in moto rettilineo e uniforme in onde piane.

Soluzione. Procediamo come nel § 51. Scriviamo la densità di carica nella forma $\rho = e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)$, dove $\mathbf{v}$ è la velocità della particella. Prendendo la componente di Fourier dell'equazione $\Box\varphi = -4\pi e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)$, troviamo:

$$(\Box\varphi)\,\mathbf{k} = -4\pi e \cdot e^{-i(\mathbf{vk})t}.$$

D'altra parte, dalla

$$\varphi = \int e^{i\mathbf{kr}} \varphi_{\mathbf{k}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}$$

ricaviamo:

$$(\Box\varphi)_{\mathbf{k}} = -k^2\varphi_{\mathbf{k}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi_{\mathbf{k}}}{\partial t^2}.$$

Quindi:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi_{\mathbf{k}}}{\partial t^2} + k^2\varphi_{\mathbf{k}} = 4\pi e \cdot e^{-i(\mathbf{kv})t},$$

da cui si ha in definitiva:

$$\varphi_{\mathbf{k}} = 4\pi e \frac{e^{-i(\mathbf{kv})t}}{k^2 - \left(\frac{\mathbf{kv}}{c}\right)^2}.$$

Ne segue che un'onda di vettore d'onda $\mathbf{k}$ possiede la frequenza $\omega = \mathbf{kv}$.

Analogamente per il potenziale vettore troviamo:

$$\mathbf{A}_{\mathbf{k}} = \frac{4\pi e}{c} \frac{\mathbf{v}e^{-i(\mathbf{kv})t}}{k^2 - \left(\frac{\mathbf{kv}}{c}\right)^2}.$$

Abbiamo, infine, per il campo:

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}} = -i\mathbf{k}\varphi_{\mathbf{k}} + \frac{i(\mathbf{kv})}{c}\mathbf{A}_{\mathbf{k}} = i4\pi e \frac{-\mathbf{k} + \frac{(\mathbf{kv})\,\mathbf{v}}{c^2}}{k^2 - \left(\frac{\mathbf{kv}}{c}\right)^2} e^{-i(\mathbf{kv})t},$$

$$\mathbf{H}_{\mathbf{k}} = i\,[\mathbf{k}\mathbf{A}_{\mathbf{k}}] = i\,\frac{4\pi e}{c}\,\frac{[\mathbf{kv}]}{k^2 - \left(\frac{\mathbf{kv}}{c}\right)^2}\,e^{-i(\mathbf{kv})t}.$$

§ 65. *La lagrangiana limitata ai termini del secondo ordine*

In meccanica classica ordinaria, un sistema di particelle interagenti può essere descritto mediante la lagrangiana che dipende solo dalle coordinate e dalle velocità di queste particelle (allo stesso istante). Una tale possibilità è dovuta, in ultima analisi, al fatto che in meccanica la velocità di propagazione delle interazioni è supposta infinita.

Sappiamo già che, in virtú del fatto che le interazioni si propagano con volocità finita, il campo deve essere considerato come un sistema autonomo dotato cioè di propri « gradi di libertà ». Ne segue che se si ha un sistema di particelle (cariche) interagenti, per la sua descrizione è necessario considerare questo sistema costituito dalle particelle e dal campo. Di consequenza, quando si tiene conto della velocità finita di propagazione delle interazioni, è impossibile dare una descrizione rigorosa di un sistema di particelle interagenti mediante una lagrangiana dipendente soltanto dalle coordinate e dalle velocità delle particelle e non contenente nessuna grandezza che sia legata ai « gradi di libertà » propri del campo.

Tuttavia, quando le velocità v di tutte le cariche sono piccole rispetto alla velocità della luce, il sistema di cariche può essere descritto mediante una lagrangiana approssimata. Risulta, inoltre, possibile introdurre la lagrangiana che descrive il sistema non soltanto a meno di potenze di v/c, bensí a meno delle grandezze dell'ordine di v^2/c^2. Quest'ultima circostanza è dovuta al fatto che la radiazione elettromagnetica emessa da cariche in moto (e, pertanto, la comparsa di un campo « autonomo ») si produce soltanto in terza approssimazione in v/c (vedi § 67)[1].

Notiamo preliminarmente che in approssimazione zero, cioè quando si trascura completamente il ritardo dei potenziali, la

---

[1]) In casi particolari, la comparsa della radiazione può essere ridotta alla quinta approssimazione in v/c; in questo caso, esiste una lagrangiana con l'approssimazione sino ai termini dell'ordine di $(v/c)^4$ (vedi problema 2 del § 75.)

lagrangiana per un sistema di cariche ha la forma

$$L^{(0)} = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} - \sum_{a>b} \frac{e_a e_b}{R_{ab}} \tag{65,1}$$

(la sommatoria è estesa alle cariche costituenti il sistema). Il secondo termine è l'energia potenziale d'interazione quale sarebbe per cariche immobili.

Per ottenere l'approssimazione successiva procediamo come segue. La lagrangiana per una carica e_a che si trova in un campo esterno è

$$L_a = -m_a c^2 \sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}} - e_a \varphi + \frac{e_a}{c} \mathbf{A} \mathbf{v}_a. \tag{65,2}$$

Scegliendo una carica qualsiasi del sistema, determiniamo i potenziali del campo creato da tutte le altre cariche nel punto dove si trova la prima ed esprimiamoli mediante le coordinate e le velocità delle cariche costituenti questo campo (ciò si può fare appunto in modo approssimato: φ a meno dei termini dell'ordine di v^2/c^2, $\mathbf{A}$ a meno dei termini dell'ordine di v/c). Sostituendo le espressioni cosí ottenute per i potenziali nella (65,2), otteniamo la funzione di Lagrange per una delle cariche del sistema (se è dato il moto delle altre cariche). Si può quindi ricavare facilmente L per l'intero sistema.

Partiremo dalle espressioni dei potenziali ritardati:

$$\varphi = \int \frac{\rho_{t-R/c}}{R} dV, \qquad \mathbf{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}_{t-R/c}}{R} dV.$$

Se le velocità di tutte le cariche sono piccole rispetto alla velocità della luce, la distribuzione delle cariche non varia sensibilmente nell'intervallo di tempo R/c. Di conseguenza, $\rho_{t-R/c}$ e $\mathbf{j}_{t-R/c}$ si possono sviluppare in serie di potenze di R/c. Per il potenziale scalare, troviamo quindi a meno dei termini del secondo ordine:

$$\varphi = \int \frac{\rho\, dV}{R} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \rho\, dV + \frac{1}{2c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int R\rho\, dV$$

(ρ senza indici è considerato nell'istante t; i segni di derivazione rispetto al tempo si possono, evidentemente, portare fuori dal segno d'integrazione). La grandezza $\int \rho\, dV$ è la carica totale costante del sistema. Di conseguenza, il secondo termine nell'espressione ottenuta è nullo, cosicché

$$\varphi = \int \frac{\rho\, dV}{R} + \frac{1}{2c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int R\rho\, dV. \tag{65,3}$$

Si può procedere in modo analogo per $\mathbf{A}$. L'espressione del potenziale vettore in funzione della densità di corrente contiene già $1/c$ e,

sostituita nella lagrangiana, viene moltiplicata ancora una volta per $1/c$. Poiché ci interessa la lagrangiana limitata ai termini del secondo ordine, nello sviluppo di $\mathbf{A}$ è sufficiente prendere soltanto il primo termine, cioè

$$\mathbf{A}=\frac{1}{c}\int\frac{\rho\mathbf{v}}{R}\,dV \tag{65,4}$$

(abbiamo sostituito $\mathbf{j}=\rho\mathbf{v}$).

Supponiamo anzitutto che il campo sia creato da una sola carica puntiforme e. Allora la (65,3) e la (65,4) ci danno:

$$\varphi=\frac{e}{R}+\frac{e}{2c^2}\frac{\partial^2 R}{\partial t^2},\quad \mathbf{A}=\frac{e\mathbf{v}}{cR}, \tag{65,5}$$

dove R è la distanza dalla carica.

Prendiamo in luogo di φ ed $\mathbf{A}$ altri potenziali φ' ed $\mathbf{A}'$, cioè facciamo la trasformazione di gauge (vedi § 18):

$$\varphi'=\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t},\quad \mathbf{A}'=\mathbf{A}+\operatorname{grad} f,$$

dove per f si sceglie la funzione

$$f=\frac{e}{2c}\frac{\partial R}{\partial t}.$$

Otteniamo allora[1]):

$$\varphi'=\frac{e}{R},\qquad \mathbf{A}'=\frac{e\mathbf{v}}{cR}+\frac{e}{2c}\nabla\frac{\partial R}{\partial t}.$$

Per calcolare $\mathbf{A}'$ notiamo che $\nabla\frac{\partial R}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\nabla R$. L'operazione ∇ significa qui la derivazione rispetto alle coordinate del punto d'osservazione dove si cerca il valore di $\mathbf{A}'$. Di conseguenza, il gradiente ∇R è uguale al vettore unitario $\mathbf{n}$ che va dalla carica e al punto d'osservazione, in modo che

$$\mathbf{A}'=\frac{e\mathbf{v}}{cR}+\frac{e}{2c}\dot{\mathbf{n}}.$$

Abbiamo inoltre:

$$\dot{\mathbf{n}}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathbf{R}}{R}\right)=\frac{\dot{\mathbf{R}}}{R}-\frac{\mathbf{R}\dot{R}}{R^2}.$$

La derivata $-\dot{\mathbf{R}}$ per il punto d'osservazione dato è però la velocità $\mathbf{v}$ della particella, e la derivata $\dot{R}$ si determina facilmente derivando l'identità $R^2=\mathbf{R}^2$, cioè scrivendo

$$R\dot{R}=\mathbf{R}\dot{\mathbf{R}}=-\mathbf{R}\mathbf{v}.$$

---

[1]) Questi potenziali non soddisfano piú la condizione di Lorentz (62,1) e, di conseguenza, nemmeno le equazioni (62,3) e (62,4).

quindi

$$\dot{\mathbf{n}} = \frac{-\mathbf{v} + \mathbf{n}(\mathbf{nv})}{R}.$$

Sostituendo nell'espressione per $\mathbf{A}'$, troviamo in definitiva:

$$\varphi' = \frac{e}{R}, \qquad \mathbf{A}' = \frac{e[\mathbf{v} + (\mathbf{vn})\mathbf{n}]}{2cR}. \tag{65,6}$$

Se il campo è creato non da una sola ma da piú cariche, è necessario, evidentemente, fare la somma di queste espressioni estesa a tutte le cariche.

Sostituendole poi nella (65,2), troviamo la lagrangiana L_a della carica e_a (se è dato il moto di tutte le altre cariche). È necessario inoltre sviluppare anche il primo termine nella (65,2) in serie di potenze di v_a/c, prendendo i termini sino al secondo ordine. Troviamo, dunque:

$$L_a = \frac{m_a v_a^2}{2} + \frac{1}{8}\frac{m_a v_a^4}{c^2} - e_a \sum_b{}' \frac{e_b}{R_{ab}} + \\ + \frac{e_a}{2c^2} \sum_b{}' \frac{e_b}{R_{ab}} [\mathbf{v}_a \mathbf{v}_b + (\mathbf{v}_a \mathbf{n}_{ab})(\mathbf{v}_b \mathbf{n}_{ab})]$$

(la sommatoria è estesa a tutte le cariche, tranne e_a; $\mathbf{n}_{ab}$ è il versore diretto da e_b ad e_a).

A questo punto non è piú difficile trovare la lagrangiana per tutto il sistema. È facile capire che questa funzione non sarà uguale alla somma di L_a su tutte le cariche, ma avrà la forma

$$L = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} + \sum_a \frac{m_a v_a^4}{8c^2} - \sum_{a>b} \frac{e_a e_b}{R_{ab}} + \\ + \sum_{a>b} \frac{e_a e_b}{2c^2 R_{ab}} [\mathbf{v}_a \mathbf{v}_b + (\mathbf{v}_a \mathbf{n}_{ab})(\mathbf{v}_b \mathbf{n}_{ab})]. \tag{65,7}$$

Infatti, per ciascuna delle cariche, se il moto delle altre cariche è dato, la funzione L diventa la funzione L_a trovata prima. L'espressione (65,7) è la lagrangiana cercata di un sistema di cariche limitata ai termini del secondo ordine (*C. G. Darwin*, 1922).

Determiniamo, infine, l'hamiltoniana per un sistema di cariche con la stessa approssimazione. Si potrebbe procedere applicando le regole generali che permettono di trovare $\mathscr{H}$ a partire da L; risulta però piú semplice procedere come segue. Il secondo e il quarto termine nella (65,7) rappresentano una correzione piccola ad $L^{(0)}$ (65,1). D'altra parte, dalla meccanica si sa che quando L ed $\mathscr{H}$ variano poco, i loro incrementi piccoli sono identici in valore assoluto e di segno opposto (la variazione di L viene considerata per coordinate e velocità date, e la variazione di $\mathscr{H}$ per coordinate ed impulsi dati; vedi vol. I, *Meccanica*, § 40).

Possiamo quindi scrivere immediatamente $\mathscr{H}$ sottraendo da

$$\mathscr{H}^{(0)} = \sum_a \frac{p_a^2}{2m_a} + \sum_{a>b} \frac{e_a e_b}{R_{ab}}$$

il secondo e il quarto termine della (65,7), sostituendo preliminarmente in essi le velocità con gli impulsi mediante le relazioni di prima approssimazione $\mathbf{v}_a = \mathbf{p}_a/m_a$. In tal modo,

$$\mathscr{H} = \sum_a \frac{p_a^2}{2m_a} + \sum_{a>b} \frac{e_a e_b}{R_{ab}} - \sum_a \frac{p_a^4}{8c^2 m_a^3} -$$

$$- \sum_{a>b} \frac{e_a e_b}{2c^2 m_a m_b R_{ab}} [\mathbf{p}_a \mathbf{p}_b + (\mathbf{p}_a \mathbf{n}_{ab})(\mathbf{p}_b \mathbf{n}_{ab})]. \qquad (65,8)$$

PROBLEMI

1. Determinare (a meno dei termini del secondo ordine) il centro di massa di un sistema di particelle interagenti.

Soluzione. Il problema si risolve nel modo piú semplice applicando la formula

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_a \mathscr{E}_a \mathbf{r}_a + \int W \mathbf{r}\, dV}{\sum_a \mathscr{E}_a + \int W\, dV}$$

(cfr. (14,6)), dove $\mathscr{E}_a$ è l'energia cinetica della particella (compresa la sua energia di riposo), W la densità d'energia del campo creato dalle particelle. Siccome $\mathscr{E}_a$ contiene le quantità molto grandi $m_a c^2$, per ottenere l'approssimazione richiesta sarà sufficiente tenere in $\mathscr{E}_a$ e W soltanto i termini non contenenti c, cioè l'energia cinetica non relativistica delle particelle e l'energia del campo elettrostatico. Abbiamo:

$$\int W \mathbf{r}\, dV = \frac{1}{8\pi} \int E^2 \mathbf{r}\, dV = \frac{1}{8\pi} \int (\nabla\varphi)^2 \mathbf{r}\, dV =$$

$$= \frac{1}{8\pi} \int \left(d\mathbf{f} \nabla \frac{\varphi^2}{2} \right) \mathbf{r} - \frac{1}{8\pi} \int \nabla \frac{\varphi^2}{2}\, dV - \frac{1}{8\pi} \int \varphi \Delta\varphi \cdot \mathbf{r}\, dV;$$

l'integrale esteso alla superficie all'infinito è nullo; il secondo integrale si trasforma pure in integrale di superficie e si annulla, e il terzo, facendo la sostituzione $\Delta\varphi = -4\pi\rho$, ci dà:

$$\int W \mathbf{r}\, dV = \frac{1}{2} \int \rho\varphi \mathbf{r}\, dV = \frac{1}{2} \sum_a e_a \varphi_a \mathbf{r}_a,$$

dove φ_a è il potenziale creato nel punto $\mathbf{r}_a$ da tutte le cariche, tranne e_a[1]

Troviamo in definitiva:

$$\mathbf{R} = \frac{1}{\mathscr{E}} \sum_a \mathbf{r}_a \left(m_a c^2 + \frac{p_a^2}{2m_a} + \frac{e_a}{2} \sum_b{}' \frac{e_b}{R_{ab}} \right)$$

[1]) L'esclusione del campo proprio delle particelle corrisponde alla « rinormalizzazione » della massa citata nella nota alla pag. 125.

(la sommatoria significa somma su tutte le b, tranne $b = a$), dove

$$\mathscr{E} = \sum_a \left(m_a c^2 + \frac{p_a^2}{2m_a} + \sum_{a>b} \frac{e_a e_b}{R_{ab}} \right)$$

è l'energia totale del sistema. Cosí, nell'approssimazione considerata, le coordinate del centro di massa possono essere espresse effettivamente in funzione delle grandezze relative esclusivamente alle particelle stesse.

2. Scrivere l'hamiltoniana in seconda approssimazione per un sistema di due particelle, escludendo da essa il moto del sistema considerato in blocco.

Soluzione. Prendiamo un sistema di riferimento nel quale la somma degli impulsi delle due particelle è nulla. Scrivendo gli impulsi come derivate dell'azione, abbiamo:

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{r}_1} + \frac{\partial S}{\partial \mathbf{r}_2} = 0.$$

Ne segue che, nel sistema di riferimento considerato, l'azione è una funzione della differenza $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ dei raggi vettori delle due particelle. Abbiamo dunque $\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}$, dove $\mathbf{p} = \partial S/\partial \mathbf{r}$ è l'impulso del moto relativo delle particelle.

L'hamiltoniana è:

$$\mathscr{H} = \frac{p^2}{2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) + \frac{e_1 e_2}{r} - \frac{p^4}{8c^2}\left(\frac{1}{m_1^3} + \frac{1}{m_2^3}\right) + \frac{e_1 e_2}{2m_1 m_2 c^2 r}\left[p^2 + (\mathbf{pn})^2\right].$$

Capitolo IX

RADIAZIONE ELETTROMAGNETICA

§ 66. *Campo di un sistema di cariche a grandi distanze*

Consideriamo il campo che un sistema di cariche in moto crea a distanze maggiori delle dimensioni proprie.

Scegliamo l'origine delle coordinate O in un punto all'interno del sistema di cariche. Indichiamo con $\mathbf{R}_0$ il raggio vettore che va da O al punto d'osservazione P del campo e con $\mathbf{n}$ il vettore unitario in questa direzione. Siano ancora $\mathbf{r}$ il raggio vettore dell'elemento di carica $de = \rho\, dV$ ed $\mathbf{R}$ il raggio vettore da de al punto P; è evidente che $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 - \mathbf{r}$.

A grandi distanze dal sistema $R_0 \gg r$, si ha approssimativamente:

$$R = |\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}| = R_0 - \mathbf{nr}.$$

Sostituiamo questa espressione di R nelle formule (62,9) e (62,10) per i potenziali ritardati. Al denominatore delle espressioni integrande si può trascurare $\mathbf{rn}$ rispetto a R_0, mentre nella espressione $t - R/c$ non si può in generale trascurare questo termine; una tale possibilità è legata qui non alle grandezze relative di R_0/c e $\mathbf{rn}/c$, bensí alla variazione di ρ e $\mathbf{j}$ nel tempo $\mathbf{rn}/c$. Tenendo presente che nell'integrazione R_0 è una costante e può essere portata fuori dal segno d'integrazione, troviamo le seguenti espressioni per i potenziali del campo a grandi distanze dal sistema di cariche:

$$\varphi = \frac{1}{R_0} \int \rho_{t - \frac{R_0}{c} + \frac{\mathbf{rn}}{c}}\, dV, \tag{66,1}$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0} \int \mathbf{j}_{t - \frac{R_0}{c} + \frac{\mathbf{rn}}{c}}\, dV. \tag{66,2}$$

A distanze sufficientemente grandi dal sistema, il campo può essere considerato, in regioni piccole dello spazio, come un'onda piana. È necessario però che le distanze siano grandi non soltanto rispetto alle dimensioni del sistema, ma anche rispetto alle lunghezze d'onda delle radiazioni elettromagnetiche dal sistema. Una tale regione del campo è detta *zona delle onde* di radiazione.

In un'onda piana i campi $\mathbf{E}$ ed $\mathbf{H}$ sono legati tra di loro dalla relazione (47,4), $\mathbf{E} = [\mathbf{Hn}]$. Siccome $\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$, per determinare

completamente il campo nella zona delle onde, è sufficiente calcolare il potenziale vettore. In un'onda piana abbiamo $\mathbf{H} = [\dot{\mathbf{A}}\mathbf{n}]/c$ [cfr. (47,3)], dove il puntino sulla lettera indica derivazione rispetto al tempo[1]). Quindi, conoscendo $\mathbf{A}$, troviamo $\mathbf{H}$ ed $\mathbf{E}$ secondo le formule[2]):

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c}[\dot{\mathbf{A}}\mathbf{n}], \quad \mathbf{E} = \frac{1}{c}[[\dot{\mathbf{A}}\mathbf{n}]\,\mathbf{n}]. \tag{66,3}$$

Notiamo che a grandi distanze il campo è inversamente proporzionale alla distanza R_0 dal sistema irraggiante. Bisogna notare anche che il tempo t entra ovunque nelle formule (66,1), (66,2) e (66,3) in combinazione con la distanza R_0 nell'espressione $t - R_0/c$.

Nel caso della radiazione emessa da una carica puntiforme in moto arbitrario, è comodo ricorrere ai potenziali di Lienard-Wiechert. A distanze grandi, nella formula (63,5) si può sostituire il raggio vettore variabile $\mathbf{R}$ con la grandezza costante $\mathbf{R}_0$, e nella condizione (63,1), che determina t', bisogna porre $R = R_0 - \mathbf{r}_0\mathbf{n}$ ($\mathbf{r}_0(t)$ è il raggio vettore della carica). In tal modo[3]),

$$\mathbf{A} = \frac{e\mathbf{v}(t')}{cR_0\left(1 - \frac{\mathbf{n}\mathbf{v}(t')}{c}\right)}, \tag{66,4}$$

dove t' è determinato dall'uguaglianza

$$t' - \frac{1}{c}\mathbf{r}_0(t')\mathbf{n} = t - \frac{R_0}{c}. \tag{66,5}$$

Le onde elettromagnetiche emesse dal sistema trasportano una determinata energia. Il flusso d'energia è dato dal vettore di Poynting che in un'onda piana vale:

$$\mathbf{S} = c\frac{H^2}{4\pi}\mathbf{n}.$$

L'intensità dI di radiazione nell'elemento d'angolo solido do viene determinata come quantità di energia che attraversa nell'unità di tempo l'elemento $df = R_0^2\,do$ di una superficie sferica con centro nell'origine delle coordinate e con raggio R_0. Questa quantità è uguale alla densità del flusso di energia S moltiplicata per df, cioè a

$$dI = c\frac{H^2}{4\pi}R_0^2\,do. \tag{66,6}$$

---

[1]) Nel dato caso, si può facilmente verificare questa formula anche con il calcolo diretto del rotore dell'espressione (66,2), dove i termini con $1/R^2$ vanno trascurati rispetto al termine $\sim 1/R_0$.

[2]) La formula $\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{A}}/c$ [vedi (47,3)] non è qui applicabile, perché i potenziali φ, $\mathbf{A}$ non soddisfano alle condizioni supplementari imposte nel § 47.

[3]) Nella espressione (63,8) per un campo elettrico l'approssimazione considerata corrisponde a trascurare il primo termine rispetto al secondo.

Siccome il campo H è inversamente proporzionale ad R_0, ne segue che la quantità di energia irradiata dal sistema nell'unità di tempo nell'elemento d'angolo solido do è uguale per tutte le distanze (essendo uguali per queste distanze le differenze $t - R_0/c$). È ovvio che deve essere proprio cosí, poiché l'energia irradiata dal sistema si propaga nello spazio circostante con la velocità c, senza accumularsi e senza rarefarsi.

Troviamo le espressioni della decomposizione spettrale delle onde elettromagnetiche emesse dal sistema. Esse possono essere ricavate direttamente dalle formule del § 64. Sostituendo nella (64,2) $R = R_0 - \mathbf{rn}$ (al denominatore dell'espressione integranda si può fare solo la sostituzione $R = R_0$), per la componente di Fourier del potenziale vettore troviamo:

$$\mathbf{A}_\omega = \frac{e^{ikR_0}}{cR_0} \int \mathbf{j}_\omega e^{-i\mathbf{kr}}\, dV \tag{66,7}$$

(dove $\mathbf{k} = k\mathbf{n}$). Le componenti $\mathbf{H}_\omega$ ed $\mathbf{E}_\omega$ sono determinate dalle formule (66,3). Sostituendo in queste formule $\mathbf{H}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{A}$ rispettivamente con $\mathbf{H}_\omega e^{-i\omega t}$, $\mathbf{E}_\omega e^{-i\omega t}$, $\mathbf{A}_\omega e^{-i\omega t}$ e dividendo poi per $e^{-i\omega t}$, troviamo:

$$\mathbf{H}_\omega = i\,[\mathbf{k}\mathbf{A}_\omega], \quad \mathbf{E}_\omega = \frac{ic}{\omega}\,[\mathbf{k}\,[\mathbf{A}_\omega\mathbf{k}]]. \tag{66,8}$$

Parlando della distribuzione spettrale dell'intensità di radiazione, è necessario distinguere gli sviluppi in integrale e in serie di Fourier. Si ha lo sviluppo in integrale di Fourier quando la radiazione è dovuta ad urti di particelle cariche. In questo caso, è interessante determinare la quantità totale di energia irradiata durante l'urto (e rispettivamente quella perduta dalle particelle collidenti). Sia $d\mathscr{E}_{\mathbf{n}\omega}$ l'energia irradiata nell'elemento d'angolo solido do sotto forma di onde con frequenze comprese nell'intervallo $d\omega$. Secondo la formula generale (49,8), la frazione di radiazione totale relativa all'intervallo di frequenze $d\omega/2\pi$ si ricava dall'espressione ordinaria dell'intensità sostituendo il quadrato del campo con il quadrato del modulo della sua componente di Fourier e moltiplicando quindi per 2. In luogo della (66,6) si ha quindi:

$$d\mathscr{E}_{\mathbf{n}\omega} = \frac{c}{2\pi}\,|\mathbf{H}_\omega|^2 R_0^2\, do\, \frac{d\omega}{2\pi}. \tag{66,9}$$

Se le cariche compiono un moto periodico, il campo della radiazione deve essere sviluppato in serie di Fourier. In virtú della formula generale (49,4), l'intensità di una singola componente dello sviluppo in serie di Fourier si deduce dall'espressione ordinaria dell'intensità sostituendo il campo con la sua componente di Fourier e moltiplicando quindi per 2. In tal modo, l'intensità di radiazione

nell'elemento d'angolo solido do di frequenza $\omega = n\omega_0$ è uguale a

$$dI_n = \frac{c}{2\pi} |\mathbf{H}_n|^2 R_0^2 \, do. \tag{66,10}$$

Infine, scriviamo le formule che definiscono le componenti di Fourier del campo di radiazione partendo direttamente dal moto delle cariche irraggianti. Lo sviluppo in serie di Fourier ci dà:

$$\mathbf{j}_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{j} e^{i\omega t} \, dt.$$

Sostituendo questa espressione nella (66,7) e passando poi dalla distribuzione continua delle correnti ad una carica puntiforme che si muove sulla traiettoria $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(t)$ (vedi § 64), otteniamo:

$$\mathbf{A}_\omega = \frac{e^{ikR_0}}{cR_0} \int_{-\infty}^{\infty} e\mathbf{v}(t) \, e^{i[\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}_0(t)]} \, dt. \tag{66,11}$$

Siccome $\mathbf{v} = d\mathbf{r}_0/dt$, allora $\mathbf{v}\,dt = d\mathbf{r}_0$, e questa formula può essere scritta come un integrale curvilineo esteso alla traiettoria della carica:

$$\mathbf{A}_\omega = e \frac{e^{ikR_0}}{cR_0} \int e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}_0)} \, d\mathbf{r}_0. \tag{66,12}$$

In virtú della (66,8), la componente di Fourier del campo magnetico ha la forma

$$\mathbf{H}_\omega = e \frac{i\omega e^{ikR_0}}{c^2 R_0} \int e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}_0)} [\mathbf{n} \, d\mathbf{r}_0]. \tag{66,13}$$

Se la carica compie un moto periodico su una traiettoria chiusa, il campo si sviluppa in serie di Fourier. Le componenti dello sviluppo si ricavano dalle formule (66,11), (66,12), (66,13), dove in luogo dell'integrazione rispetto a tutto il tempo si prende la media rispetto al periodo T del moto (vedi le definizioni nel § 49). Per la componente di Fourier di un campo magnetico di frequenza $\omega = n\omega_0 = 2\pi n/T$ abbiamo quindi:

$$\mathbf{H}_n = e \frac{2\pi i n e^{ikR_0}}{c^2 T^2 R_0} \int_0^T e^{i(n\omega_0 t - \mathbf{k}\mathbf{r}_0(t))} [\mathbf{n}\mathbf{v}(t)] \, dt =$$

$$= e \frac{2\pi i n e^{ikR_0}}{c^2 T^2 R_0} \oint e^{i(n\omega_0 t - \mathbf{k}\mathbf{r}_0)} [\mathbf{n} \, d\mathbf{r}_0]. \tag{66,14}$$

Il secondo integrale viene esteso alla orbita chiusa della particella.

PROBLEMA

Trovare l'espressione quadridimensionale per la decomposizione spettrale del 4-impulso irradiato da una carica in moto su una traiettoria assegnata.

Soluzione. Sostituendo la (66,8) nella (66,9) e tenendo conto che, in virtù della condizione di Lorentz (62,1), $k\varphi_\omega = \mathbf{k}\mathbf{A}_\omega$, troviamo:

$$d\mathscr{E}_{\mathbf{n}\omega} = \frac{c}{2\pi}(k^2 |\mathbf{A}_\omega|^2 - |\mathbf{k}\mathbf{A}_\omega|^2) R_0^2 do \frac{d\omega}{2\pi} = \frac{c}{2\pi} k^2 (|\mathbf{A}_\omega|^2 - |\varphi_\omega|^2) R_0^2 do \frac{d\omega}{2\pi} =$$

$$= -\frac{c}{2\pi} k^2 A_{i\omega} A_\omega^{i*} R_0^2 do \frac{d\omega}{2\pi}.$$

Rappresentando il 4-potenziale $A_{i\omega}$ in una forma analoga alla (66,12), troviamo

$$d\mathscr{E}_{\mathbf{n}\omega} = -\frac{k^2 e^2}{4\pi^2} \chi_i \chi^{i*} do\, dk,$$

dove χ^i è il quadrivettore

$$\chi^i = \int \exp(-ik_l x^l) dx^i,$$

nel quale l'integrazione è estesa alla linea d'universo della particella. Infine, passando alle notazioni quadridimensionali [nonché all'elemento di volume quadridimensionale nello spazio-k, (cfr. (10,1a)], otteniamo il 4-impulso irraggiato

$$dP^i = -\frac{e^2 k^i}{2\pi^2 c} \chi_i \chi^i \delta(k_m k^m) d^4 k.$$

§ 67. *Radiazione di dipolo*

Nelle espressioni integrande dei potenziali ritardati (66,1) e (66,2) il tempo $\mathbf{r}\mathbf{n}/c$ può essere trascurato, se la distribuzione delle cariche varia poco in questo intervallo di tempo. È facile trovare le condizioni perché questo sia verificato. Sia T l'ordine di grandezza del tempo nel corso del quale la distribuzione delle cariche nel sistema varia sensibilmente. La radiazione di questo sistema avrà, evidentemente, un periodo dell'ordine di T (cioè una frequenza dell'ordine di $1/T$). Indichiamo inoltre con a l'ordine di grandezza delle dimensioni del sistema. Si ha allora per il tempo $\mathbf{r}\mathbf{n}/c \sim a/c$. Affinché in questo tempo la distribuzione delle cariche nel sistema non varii sensibilmente, è necessario che $a/c \ll T$. Ma cT non è altro che la lunghezza d'onda λ della radiazione. In tal modo, la condizione $a \ll cT$ può essere scritta nella forma

$$a \ll \lambda, \tag{67,1}$$

cioè le dimensioni del sistema debbono essere piccole rispetto alla lunghezza d'onda della radiazione emessa.

Notiamo che la condizione (67,1) può essere anche ricavata dalla (66,7). Nell'espressione integranda, $\mathbf{r}$ prende i valori in un intervallo

dell'ordine delle dimensioni del sistema, poiché al di fuori del sistema $\mathbf{j}$ è nulla. Ne risulta che l'esponente $i\mathbf{kr}$ è piccolo e può essere trascurato per le onde nelle quali $ka \ll 1$, condizione che equivale alla (67,1)

Questa condizione può essere scritta ancora in un'altra forma notando che $T \sim a/v$, cosicché $\lambda \sim ca/v$, dove v è l'ordine di grandezza della velocità delle cariche. Ricaviamo dalla condizione $a \ll \lambda$:

$$v \ll c, \tag{67,2}$$

cioè le velocità delle cariche debbono essere piccole rispetto alla velocità della luce.

Partiremo dal presupposto che questa condizione sia soddisfatta e studieremo la radiazione elettromagnetica a distanze dal sistema irraggiante grandi rispetto alla lunghezza d'onda (e, di conseguenza, grandi in ogni caso rispetto alle dimensioni del sistema). Come è stato detto al § 66, a tali distanze il campo può essere considerato come un'onda piana, e per definire il campo, sarà quindi sufficiente calcolare solo il potenziale vettore.

Il potenziale vettore (66,2) assume ora la forma

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0} \int \mathbf{j}_{t'}\, dV, \tag{67,3}$$

dove il tempo è $t' = t - R_0/c$ e non dipende piú dalle variabili d'integrazione. Sostituendo $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$, scriviamo la (67,3) nella forma

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0} \left(\sum e\mathbf{v} \right),$$

dove la sommatoria è estesa a tutte le cariche del sistema; per brevità, ometteremo l'indice t': tutte le grandezze nei secondi membri delle uguaglianze verranno prese nell'istante t'. Poiché abbiamo

$$\sum e\mathbf{v} = \frac{d}{dt} \sum e\mathbf{r} = \dot{\mathbf{d}},$$

dove $\mathbf{d}$ è il momento di dipolo del sistema, otteniamo,

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0} \dot{\mathbf{d}}. \tag{67,4}$$

Le formule (66,3) ci permettono di calcolare il campo magnetico

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c^2 R_0} [\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}], \tag{67,5}$$

e il campo elettrico

$$\mathbf{E} = \frac{1}{c^2 R_0} [[\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}]\,\mathbf{n}]. \tag{67,6}$$

Notiamo che nell'approssimazione considerata la radiazione è determinata dalla derivata seconda del momento di dipolo del sistema. Una tale radiazione è detta *di dipolo.*

Siccome $\mathbf{d} = \sum e\mathbf{r}$, si ha $\ddot{\mathbf{d}} = \sum e\dot{\mathbf{v}}$. Quindi, le cariche emettono radiazioni soltanto se compiono un moto accelerato. Cariche in un moto uniforme non emettono radiazioni. Questo è, tra l'altro, una conseguenza diretta del principio di relatività, poiché una carica in moto uniforme può essere considerata in un sistema di riferimento inerziale in cui è in quiete, e le cariche ferme non irradiano.

Sostituendo la (67,5) nella (66,6), otteniamo l'intensità della radiazione di dipolo:

$$dI = \frac{1}{4\pi c^3}[\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}]^2\, do = \frac{\ddot{\mathbf{d}}^2}{4\pi c^3}\operatorname{sen}^2\theta\, do, \tag{67,7}$$

dove θ è l'angolo compreso tra i vettori $\ddot{\mathbf{d}}$ ed $\mathbf{n}$. Tale è la quantità d'energia irraggiata dal sistema nell'unità di tempo nell'elemento d'angolo solido do; notiamo che la distribuzione angolare della radiazione è data dal fattore $\operatorname{sen}^2\theta$.

Sostituendo $do = 2\pi \operatorname{sen}\theta\, d\theta$ ed integrando rispetto a $d\theta$ nell'intervallo da 0 a π, otteniamo la radiazione totale:

$$I = \frac{2}{3c^3}\ddot{\mathbf{d}}^2. \tag{67,8}$$

Se si ha una sola carica che si muove in un campo esterno, allora $\mathbf{d} = e\mathbf{r}$ e $\ddot{\mathbf{d}} = e\mathbf{w}$, dove $\mathbf{w}$ è l'accelerazione della carica. In tal modo, la radiazione totale di una carica in moto è

$$I = \frac{2e^2w^2}{3c^3}. \tag{67,9}$$

Notiamo che un sistema chiuso costituito da particelle aventi lo stesso rapporto fra le cariche e la massa non può emettere radiazione di dipolo. Infatti, per un tale sistema il momento di dipolo è

$$\mathbf{d} = \sum e\mathbf{r} = \sum \frac{e}{m} m\mathbf{r} = \text{costante} \sum m\mathbf{r},$$

dove la costante è il rapporto fra la carica e la massa, uguale per tutte le particelle. Ma $\sum m\mathbf{r} = \mathbf{R}\sum m$, dove $\mathbf{R}$ è il raggio vettore del centro di massa del sistema (ricordiamo che tutte le velocità sono $v \ll c$, cosicché la meccanica non relativistica è applicabile). Di conseguenza, $\ddot{\mathbf{d}}$ è proporzionale all'accelerazione del centro di massa, cioè è nullo, poiché il centro di massa compie un moto uniforme.

Scriviamo infine le formule per la decomposizione spettrale dell'intensità della radiazione di dipolo. Per la radiazione prodotta da un

urto, introduciamo la quantità d'energia $d\mathscr{E}_\omega$ emessa durante tutto il tempo dell'urto sotto forma di onde di frequenze comprese nell'intervallo $d\omega/2\pi$ (cfr. § 66). Questa energia si ottiene sostituendo nella (67,8) il vettore $\ddot{\mathbf{d}}$ con la sua componente di Fourier $\ddot{\mathbf{d}}_\omega$ e moltiplicando quindi per 2:

$$d\mathscr{E}_\omega = \frac{4}{3c^3} |\ddot{\mathbf{d}}_\omega|^2 \frac{d\omega}{2\pi}.$$

Secondo la definizione della componente di Fourier abbiamo:

$$\ddot{\mathbf{d}}_\omega e^{-i\omega t} = \frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{d}_\omega e^{-i\omega t}) = -\omega^2 \mathbf{d}_\omega e^{-i\omega t},$$

donde $\ddot{\mathbf{d}}_\omega = -\omega^2 \dot{\mathbf{d}}_\omega$. Otteniamo quindi:

$$d\mathscr{E}_\omega = \frac{4\omega^4}{3c^3} |\mathbf{d}_\omega|^2 \frac{d\omega}{2\pi}. \tag{67,10}$$

Nel caso di particelle in un moto periodico l'intensità di radiazione di frequenza $\omega = n\omega_0$ si ottiene in modo analogo nella forma

$$I_n = \frac{4\omega_0^4 n^4}{3c^3} |\mathbf{d}_n|^2. \tag{67,11}$$

PROBLEMI

1. Determinare la radiazione emessa da un dipolo **d** che ruota in un piano con velocità angolare costante Ω[1]).

Soluzione. Prendendo il piano di rotazione come piano xy, abbiamo:

$$d_x = d_0 \cos \Omega t, \; d_y = d_0 \operatorname{sen} \Omega t.$$

Siccome queste funzioni sono monocromatiche, la radiazione è pure monocromatica di frequenza $\omega = \Omega$. La formula (67,7) ci permette di trovare per la distribuzione angolare media (su un periodo di rotazione) della radiazione:

$$\overline{dI} = \frac{d_0^2 \Omega^4}{8\pi c^3} (1 + \cos^2 \vartheta)\, do,$$

dove ϑ è l'angolo tra la direzione **n** della radiazione e l'asse delle z. L'intensità totale è

$$\bar{I} = \frac{2 d_0^2 \Omega^4}{3c^3}.$$

La polarizzazione della radiazione è determinata dalla direzione del vettore $[\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}] = \omega^2[\mathbf{d}\mathbf{n}]$. Proiettando questo vettore sul piano determinato da **n**z e sul piano ad esso perpendicolare, troviamo che la radiazione è polarizzata ellitti-

---

[1]) La radiazione da un rotatore e da una trottola simmetrica dotati di momento di dipolo è riconducibile a questo problema. Nel primo caso **d** coincide con il momento dipolare totale del rotatore, e nel secondo caso, con la proiezione del momento dipolare della trottola sul piano perpendicolare all'asse della sua precessione (cioè alla direzione del momento angolare totale di rotazione).

camente ed il rapporto tra le lunghezze dei semiassi è uguale a $n_z = \cos\vartheta$; in particolare, la radiazione nella direzione dell'asse delle z è polarizzata circolarmente.

2. Determinare la distribuzione angolare della radiazione emessa da un sistema di cariche che si muove come un unico insieme (con velocità v), se è nota la distribuzione nel sistema di riferimento dove il sistema di cariche, considerato come un insieme, è a riposo.

Soluzione. Sia

$$dI' = f(\cos\theta', \varphi')\, do', \quad do' = d(\cos\theta')\, d\varphi'$$

l'intensità della radiazione nel sistema di riferimento K' legato al sistema di cariche in moto (θ', φ' sono gli angoli delle coordinate sferiche con l'asse polare diretto lungo il moto del sistema). L'energia $d\mathscr{E}$ irraggiata nell'intervallo di tempo dt nel sistema di riferimento immobile (del laboratorio) K è legata alla energia irraggiata $d\mathscr{E}$ nel sistema K' dalla formula di trasformazione

$$d\mathscr{E}' = \frac{d\mathscr{E} - \mathrm{V}\, d\mathrm{P}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = d\mathscr{E}\, \frac{1-\frac{V}{c}\cos\theta}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

(l'impulso della radiazione che si propaga in una data direzione è legato alla sua energia dalla relazione $|\, d\mathrm{P}\, | = d\mathscr{E}/c$). Gli angoli polari θ, θ' della direzione della radiazione nei sistemi di riferimento K e K' sono legati dalle formule (5,6) (per gli angoli azimutali si ha $\varphi = \varphi'$). Infine, al tempo dt' nel sistema K' corrisponde il tempo $dt = dt'/\sqrt{1 - V^2/c^2}$ nel sistema K. Per l'intensità $dI = d\mathscr{E}/dt$ nel sistema K troviamo:

$$dI = \frac{\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^2}{\left(1-\frac{V}{c}\cos\theta\right)^3} f\left(\frac{\cos\theta - \frac{V}{c}}{1-\frac{V}{c}\cos\theta}, \varphi\right) do.$$

Per un dipolo che si muove nella direzione del suo asse, f = costante. $\mathrm{sen}^2\theta'$, e la formula ottenuta ci dà:

$$dI = \text{costante}\, \frac{\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^3 \mathrm{sen}^2\theta}{\left(1-\frac{V}{c}\cos\theta\right)^5}\, do.$$

§ 68. *Radiazione di dipolo dovuta a collisione di particelle*

La radiazione che accompagna l'urto di due particelle che descrivono traiettorie determinate, nota come *radiazione di frenamento*, presenta un interesse scarso nei problemi di irraggiamento da urto. Di solito si deve considerare la diffusione di un intero fascio parallelo di particelle , e il problema consiste nel determinare la radiazione totale riferita all'unità di densità di flusso delle particelle incidenti.

Se la densità del fascio di particelle è uguale all'unità (cioè se una particella passa nell'unità di tempo attraverso l'unità d'area

della sezione del fascio), allora il numero di particelle nel fascio, aventi il « parametro d'urto » compreso tra ρ e $\rho + d\rho$, è uguale a $2\pi\rho\, d\rho$ (l'area della corona circolare limitata dalle circonferenze di raggi ρ e $\rho + d\rho$). Ne segue che la radiazione totale cercata si ottiene moltiplicando la radiazione totale $\Delta\mathscr{E}$ emessa da una particella (con parametro d'urto dato) per $2\pi\rho\, d\rho$ ed integrando in $d\rho$ da 0 a ∞. La grandezza cosí definita ha la dimensione del prodotto dell'energia per l'area. La chiameremo *irraggiamento efficace* e indicheremo con $\varkappa$[1]):

$$\varkappa = \int_0^\infty \Delta\mathscr{E} \cdot 2\pi\rho\, d\rho. \tag{68,1}$$

Analogamente si può definire l'irraggiamento efficace in un elemento d'angolo solido do determinato, in un intervallo determinato di frequenze $d\omega$, e via di seguito[2]).

Deduciamo la formula generale che determina la distribuzione angolare della radiazione quando un fascio di particelle viene diffuso in un campo a simmetria centrale, supponendo che la radiazione sia di dipolo.

L'intensità della radiazione (in ogni istante) emessa da una particella è data dalla formula (67,7) nella quale $\mathbf{d}$ è il momento di dipolo della particella rispetto al centro di diffusione[3]). Innanzitutto, prendiamo la media di questa espressione rispetto a tutte le direzioni del vettore $\ddot{\mathbf{d}}$ nel piano della sezione trasversale del fascio. Essendo dato che $[\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}]^2 = \ddot{\mathbf{d}}^2 - (\mathbf{n}\ddot{\mathbf{d}})^2$, bisognerà prendere la media soltanto della grandezza $(\mathbf{n}\ddot{\mathbf{d}})^2$. In virtú della simmetria centrale del campo di diffusione e del parallelismo del fascio di particelle incidenti, la diffusione (e con essa la radiazione) possiede una simmetria assiale rispetto ad un asse passante per il centro. Prendiamo questo asse per asse delle x. È evidente, per ragioni di simmetria, che le prime potenze di $\ddot{d}_y$ e $\ddot{d}_z$ quando si prende la media si annullano, e siccome non si prende la media di $\ddot{d}_x$, si ha

$$\overline{\ddot{d}_x \ddot{d}_y} = \overline{\ddot{d}_x \ddot{d}_z} = 0.$$

---

[1]) Il rapporto fra $\varkappa$ e l'energia del sistema irraggiante è detto sezione d'urto di perdita di energia per irraggiamento.

[2]) Quando un'espressione che deve essere integrata dipende dall'angolo della proiezione del momento dipolare della particella nel piano della sezione trasversale del fascio, bisogna allora prendere preliminarmente la media rispetto a tutte le direzioni in questo piano, quindi moltiplicare per $2\pi\rho\, d\rho$ e infine integrare.

[3]) Di fatto, si tratta del momento di dipolo di due particelle — quella diffusa e qulla che diffonde — rispetto al loro centro di massa.

Quanto ai valori medi di $\ddot{d}_y^2$ e $\ddot{d}_z^2$, essi coincidono e quindi

$$\overline{\ddot{d}_y^2} = \overline{\ddot{d}_z^2} = \frac{1}{2}(\ddot{\mathbf{d}}^2 - \ddot{d}_x^2).$$

Tenendo conto di tutto questo, si trova facilmente

$$\overline{[\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}]^2} = \frac{1}{2}(\ddot{\mathbf{d}}^2 + \ddot{d}_x^2) + \frac{1}{2}(\ddot{\mathbf{d}}^2 - 3\ddot{d}_x^2)\cos^2\theta,$$

dove θ è l'angolo tra la direzione $\mathbf{n}$ della radiazione e l'asse delle x.

Integrando l'intensità rispetto al tempo ed a tutti i parametri d'urto, otteniamo in definitiva la seguente espressione che determina l'irraggimento efficace in funzione della direzione:

$$d\varkappa_{\mathbf{n}} = \frac{do}{4\pi c^3}\left(A + B\,\frac{3\cos^2\theta - 1}{2}\right), \tag{68,2}$$

dove

$$A = \frac{2}{3}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty \ddot{\mathbf{d}}^2\,dt\,2\pi\rho\,d\rho,\quad B = \frac{1}{3}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty (\ddot{\mathbf{d}}^2 - 3\ddot{d}_x^2)\,dt\,2\pi\rho\,d\rho. \tag{68,3}$$

Il secondo termine nella (68,2) si annulla quando si prende la media rispetto a tutte le direzioni, e quindi l'irraggiamento efficace totale è $\varkappa = A/c^3$. Va sottolineato che la distribuzione angolare della radiazione è simmetrica rispetto al piano passante per il centro di diffusione perpendicolarmente al fascio: l'espressione (68,2) non cambia allorché si sostituisce θ con $\pi - \theta$. Questa proprietà è specifica per la radiazione di dipolo e si perde quando si passa ad un'approssimazione piú elevata in v/c.

L'intensità della radiazione di frenamento può essere divisa in due parti: intensità della radiazione polarizzata nel piano passante per l'asse delle x e la direzione $\mathbf{n}$ (prendiamolo per piano xy), ed intensità della radiazione polarizzata nel piano perpendicolare xz.

Il vettore campo elettrico è diretto lungo il vettore

$$[\mathbf{n}\,[\mathbf{n}\ddot{\mathbf{d}}]] = \mathbf{n}\,(\mathbf{n}\ddot{\mathbf{d}}) - \ddot{\mathbf{d}}$$

[vedi la (67,6)]. La componente di questo vettore nella direzione perpendicolare al piano xy è $-\ddot{d}_z$, e la proiezione sul piano xy è $|\operatorname{sen}\theta\cdot\ddot{d}_x - \cos\theta\cdot\ddot{d}_y|$ (è piú comodo definire quest'ultima partendo dalla componente sull'asse delle z del campo magnetico avente la direzione $[\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}]$).

Elevando $\mathbf{E}$ al quadrato e prendendo la media rispetto a tutte le direzioni del vettore $\ddot{\mathbf{d}}$ nel piano yz, vediamo innanzitutto che il prodotto delle proiezioni del campo sul piano xy e sul piano perpendicolare si annulla. Ciò significa che l'intensità può essere

effettivamente rappresentata come la somma di due contributi incoerenti: le intensità di radiazione polarizzata in due piani mutuamente perpendicolari.

L'intensità di radiazione il cui vettore campo elettrico è perpendicolare al piano xy viene determinata dalla media del quadrato di $\ddot{d}_z^2 = \frac{1}{2}(\ddot{\mathbf{d}}^2 - \ddot{d}_x^2)$. Per la parte corrispondente dell'irraggimento efficace si ottiene l'espressione

$$d\varkappa_{\mathrm{n}}^{\perp} = \frac{do}{4\pi c^3}\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(\ddot{\mathbf{d}}^2 - \ddot{d}_x^2)\,dt\,2\pi\rho\,d\rho. \qquad (68,4)$$

Notiamo che questa parte dell'irraggiamento è isotropa rispetto a tutte le direzioni. Non c'è bisogno di scrivere l'espressione dell'irraggiamento efficace la cui direzione del campo elettrico si trova nel piano xy, perché è evidente che

$$d\varkappa_{\mathrm{n}}^{\perp} + d\varkappa_{\mathrm{n}}^{\parallel} = d\varkappa_{\mathrm{n}}^{\parallel}.$$

Si può ottenere in modo analogo l'espressione della distribuzione angolare dell'irraggiamento efficace in un intervallo determinato di frequenze:

$$d\varkappa_{\mathrm{n}\omega} = \frac{do}{2\pi c^3}\left[A(\omega) + B(\omega)\frac{3\cos^2\theta - 1}{2}\right]\frac{d\omega}{2\pi}, \qquad (68,5)$$

dove

$$A(\omega) = \frac{2\omega^4}{3}\int_0^{\infty}\mathbf{d}_{\omega}^2 2\pi\rho\,d\rho, \quad B(\omega) = \frac{\omega^4}{3}\int_0^{\infty}(\mathbf{d}_{\omega}^2 - 3d_{x\omega}^2)\,2\pi\rho\,d\rho \qquad (68,6)$$

§ 69. *Radiazione di frenamento di basse frequenze*

Esaminiamo la « coda » delle basse frequenze della distribuzione spettrale della radiazione di frenamento, cioè la regione di frequenze piccole rispetto alla frequenza, che indicheremo con ω_0, attorno alla quale è concentrata la gran parte della radiazione:

$$\omega \ll \omega_0. \qquad (69,1)$$

In questo caso non supporremo che le velocità delle particelle che si urtano siano piccole rispetto alla velocità della luce, come nel paragrafo precedente; le formule che seguono sono valide per velocità arbitrarie. Nel caso non relativistico, si ha $\omega_0 \sim 1/\tau$, dove τ è l'ordine di grandezza della durata dell'urto; nel caso ultrarelativistico, ω_0 è proporzionale al quadrato dell'energia della particella irraggiante (vedi piú avanti § 77).

Nell'integrale

$$\mathbf{H}_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H} e^{i\omega t}\, dt$$

il campo di radiazione $\mathbf{H}$ è sensibilmente differente da zero soltanto nell'intervallo di tempo dell'ordine di $1/\omega_0$. Di conseguenza, se si verifica la condizione (69,1), sotto il segno d'integrazione si può considerare $\omega t \ll 1$, quindi $e^{i\omega t}$ può essere sostituito con l'unità; allora

$$\mathbf{H}_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}\, dt.$$

Sostituendovi $\mathbf{H} = [\ddot{\mathbf{A}}\mathbf{n}]/c$ ed integrando rispetto al tempo, otteniamo:

$$\mathbf{H}_\omega = \frac{1}{c}\,[(\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1)\,\mathbf{n}], \tag{69,2}$$

dove $\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1$ è la variazione del potenziale vettore del campo creato dalle particelle durante la collisione.

La radiazione totale (di frequenza ω) durante un urto si ottiene sostituendo la (69,2) nella (66,9):

$$d\mathscr{E}_{\mathbf{n}\omega} = \frac{R_0^2}{4c\pi^2}\,[(\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1]\,\mathbf{n}]^2\, do\, d\omega. \tag{69,3}$$

Per il potenziale vettore si può utilizzare la sua espressione nella forma di Lienard-Wiechert (66,4) la quale ci dà:

$$d\mathscr{E}_{\mathbf{n}\omega} = \frac{1}{4\pi^2 c^3}\left\{\sum e\left(\frac{[\mathbf{v}_2\mathbf{n}]}{1-\frac{1}{c}\mathbf{n}\mathbf{v}_2} - \frac{[\mathbf{v}_1\mathbf{n}]}{1-\frac{1}{c}\mathbf{n}\mathbf{v}_1}\right)\right\}^2 do\, d\omega, \tag{69,4}$$

dove $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono le velocità delle particelle prima e dopo la diffusione, e la somma è estesa alle due particelle collidenti. Sottolineiamo che il coefficiente di $d\omega$ non dipende dalla frequenza. In altri termini, per frequenze piccole (condizione (69,1)) la distribuzione spettrale della radiazione non dipende dalla frequenza, cioè $d\mathscr{E}_{\mathbf{n}\omega}/d\omega$ tende ad un limite costante quando $\omega \to 0$[1]).

---

[1]) Integrando rispetto ai parametri d'urto, si può ottenere un risultato analogo per l'irraggiamento efficace nella diffusione di un fascio di particelle. Tuttavia, bisogna tener presente che questo risultato non è valido per l'irraggiamento efficace in una interazione di tipo coulombiano perché l'integrale in $d\rho$ diverge (logaritmicamente) per ρ grandi. Vedremo nel paragrafo seguente che in questo caso l'irraggiamento efficace per piccole frequenze dipende logaritmicamente dalla frequenza e non resta costante.

Nel caso in cui le velocità delle particelle in collisione sono piccole rispetto alla velocità della luce, la (69,4) diventa

$$d\mathscr{E}_{\mathbf{n}\omega} = \frac{1}{4\pi^2 c^3} \left(\sum e\,[\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1, \mathbf{n}] \right)^2 do\, d\omega. \qquad (69,5)$$

Questa espressione corrisponde ad una radiazione di dipolo il cui potenziale vettore è dato dalla formula (67,4).

Un caso interessante di applicazione delle formule ottenute è fornito dalla radiazione che accompagna l'emissione di una nuova particella carica (per esempio, l'emissione di una particella β da parte di un nucleo). È necessario in questo caso considerare il processo come un cambiamento istantaneo della velocità della particella, da zero al valore che essa assume (in vitú della simmetria della formula (69,5) rispetto alla trasposizione di $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$, la radiazione generata da questo processo coincide con la radiazione che accompagnerebbe il processo inverso, ossia l'arresto istantaneo della particella). È essenziale che, siccome il « tempo » di questo processo tende a zero, $\tau \to 0$, tutte le frequenze, in generale, soddisfano la condizione (69,1)[1]).

PROBLEMA

Determinare la distribuzione spettrale della radiazione totale che accompagna l'emissione di una particella carica che si muove con velocità v.

Soluzione. In virtú della formula (69,4) (dove poniamo $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}$, $\mathbf{v}_1 = 0$), abbiamo:

$$d\mathscr{E}_\omega = d\omega \frac{e^2 v^2}{4\pi^2 c^3} \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right)^2} 2\pi \operatorname{sen}\theta\, d\theta.$$

Il calcolo dell'integrale ci conduce al risultato[2]):

$$d\mathscr{E}_\omega = \frac{e^2}{\pi c} \left(\frac{c}{v} \ln \frac{c+v}{c-v} - 2 \right) d\omega. \qquad (1)$$

Per $v \ll c$ questa formula diventa

$$d\mathscr{E}_\omega = \frac{2e^2 v^2}{3\pi c^3}\, d\omega,$$

espressione che può essere ricavata direttamente dalla (69,5).

---

[1]) La validità delle equazioni è però limitata dalla condizione quantistica per cui l'energia cinetica totale della particella deve essere molto maggiore di $\hbar\omega$.

[2]) Sebbene la condizione (69,1) sia soddisfatta, per tutte le frequenze, come è stato già indicato, in virtú dell'« istantaneità » del processo, non è possibile però ottenere la radiazione totale emessa integrando l'espressione (1) in $d\omega$: l'integrale diverge per grandi frequenze. Oltre alla violazione delle condizioni « classiche » per grandi frequenze, la causa della divergenza nel nostro caso è dovuta all'impostazione non corretta del problema classico per cui la particella ha, nell'istante iniziale, un'accelerazione infinita.

§ 70. *Radiazione dovuta all'interazione coulombiana*

In questo paragrafo ricaveremo un certo numero di formule (per completezza) relative alla radiazione di dipolo di un sistema di due particelle cariche; si suppone che le velocità delle particelle siano piccole rispetto alla velocità della luce.

Il moto uniforme dell'intero sistema come insieme (cioè il moto del suo centro di massa) non presenta interesse perché non genera radiazione; si deve quindi considerare soltanto il moto relativo delle due particelle. Prendiamo come origine delle coordinate il centro di massa. Allora il momento di dipolo del sistema $\mathbf{d} = e_1\mathbf{r}_1 + e_2\mathbf{r}_2$ assumerà la forma

$$\mathbf{d} = \frac{e_1 m_2 - e_2 m_1}{m_1 + m_2}\,\mathbf{r} = \mu\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)\mathbf{r}, \tag{70,1}$$

dove gli indici 1 e 2 si riferiscono alle due particelle, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ è il raggio vettore tra di esse e $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ è la massa ridotta.

Cominciamo dalla radiazione dovuta al moto ellittico di due particelle che si attraggono secondo la legge di Coulomb. Come è noto dalla meccanica (vedi vol. I, Meccanica, § 15), questo moto può essere descritto come il moto di una particella di massa μ su un'ellisse data in coordinate polari dall'equazione:

$$1 + \varepsilon\cos\varphi = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{r}, \tag{70,2}$$

dove il semiasse maggiore a e l'eccentricità ε valgono:

$$a = \frac{\alpha}{2|\mathscr{E}|}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 - \frac{2|\mathscr{E}|M^2}{\mu\alpha^2}}. \tag{70,3}$$

Qui $\mathscr{E}$ è l'energia totale delle particelle (senza l'energia a riposo!), che per il moto finito è negativa; $M = \mu r^2\dot{\varphi}$ è il momento angolare; α è la costante della legge di Coulomb:

$$\alpha = |e_1 e_2|.$$

La dipendenza delle coordinate dal tempo si può scrivere nella forma di equazioni parametriche

$$r = a(1 - \varepsilon\cos\xi), \quad t = \sqrt{\frac{\mu a^3}{\alpha}}\,(\xi - \varepsilon\,\mathrm{sen}\,\xi). \tag{70,4}$$

Al percorso completo dell'ellisse corrisponde la variazione del parametro ξ da 0 a 2π; il periodo del moto è

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\mu a^3}{\alpha}}.$$

Determiniamo le componenti di Fourier del momento di dipolo. Essendo il moto considerato periodico, si ha uno sviluppo in serie di Fourier. Siccome il momento di dipolo è proporzionale al raggio vettore **r**, il problema si riduce al calcolo delle componenti di Fourier delle coordinate $x = r \cos \varphi$ ed $y = r \operatorname{sen} \varphi$. La dipendenza di x ed y dal tempo è determinata dalle equazioni parametriche

$$x = a(\cos \xi - \varepsilon), \quad y = a\sqrt{1-\varepsilon^2} \operatorname{sen} \xi,$$
$$\omega_0 t = \xi - \varepsilon \operatorname{sen} \xi, \tag{70,5}$$

dove è stata introdotta la frequenza

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{\alpha}{\mu a^3}} = \frac{(2\,|\mathscr{E}|)^{3/2}}{\alpha\mu^{1/2}}.$$

In luogo delle componenti di Fourier delle coordinate, è piú comodo calcolare le componenti di Fourier delle velocità; utilizzando le relazione $\dot{x}_n = -i\omega_0 n x_n$, $\dot{y}_n = -i\omega_0 n y_n$ si ha:

$$x_n = \frac{\dot{x}_n}{-i\omega_0 n} = \frac{i}{\omega_0 n T} \int_0^T e^{i\omega_0 n t} \dot{x}\, dt.$$

D'altra parte, $\dot{x}\, dt = dx = -a \operatorname{sen} \xi\, d\xi$; passando dall'integrazione in dt a quella in $d\xi$, si ha quindi:

$$x_n = -\frac{ia}{2\pi n} \int_0^{2\pi} e^{in(\xi - \varepsilon \operatorname{sen} \xi)} \operatorname{sen} \xi\, d\xi.$$

Analogamente si trova:

$$y_n = \frac{ia\sqrt{1-\varepsilon^2}}{2\pi n} \int_0^{2\pi} e^{in(\xi - \varepsilon \operatorname{sen} \xi)} \cos \xi\, d\xi = \frac{ia\sqrt{1-\varepsilon^2}}{2\pi n \varepsilon} \int_0^{2\pi} e^{in(\xi - \varepsilon \operatorname{sen} \xi)}\, d\xi$$

(passando dal primo integrale al secondo, nella espressione integranda poniamo $\cos \xi \equiv \left(\cos \xi - \frac{1}{\varepsilon}\right) + \frac{1}{\varepsilon}$; allora il primo termine si integra ed è identicamente uguale a zero). Utilizzando quindi la nota formula della teoria delle funzioni di Bessel

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n\xi - x \operatorname{sen} \xi)}\, d\xi = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\xi - x \operatorname{sen} \xi)\, d\xi = J_n(x), \tag{70,6}$$

dove $J_n(x)$ è la funzione di Bessel di ordine intero n. In definitiva si ottengono le seguenti espressioni per le componenti di Fourier:

$$x_n = \frac{a}{n} J'_n(n\varepsilon), \quad y_n = \frac{ia\sqrt{1-\varepsilon^2}}{n\varepsilon} J_n(n\varepsilon) \tag{70,7}$$

(l'apice sulla funzione di Bessel indica la derivata rispetto alla sua variabile indipendente).

L'espressione dell'intensità delle componenti monocromatiche della radiazione si ottiene sostituendo x_n ed y_n nella formula

$$I_n = \frac{4\omega_0^4 n^4}{3c^3} \mu^2 \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2 (|x_n|^2 + |y_n|^2)$$

(vedi la (67,11)). Esprimendo inoltre a e ω_0 mediante le caratteristiche delle particelle, si ottiene in definitiva:

$$I_n = \frac{64 n^2 \mathscr{E}^4}{3c^3 \alpha^2} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2 \left[J_n'^2(n\varepsilon) + \frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon^2} J_n^2(n\varepsilon)\right]. \qquad (70,8)$$

Scriviamo, in particolare, una formula asintotica per l'intensità delle armoniche molto elevate (per grandi n) quando il moto avviene su un'orbita quasi parabolica (ε vicina a 1). Utilizziamo a questo scopo la formula asintotica

$$J_n(n\varepsilon) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2}{n}\right)^{1/3} \Phi\left[\left(\frac{n}{2}\right)^{2/3} (1-\varepsilon^2)\right], \qquad n \gg 1, \quad 1-\varepsilon \ll 1, \qquad (70,9)$$

dove Φ è la funzione di Airy (definita nella nota alla pag. 201)[1]. La sostituzione nella (70,8) dà:

$$I_n = \frac{64 \cdot 2^{2/3}}{3\pi} \frac{n^{4/3} \mathscr{E}^4}{c^3 \alpha^2} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2 \left\{(1-\varepsilon^2)\Phi^2\left[\left(\frac{n}{2}\right)^{2/3}(1-\varepsilon^2)\right] + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{2}{n}\right)^{2/3} \Phi'^2\left[\left(\frac{n}{2}\right)^{2/3}(1-\varepsilon^2)\right]\right\}. \qquad (70,10)$$

---

[1]) Quando $n \gg 1$, nell'integrale

$$J_n(n\varepsilon) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos[n(\xi - \varepsilon \operatorname{sen} \xi)]\, d\xi$$

il contributo principale è dato dalle ξ piccole (per ξ non piccole l'espressione integranda compie oscillazioni rapide). Pertanto sviluppiamo l'argomento del coseno in serie di le potenze di ξ:

$$J_n(n\varepsilon) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos\left[n\left(\frac{1-\varepsilon^2}{2}\xi + \frac{\xi^3}{6}\right)\right] d\xi;$$

in virtú della convergenza rapida dell'integrale, l'estremo superiore d'integrazione può essere sostituito con ∞; il termine contenente ξ^3 deve essere conservato, perché nel termine del primo ordine è presente il piccolo coefficiente $1 - \varepsilon \approx (1 - \varepsilon^2)/2$. L'integrale ottenuto, con una sostituzione evidente, si riduce alla forma (70,9).

Questo stesso risultato può essere espresso anche mediante le funzioni di MacDonald K_ν:

$$I_n = \frac{64}{9\pi^2}\frac{n^2\mathscr{E}^4}{c^3\alpha^2}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2\left\{K^2_{1/3}\left[\frac{n}{3}(1-\varepsilon^2)^{3/2}\right]+\right.$$
$$\left.+K^2_{2/3}\left[\frac{n}{3}(1-\varepsilon^2)^{3/2}\right]\right\}(1-\varepsilon^2)^2$$

(le formule necessarie sono riportate nella nota alla pag. 267).

Consideriamo ora l'urto di due particelle cariche che si attraggono. Il loro moto relativo viene descritto come il moto di una particella di massa μ sull'iperbole

$$1+\varepsilon\cos\varphi=\frac{a(\varepsilon^2-1)}{r}, \tag{70,11}$$

dove

$$a=\frac{\alpha}{2\mathscr{E}}, \qquad \varepsilon=\sqrt{1+\frac{2\mathscr{E}M^2}{\mu\alpha^2}} \tag{70,12}$$

(ora $\mathscr{E}>0$). La dipendenza di r dal tempo è determinata dalle equazioni parametriche

$$r=a(\varepsilon\,\mathrm{ch}\,\xi-1), \quad t=\sqrt{\frac{\mu a^3}{\alpha}}(\varepsilon\,\mathrm{sh}\,\xi-\xi), \tag{70,13}$$

dove il parametro ξ prende i valori da $-\infty$ a $+\infty$. Per le coordinate x, y abbiamo:

$$x=a(\varepsilon-\mathrm{ch}\,\xi),\ y=a\sqrt{\varepsilon^2-1}\,\mathrm{sh}\,\xi. \tag{70,14}$$

Il calcolo delle componenti di Fourier (si tratta in questo caso di sviluppo in integrale di Fourier) si effettua in modo del tutto analogo al caso precedente. Si ottiene dunque:

$$x_\omega=\frac{\pi a}{\omega}H^{(1)\prime}_{i\nu}(i\nu\varepsilon), \quad y_\omega=-\frac{\pi a\sqrt{\varepsilon^2-1}}{\omega\varepsilon}H^{(1)}_{i\nu}(i\nu\varepsilon), \tag{70,15}$$

dove $H^{(1)}_{i\nu}$ è la funzione di Hankel di prima specie d'ordine $i\nu$ e dove è stato posto

$$\nu=\frac{\omega}{\sqrt{\alpha/\mu a^3}}=\frac{\omega\alpha}{\mu v_0^3} \tag{70,16}$$

(v_0 è la velocità relativa delle particelle all'infinito; l'energia è $\mathscr{E}=\mu v_0^2/2$)[1]. Nei calcoli è stata utilizzata la nota formula

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{p\xi-ix\,\mathrm{sh}\,\xi}\,d\xi=i\pi H^{(1)}_p(ix). \tag{70,17}$$

---

[1]) Notiamo che la funzione $H^{(1)}_{i\nu}(i\nu\varepsilon)$ è immaginaria pura e la sua derivata $H^{(1)\prime}_{i\nu}(i\nu\varepsilon)$ reale.

Sostituendo la (70,15) nella formula

$$d\mathscr{E}_\omega = \frac{4\omega^4\mu^2}{3c^3}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2 (|x_\omega|^2+|y_\omega|^2)\frac{d\omega}{2\pi}$$

(vedi la (67,10)), otteniamo

$$d\mathscr{E}_\omega = \frac{\pi\mu^2\alpha^2\omega^2}{6c^3\mathscr{E}^2}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2\left\{[H_{i\nu}^{(1)\prime}(i\nu\varepsilon)]^2-\frac{\varepsilon^2-1}{\varepsilon^2}[H_{i\nu}^{(1)}(i\nu\varepsilon)]^2\right\}d\omega. \tag{70,18}$$

Un grande interesse presenta l' «irraggiamento efficace» durante la diffusione di un fascio parallelo di particelle (vedi § 68). Per calcolare questa grandezza moltiplichiamo $d\mathscr{E}_\omega$ per $2\pi\rho d\rho$ ed integriamo rispetto a tutte le ρ da zero all'infinito. L'integrazione in $d\rho$ sostituiamo con l'integrazione in $d\varepsilon$ (da 1 a ∞), notando che $2\pi\rho\, d\rho = 2\pi a^2\varepsilon\, d\varepsilon$; questa relazione deriva dalle definizioni (70,12), dove il momento angolare M e l'energia $\mathscr{E}$ sono legati al parametro d'urto ρ ed alla velocità v_0 dalle relazioni

$$M = \mu\rho v_0, \quad \mathscr{E} = \frac{\mu v_0^2}{2}.$$

L'integrale ottenuto si prende secondo la formula

$$z = \left[Z_p'^2 + \left(\frac{p^2}{z^2}-1\right)Z_p^2\right] = \frac{d}{dz}(zZ_pZ_p'),$$

dove $Z_p(z)$ è una soluzione qualsiasi dell'equazione di Bessel di ordine p[1]). Tenendo presente che per $\varepsilon \to \infty$ la funzione di Hankel $H_{i\nu}^{(1)}(i\nu\varepsilon)$ si annulla, otteniamo in definitiva la seguente formula:

$$d\varkappa_\omega = \frac{4\pi^2\alpha^3\omega}{3c^3\mu v_0^5}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2 |H_{i\nu}^{(1)}(i\nu)|\, H_{i\nu}^{(1)\prime}(i\nu)\, d\omega. \tag{70,19}$$

Esaminiamo con attenzione particolare i casi limiti di alte e basse frequenze Nell'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\nu(\xi-\operatorname{sh}\xi)}\, d\xi = i\pi H_{i\nu}(i\nu), \tag{70,20}$$

che definisce la funzione di Hankel, il maggiore contributo viene solo dall'intervallo di valori della variabile d'integrazione ξ per cui l'esponente è dell'ordine dell'unità. Per basse frequenze ($\nu \ll 1$), è quindi importante l'intervallo delle ξ grandi. Per ξ grandi

---

[1]) Questa formula è una conseguenza diretta dell'equazione di Bessel

$$Z''+\frac{1}{z}Z'+\left(1-\frac{p^2}{z^2}\right)Z=0.$$

si ha sh $\xi \gg \xi$, e quindi, approssimativamente otteniamo:

$$H_{i\nu}^{(1)}(i\nu) \approx -\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\nu \operatorname{sh}\xi}\, d\xi = H_0^{(1)}(i\nu).$$

Analogamente si trova che

$$H_{i\nu}^{(1)\prime}(i\nu) \approx H_0^{(1)\prime}(i\nu).$$

Utilizzando infine l'espressione approssimata (per x piccolo) nota dalla teoria delle funzioni di Bessel

$$iH_0^{(1)}(ix) \approx \frac{2}{\pi}\ln\frac{2}{\gamma x}$$

($\gamma = e^C$, dove C è la costante d'Eulero; $\gamma = 1{,}781\ldots$), otteniamo la seguente espressione per l'irraggiamento efficace alle basse frequenze:

$$d\varkappa_\omega = \frac{16\alpha^2}{3v_0^2 c^3}\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2 \ln\left(\frac{2\mu v_0^3}{\gamma\omega\alpha}\right) d\omega \quad \text{per } \omega \ll \frac{\mu v_0^3}{\alpha}. \qquad (70.21)$$

Esso dipende logaritmicamente dalla frequenza.

Per alte frequenze ($\nu \gg 1$), nell'integrale (70,20) sono importanti, al contrario, le ξ piccole. Sviluppando quindi l'esponente dell'espressione integranda in serie di potenze di ξ, approssimativamente otteniamo:

$$H_{i\nu}^{(1)}(i\nu) \approx -\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{i\nu}{6}\xi^3\right) d\xi =$$

$$= -\frac{2i}{\pi}\operatorname{Re}\left\{\int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{i\nu}{6}\xi^3\right) d\xi\right\}.$$

La sostituzione $i\nu\xi^3/6 = \eta$ riduce questo integrale alla funzione Γ, e in definitiva si ottiene:

$$H_{i\nu}^{(1)}(i\nu) \approx -\frac{i}{\pi\sqrt{3}}\left(\frac{6}{\nu}\right)^{1/3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right).$$

Analogamente troviamo:

$$H_{i\nu}^{(1)\prime}(i\nu) \approx \frac{1}{\pi\sqrt{3}}\left(\frac{6}{\nu}\right)^{2/3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right).$$

Infine, utilizzando la formula ben nota dalla teoria della funzione Γ

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi x},$$

per l'irraggiamento efficace alle alte frequenze otteniamo:

$$d\varkappa_\omega = \frac{16\pi\alpha^2}{3^{3/2}v_0^2 c^3}\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2 d\omega \quad \text{per } \omega \gg \frac{\mu v_0^3}{\alpha}, \qquad (70{,}22)$$

cioè un'espressione che non dipende dalla frequenza.

Passiamo ora alla radiazione di frenamento durante l'urto di due particelle che si respingono secondo la legge $U = \alpha/r$ ($\alpha > 0$). Il moto in questo caso descrive un'iperbole

$$-1 + \varepsilon \cos \varphi = \frac{a(\varepsilon^2 - 1)}{r}\,; \tag{70,23}$$

$$x = a(\varepsilon + \operatorname{ch}\xi), \quad y = a\sqrt{\varepsilon^2 - 1}\operatorname{sh}\xi, \quad t = \sqrt{\frac{\mu a^3}{\alpha}}(\varepsilon \operatorname{sh}\xi + \xi) \tag{70,24}$$

(a ed ε sono ricavate dalla (70,12)). Tutti i calcoli del presente caso si riducono direttamente a quelli del caso precedente, e non c'è quindi bisogno di ripeterli. Infatti, l'integrale

$$x_\omega = \frac{ia}{\omega}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\nu(\varepsilon \operatorname{sh}\xi + \xi)} \operatorname{sh}\xi\, d\xi$$

per la componente di Fourier della coordinata x si riduce, con la sostituzione $\xi \to i\pi - \xi$, allo stesso integrale, moltiplicato per $e^{-\pi\nu}$, che si aveva nel caso dell'attrazione; la stessa cosa ha luogo per y_ω.

In tal modo, le espressioni per le componenti di Fourier x_ω, y_ω nel caso della repulsione si distinguono dalle espressioni rispettive nel caso d'attrazione per il fattore $e^{-\pi\nu}$. Nelle formule dell'irraggiamento, compariranno quindi i nuovi fattori $e^{-2\pi\nu}$. In particolare, per le basse frequenze si ottiene la formula precedente (70,21) (perché quando $\nu \ll 1$, $e^{-2\pi\nu} \approx 1$). Per le alte frequenze l'irraggiamento efficace assume la forma

$$d\varkappa_\omega = \frac{16\pi\alpha^2}{3^{3/2} v_0^2 c^3}\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2 \exp\left(-\frac{2\pi\omega\alpha}{\mu v_0^3}\right) d\omega \quad \text{per} \quad \omega \gg \frac{\mu v_0^3}{\alpha}\,, \tag{70,25}$$

che decresce esponenzialmente al crescere della frequenza.

PROBLEMI

1. Determinare l'intensità totale media della radiazione emessa da due cariche che si attraggono compiendo un moto ellittico.

Soluzione. Usando l'espressione (70,1) del momento dipolare, per l'intensità totale della radiazione si ottiene:

$$I = \frac{2\mu^2}{3c^3}\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2 \ddot{\mathbf{r}}^2 = \frac{2\alpha^2}{3c^3}\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2 \frac{1}{r^4}\,,$$

dove abbiamo utilizzato l'equazione del moto $\mu\ddot{\mathbf{r}} = -\alpha\mathbf{r}/r^3$. Esprimiamo la coordinata r in funzione di φ in base all'equazione dell'orbita (70,2) e sostituiamo l'integrazione rispetto al tempo con l'integrazione rispetto all'angolo φ (da 0 a 2π) con l'aiuto dell'uguaglianza $dt = \mu r^2 d\varphi/M$.

Per l'intensità media troviamo in definitiva:

$$\bar{I} = \frac{1}{T}\int_0^T I\, dt = \frac{2^{3/2}}{3c^3}\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2 \frac{\mu^{5/2}\alpha^3 |\mathscr{E}|^{3/2}}{M^5}\left(3 - \frac{2|\mathscr{E}|M^2}{\mu\alpha^2}\right).$$

2. Determinare la radiazione totale $\Delta\mathscr{E}$ generata dall'urto di due particelle cariche.

Soluzione. Nel caso dell'attrazione la traiettoria è l'iperbole (70,11), e nel caso di repulsione, l'iperbole (70,23). Gli asintoti dell'iperbole formano con il suo asse l'angolo φ_0 determinato da $\pm\cos\varphi_0 = 1/\varepsilon$, e l'angolo di deviazione delle particelle (nel sistema del centro di massa è $\chi = |\pi - 2\varphi_0|$. Il calcolo si effettua come per il problema 1 (l'integrale in $d\varphi$ viene preso tra $-\varphi_0$ e φ_0). Per il caso dell'attrazione troviamo in definitiva:

$$\Delta\mathscr{E} = \frac{\mu^3 v_0^5}{3c^3\alpha}\,\mathrm{tg}^3\frac{\chi}{2}\left[(\pi+\chi)\left(1+3\,\mathrm{tg}^2\frac{\chi}{2}\right)+6\,\mathrm{tg}\frac{\chi}{2}\right]\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2,$$

e per il caso di repulsione:

$$\Delta\mathscr{E} = \frac{\mu^3 v_0^5}{3c^3\alpha}\,\mathrm{tg}^3\frac{\chi}{2}\left[(\pi-\chi)\left(1+3\,\mathrm{tg}^2\frac{\chi}{2}\right)-6\,\mathrm{tg}\frac{\chi}{2}\right]\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2.$$

In ambedue i casi con χ s'intende l'angolo positivo determinato dalla relazione

$$\mathrm{ctg}\frac{\chi}{2} = \frac{\mu v_0^2\rho}{\alpha}.$$

Nell'urto frontale di cariche repulsive il passaggio al limite $\rho \to 0$, $\chi \to \pi$ dà:

$$\Delta\mathscr{E} = \frac{8\mu^3 v_0^5}{45c^3\alpha}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2.$$

3. Determinare l'irraggiamento efficace totale per la diffusione di un fascio di particelle in un campo coulombiano di repulsione.

Soluzione. La grandezza cercata è

$$\varkappa = \int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty I\,dt\cdot 2\pi\rho\,d\rho = \frac{2\alpha^2}{3c^3}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2 2\pi\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{r^4}\,dt\cdot\rho\,d\rho.$$

Sostituiamo l'integrazione rispetto al tempo con l'integrazione in dr lungo la traiettoria della carica, scrivendo $dt = dr/v_r$, dove $v_r = \dot{r}$ è la velocità radiale espressa in funzione di r secondo la formula

$$v_r = \sqrt{\frac{2}{\mu}\left[\mathscr{E}-\frac{M^2}{2\mu r^2}-U(r)\right]} = \sqrt{v_0^2-\frac{\rho^2 v_0^2}{r^2}-\frac{2\alpha}{\mu r}}.$$

L'integrazione in dr viene effettuata tra l'infinito e la distanza piú vicina al centro $r_0 = r_0(\rho)$ (il punto dove $v_r = 0$), e poi nuovamente da r_0 all'infinito; ciò conduce ad un integrale doppio da r_0 a ∞. Questo integrale si calcola piú facilmente cambiando l'ordine d'integrazione e integrando quindi prima in $d\rho$ e poi in dr. Otteniamo in definitiva:

$$\varkappa = \frac{8\pi}{9}\frac{\alpha\mu v_0}{c^3}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2.$$

4. Determinare la distribuzione angolare della radiazione totale nel caso di diffusione di una carica da un'altra carica; la velocità della particella incidente si suppone molto grande (sebbene inferiore alla velocità della luce), cosicché si può considerare piccola la deviazione dal moto rettilineo.

Soluzione. L'angolo di diffusione è piccolo, qualora l'energia cinetica $\mu v^2/2$ sia grande rispetto all'energia potenziale, il cui ordine di grandezza è α/ρ ($\mu v^2 \gg \alpha/\rho$). Prendiamo il piano del moto per piano xy con l'origine delle coor-

dinate nel centro di massa e con l'asse delle x diretto lungo la velocità. In prima approssimazione, la traiettoria è la retta $x = vt$, $y = \rho$. In seconda approssimazione, le equazioni del moto danno:

$$\mu\ddot{x} = \frac{\alpha}{r^2}\frac{x}{r} \approx \frac{\alpha v t}{r^3}, \quad \mu\ddot{y} = \frac{\alpha}{r^2}\frac{y}{r} \approx \frac{\alpha\rho}{r^3},$$

dove

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \approx \sqrt{\rho^2+v^2t^2}.$$

In virtú della formula (67,7), abbiamo:

$$d\mathscr{E}_{\mathbf{n}} = do\frac{\mu^2}{4\pi c^3}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} [\ddot{x}^2+\ddot{y}^2-(\ddot{x}n_x+\ddot{y}n_y)^2]\,dt,$$

pove $\mathbf{n}$ è il versore relativo all'angolo solido do. Esprimendo la funzione integranda mediante t ed effettuando l'integrazione, otteniamo

$$d\mathscr{E}_{\mathbf{n}} = \frac{\alpha^2}{32vc^3\rho^3}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2 (4-n_x^2-3n_y^2)\,do.$$

§ 71. *Radiazione di quadrupolo e di dipolo magnetico*

Esaminiamo ora la radiazione dovuta ai termini successivi dello sviluppo del potenziale vettore in serie di potenze di a/λ che rappresenta il rapporto fra le dimensioni del sistema e la lunghezza d'onda, rapporto che, come precedentemente, si suppone piccolo. Sebbene questi termini siano generalmente piccoli rispetto al primo (termine di dipolo), essi diventano sostanziali nei casi in cui il momento di dipolo del sistema è nullo, e quindi non esiste la radiazione di dipolo.

Sviluppando nella (66,2)

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0}\int \mathbf{j}_{t'+\mathbf{rn}/c}\,dV$$

l'espressione integranda in serie di potenze di $\mathbf{rn}/c$ e conservando ora i primi due termini, troviamo:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0}\int \mathbf{j}_{t'}\,dV + \frac{1}{c^2R_0}\frac{\partial}{\partial t'}\int (\mathbf{rn})\,\mathbf{j}_{t'}\,dV.$$

Sostituendovi $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$ e passando alle cariche puntiformi, otteniamo:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0}\sum e\mathbf{v} + \frac{1}{c^2R_0}\frac{\partial}{\partial t}\sum e\mathbf{v}\,(\mathbf{rn}). \tag{71,1}$$

Per brevità (come nel § 67), ometteremo l'indice t' in tutte le grandezze del secondo membro di questa uguaglianza.

Scriviamo nel secondo termine

$$\mathbf{v}\,(\mathbf{rn}) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}\,(\mathbf{nr}) + \frac{1}{2}\mathbf{v}\,(\mathbf{nr}) - \frac{1}{2}\mathbf{r}\,(\mathbf{nv}) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}\,(\mathbf{nr}) + \frac{1}{2}[[\mathbf{rv}]\,\mathbf{n}].$$

Troviamo allora per **A** l'espressione

$$\mathbf{A}=\frac{\dot{\mathbf{d}}}{cR_0}+\frac{1}{2c^2R_0}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\sum e\mathbf{r}(\mathbf{nr})+\frac{1}{cR_0}[\dot{\mathfrak{m}}\mathbf{n}], \tag{71,2}$$

dove **d** è il momento di dipolo del sistema, ed $\mathfrak{m}=\frac{1}{2c}\sum e[\mathbf{rv}]$ il suo momento magnetico. Per continuare la trasformazione, notiamo che ad **A** si può aggiungere, senza cambiare il campo, un vettore qualsiasi proporzionale ad **n**; i campi **E** ed **H** in virtú delle formule (66,3) non cambieranno. In luogo della (71,2) si può quindi scrivere

$$\mathbf{A}=\frac{\dot{\mathbf{d}}}{cR_0}+\frac{1}{6c^2R_0}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\sum e[3\mathbf{r}(\mathbf{nr})-\mathbf{n}r^2]+\frac{1}{cR_0}[\dot{\mathfrak{m}}\mathbf{n}].$$

L'espressione sotto il segno $\partial^2/\partial t^2$ è il prodotto $n_\beta D_{\alpha\beta}$ del vettore **n** per il tensore del momento di quadrupolo $D_{\alpha\beta}=\sum e(3x_\alpha x_\beta-\delta_{\alpha\beta}r^2)$ (vedi § 41). Introducendo il vettore **D** di componenti $D_\alpha=D_{\alpha\beta}n_\beta$, troviamo l'espressione definitiva del potenziale vettore:

$$\mathbf{A}=\frac{\dot{\mathbf{d}}}{cR_0}+\frac{1}{6c^2R_0}\ddot{\mathbf{D}}+\frac{1}{cR_0}[\dot{\mathfrak{m}}\mathbf{n}]. \tag{71,3}$$

Conoscendo **A**, si possono ora determinare i campi **H** ed **E** con l'aiuto delle formule generali (66,3):

$$\begin{aligned}\mathbf{H}&=\frac{1}{c^2R_0}\left\{[\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}]+\frac{1}{6c}[\dddot{\mathbf{D}}\mathbf{n}]+[[\ddot{\mathfrak{m}}\mathbf{n}]\mathbf{n}]\right\},\\ \mathbf{E}&=\frac{1}{c^2R_0}\left\{[[\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}]\mathbf{n}]+\frac{1}{6c}[[\dddot{\mathbf{D}}\mathbf{n}]\mathbf{n}]+[\mathbf{n}\ddot{\mathfrak{m}}]\right\}.\end{aligned} \tag{71,4}$$

L'intensità dI della radiazione nell'angolo solido do è determinata conformemente alla (66,6). Determiniamo ora la radiazione totale, cioè l'energia irraggiata dal sistema nell'unità di tempo in tutte le direzioni. A questo scopo, prendiamo la media di dI relativa a tutte le direzioni di **n**; la radiazione totale è uguale al prodotto per 4π di questa media. Quando si prende la media del quadrato del campo magnetico, tutti i prodotti misti tra il primo, il secondo e il terzo termine in **H** si annullano, in modo che restano solamente le medie quadratiche di ciascuno di essi. Dopo calcoli non complicati[1]) per I si ottiene l'espressione:

$$I=\frac{2}{3c^3}\ddot{\mathbf{d}}^2+\frac{1}{180c^5}\dddot{D}^2_{\alpha\beta}+\frac{2}{3c^3}\ddot{\mathfrak{m}}^2. \tag{71,5}$$

---

[1]) Indichiamo un metodo comodo che permette di calcolare la media dei prodotti delle componenti di un vettore unitario. Il tensore $\overline{n_\alpha n_\beta}$, che è simmetrico, può essere espresso solamente in funzione del tensore unitario $\delta_{\alpha\beta}$. Tenendo anche presente che la sua traccia è uguale ad 1, abbiamo:

$$\overline{n_\alpha n_\beta}=\frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}.$$

In tal modo, la radiazione totale è composta di tre parti indipendenti, dette rispettivamente radiazione *di dipolo*, *di quadrupolo* e *di dipolo magnetico*.

Notiamo che la radiazione di dipolo magnetico manca praticamente in molti casi. Cosí, essa non compare in un sistema in cui il rapporto fra carica e massa è lo stesso per tutte le particelle in moto (in questo caso, manca persino la radiazione di dipolo, come è stato notato nel § 67). In effetti, il momento magnetico di un tale sistema è proporzionale al momento angolare meccanico (vedi § 44), e perciò, in virtú della legge di conservazione di quest'ultimo, $\dot{\mathfrak{m}} = 0$. Per la stessa ragione (vedi problema del § 44), la radiazione di dipolo magnetico manca in qualsiasi sistema composto soltanto di due particelle (cosa che, invece, non si può dire della radiazione di dipolo).

PROBLEMI

1. Calcolare l'irraggiamento efficace totale nella diffusione di un flusso di particelle cariche da particelle identiche.

Soluzione. La radiazione di dipolo (come anche quella di dipolo magnetico) non viene emessa quando si urtano particelle identiche, cosicché bisogna calcolare la radiazione di quadrupolo. Il tensore momento di quadrupolo di un sistema di due particelle identiche (rispetto al loro centro di massa) è:

$$D_{\alpha\beta} = \frac{e}{2}(3x_\alpha x_\beta - r^2\delta_{\alpha\beta}),$$

dove x_α sono le componenti del raggio vettore r tra le particelle. Dopo aver derivato tre volte $D_{\alpha\beta}$ esprimiamo le derivate prima, seconda e terza delle coordinate x_α rispetto al tempo in funzione della velocità relativa v_α delle particelle come segue:

$$\dot{x}_\alpha = v_\alpha, \quad \mu\ddot{x}_\alpha = \frac{m}{2}\ddot{x}_\alpha = \frac{e^2 x_\alpha}{r^3}, \quad \frac{m}{2}\dddot{x}_\alpha = e^2\frac{v_\alpha r - 3x_\alpha v_r}{r^4},$$

dove $v_r = \mathbf{v}\mathbf{r}/r$ è la componente radiale della velocità (la seconda uguaglianza è l'equazione del moto della carica, e la terza si ottiene derivando la seconda). Calcolando, si ottiene per l'intensità la seguente espressione:

$$I = \frac{1}{180c^5}\dddot{D}^2_{\alpha\beta} = \frac{2e^6}{15m^2c^5}\frac{1}{r^4}(v^2 + 11v_\varphi^2)$$

($v^2 = v_r^2 + v_\varphi^2$); esprimiamo v e v_φ in funzione di r con l'aiuto delle uguaglianze

$$v^2 = v_0^2 - \frac{4e^2}{mr}, \quad v_\varphi = \frac{\rho v_0}{r}.$$

Per quanto concerne la media del prodotto delle quattro componenti, essa è uguale a:

$$\overline{n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\delta} = \frac{1}{15}(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}).$$

Il secondo membro di questa uguaglianza è composto di tensori unitari che formano un tensore di rango quattro, simmetrico rispetto a tutti gli indici; il coefficiente generale sarà determinato poi mediante la contrazione di due coppie di indici, che dovrà dare in definitiva 1.

Sostituiamo l'integrazione rispetto al tempo con l'integrazione in dr, come abbiamo fatto nel problema 3 del § 70, scriviamo cioé:

$$dt = \frac{dr}{v_r} = \frac{dr}{\sqrt{v_0^2 - \frac{\rho^2 v_0^2}{r^2} - \frac{4e^2}{mr}}}.$$

Nell'integrale doppio (in dr e $d\rho$) integriamo dapprima rispetto a $d\rho$ e poi a dr. Si ottiene, in definitiva, il risultato:

$$\varkappa = \frac{4\pi}{9} \frac{e^4 v_0^3}{mc^5}.$$

2. Determinare la forza di rinculo agente su un sistema irraggiante di particelle in moto stazionario finito.

Soluzione. La forza cercata F viene calcolata come la perdita dell'impulso del sistema nell'unità di tempo, cioè come il flusso dell'impulso portato via dalle onde elettromagnetiche emesse dal sistema:

$$F_\alpha = -\oint \sigma_{\alpha\beta}\, df_\beta = -\int \sigma_{\alpha\beta} n_\beta R_0^2\, do;$$

l'integrazione è estesa ad una superficie sferica di grande raggio R_0. Il tensore elettromagnetico è dato dalla formula (33,3), e i campi **E** ed **H** sono ricavati dalla (71,4). Essendo questi campi trasversali, l'integrale si riduce a

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{8\pi} \int 2H^2 \mathbf{n} R_0^2\, do.$$

Si prende la media nelle direzioni di **n** con l'aiuto delle formule riportate nella nota alla pag. 250 (i prodotti di un numero dispari di componenti di **n** si annullano). Otteniamo in definitiva[1]):

$$F_\alpha = -\frac{1}{c^4} \left\{ \frac{1}{15c} \dddot{D}_{\alpha\beta} \ddot{d}_\beta + \frac{2}{3} [\dddot{\mathbf{d}}\, \ddot{\mathbf{m}}]_\alpha \right\}.$$

§ 72. *Campo di radiazione a piccole distanze*

Le formule della radiazione di dipolo sono state stabilite per il campo a distanze grandi rispetto alla lunghezza d'onda (e a maggior regione rispetto alle dimensioni del sistema irraggiante). In questo paragrafo, supporremo sempre che la lunghezza d'onda sia grande rispetto alle dimensioni del sistema, ma studieremo il campo a distanze che, pur essendo grandi rispetto alle dimensioni del sistema, sono però comparabili alla lunghezza d'onda.

La formula (67,4) per il potenziale vettore

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0} \dot{\mathbf{d}} \tag{72,1}$$

---

[1]) Notiamo che questa forza è di ordine piú elevato in $1/c$ rispetto alle forze d'attrito di Lorentz (§ 75). Quest'ultime non danno nessun contributo alla forza totale di rinculo: la somma delle forze (75,5) agenti sulle particelle di un sistema elettricamente neutro è nulla.

resta valida come precedentemente, poiché nella deduzione abbiamo supposto grande solo R_0 rispetto alle dimensioni del sistema. Non è piú possibile però considerare il campo, persino in regioni piccole, come un'onda piana. Ne segue che le formule (67,5) e (67,6) non sono piú applicabili ai campi elettrico e magnetico, e per calcolare quest'ultimi bisogna determinare preliminarmente sia **A** che φ.

Quanto alla formula del potenziale scalare, essa può essere dedotta direttamente dall'espressione di **A** con l'aiuto della condizione generale (62,1)

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0,$$

imposta sui potenziali. Sostituendo in essa la (72,1) ed integrando rispetto al tempo, troviamo:

$$\varphi = -\operatorname{div} \frac{\mathbf{d}}{R_0}. \tag{72,2}$$

Non scriviamo la costante d'integrazione (funzione arbitraria delle coordinate), perché ci interessa soltanto la parte variabile del potenziale. Ricordiamo che nella formula (72,2), come anche nella (72,1), il valore di **d** deve essere preso nell'istante $t' = t - R_0/c$[1]).

A questo punto non è piú difficile calcolare i campi elettrico e magnetico. Le formule ordinarie che legano **E** ed **H** ai potenziali ci permettono di trovare:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c} \operatorname{rot} \frac{\dot{\mathbf{d}}}{R_0}, \tag{72,3}$$

$$\mathbf{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \frac{\mathbf{d}}{R_0} - \frac{1}{c^2}\frac{\ddot{\mathbf{d}}}{R_0}. \tag{72,4}$$

L'espressione per **E** può essere scritta in un'altra forma, notando che $d_{t'}/R_0$ come qualsiasi funzione delle coordinate e del tempo tipo

$$\frac{1}{R_0} f\left(t - \frac{R_0}{c}\right),$$

soddisfa l'equazione d'onda

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\mathbf{d}}{R_0} = \Delta \frac{\mathbf{d}}{R_0}.$$

---

[1]) Si introduce talvolta il cosiddetto vettore di Hertz, definito come

$$\mathbf{Z} = -\frac{1}{R_0}\mathbf{d}\left(t - \frac{R_0}{c}\right).$$

Allora

$$\mathbf{A} = -\frac{1}{c}\dot{\mathbf{Z}}, \quad \varphi = \operatorname{div} \mathbf{Z}.$$

Utilizzando inoltre la nota formula

$$\text{rot rot } \mathbf{a} = \text{grad div } \mathbf{a} - \Delta \mathbf{a},$$

troviamo che

$$\mathbf{E} = \text{rot rot } \frac{\mathbf{d}}{R_0}. \tag{72,5}$$

Le formule ottenute determinano il campo a distanze comparabili alla lunghezza d'onda. In tutte queste formule, non si può naturalmente portare $1/R_0$ fuori dal segno di derivazione rispetto alle coordinate, perché il rapporto fra i termini contenenti $1/R_0^2$ e i termini in $1/R_0$ è appunto dell'ordine di λ/R_0.

Scriviamo infine le formule per le componenti di Fourier del campo. Per determinare $\mathbf{H}_\omega$, sostituiamo nella formula (72,3) $\mathbf{H}$ e $\mathbf{d}$ con le loro componenti monocromatiche, cioè, rispettivamente, $\mathbf{H}_\omega e^{-i\omega t}$ e $\mathbf{d}_\omega e^{-i\omega t}$. Bisogna ricordare tuttavia che le grandezze dei secondi membri delle uguaglianze (72,1—5) sono prese nell'istante $t' = t - R_0/c$. Dobbiamo quindi scrivere per $\mathbf{d}$ l'espressione

$$\mathbf{d}_\omega e^{-i\omega(t-R_0/c)} = \mathbf{d}_\omega e^{-i\omega t + ikR_0}.$$

Sostituendo questa espressione e dividendo per $e^{-i\omega t}$, troviamo:

$$\mathbf{H}_\omega = -ik \,\text{rot}\left(\mathbf{d}_\omega \frac{e^{ikR_0}}{R_0}\right) = ik\left[\mathbf{d}_\omega \nabla \frac{e^{ikR_0}}{R_0}\right],$$

oppure, dopo aver derivato:

$$\mathbf{H}_\omega = ik\,[\mathbf{d}_\omega \mathbf{n}]\left(\frac{ik}{R_0} - \frac{1}{R_0^2}\right) e^{ikR_0}, \tag{72,6}$$

dove $\mathbf{n}$ è il versore di $\mathbf{R}_0$.

Analogamente dalla (72,4) ricaviamo:

$$\mathbf{E}_\omega = k^2 \mathbf{d}_\omega \frac{e^{ikR_0}}{R_0} + (\mathbf{d}_\omega \nabla)\nabla \frac{e^{ikR_0}}{R_0},$$

oppure, dopo aver derivato

$$\mathbf{E}_\omega = \mathbf{d}_\omega\left(\frac{k^2}{R_0} + \frac{ik}{R_0^2} - \frac{1}{R_0^3}\right) e^{ikR_0} + \mathbf{n}\,(\mathbf{n}\mathbf{d}_\omega)\left(-\frac{k^2}{R_0} - \frac{3ik}{R_0^2} + \frac{3}{R_0^3}\right) e^{ikR_0}. \tag{72,7}$$

A distanze grandi rispetto alla lunghezza d'onda ($kR_0 \gg 1$) si possono trascurare nelle formule (72,6) e (72,7) i termini contenenti $1/R_0^2$ e $1/R_0^3$, e si ritorna alla formula del campo della « zona delle onde »:

$$\mathbf{E}_\omega = \frac{k^2}{R_0}[\mathbf{n}\,[\mathbf{d}_\omega \mathbf{n}]]\, e^{ikR_0}, \quad \mathbf{H}_\omega = -\frac{k^2}{R_0}[\mathbf{d}_\omega \mathbf{n}]\, e^{ikR_0}.$$

Per distanze piccole rispetto alla lunghezza d'onda ($kR_0 \ll 1$), trascurando i termini contenenti $1/R_0$ ed $1/R_0^2$ e ponendo $e^{ikR_0} \approx 1$,

otteniamo

$$\mathbf{E}_\omega = \frac{1}{R_0^3}\{3\mathbf{n}(\mathbf{d}_\omega\mathbf{n}) - \mathbf{d}_\omega\},$$

espressione che descrive il campo elettrostatico di dipolo (§ 40); è ovvio che in questa approssimazione il campo magnetico non esiste.

PROBLEMI

1. Determinare i potenziali del campo di radiazione di quadrupolo e di dipolo magnetico a piccole distanze.

Soluzione. Supponendo per brevità che la radiazione di dipolo manchi completamente, abbiamo (cfr. calcoli fatti nel § 71):

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c}\int \mathbf{j}_{t-R/c}\frac{dV}{R} \approx -\frac{1}{c}\int (\mathbf{r}\nabla)\frac{\dot{\mathbf{j}}_{t-R_0/c}}{R_0}\,dV,$$

dove lo sviluppo dell'espressione integranda è fatto in serie di potenze di $\mathbf{r} = \mathbf{R}_0 - \mathbf{R}$. Contrariamente a quanto abbiamo fatto nel § 71, il fattore $1/R_0$ non può essere portato fuori dal segno di derivata. Portiamo quest'ultimo fuori dal segno d'integrazione e scriviamo la formula in notazioni tensoriali:

$$A_\alpha = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial X_\beta}\int \frac{x_\beta \dot{j}_\alpha}{R_0}\,dV$$

(X_β sono le componenti del raggio vettore $\mathbf{R}_0$). Passando dall'integrale ad una somma estesa alle cariche, troviamo:

$$A_\alpha = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial X_\beta}\frac{\left(\sum e v_\alpha x_\beta\right)_{t'}}{R_0}.$$

Procedendo come nel § 71, dividiamo questa espressione in termini di quadrupolo e di dipolo magnetico. I potenziali scalari corrispondenti si calcolano per mezzo del potenziale vettore come nel testo. Per la radiazione di quadrupolo polare otteniamo in definitiva:

$$A_\alpha = -\frac{1}{6c}\frac{\partial}{\partial X_\beta}\frac{\dot{D}_{\alpha\beta}}{R_0}, \quad \varphi = \frac{1}{6}\frac{\partial^2}{\partial X_\alpha\,\partial X_\beta}\frac{D_{\alpha\beta}}{R_0},$$

e per la radiazione di dipolo magnetico:

$$\mathbf{A} = \operatorname{rot}\frac{\mathbf{m}}{R_0}, \quad \varphi = 0$$

(tutte le grandezze nei secondi membri delle uguaglianze sono prese, come sempre, nell'istante $t' = t - R_0/c$).

I vettori campo elettrico e magnetico della radiazione di dipolo magnetico sono:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\operatorname{rot}\frac{\dot{\mathbf{m}}}{R_0}, \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\frac{\mathbf{m}}{R_0}.$$

Confrontando con la (72,3) e la (72,4) vediamo che $\mathbf{H}$ ed $\mathbf{E}$ nel caso di dipolo magnetico si esprimono attraverso $\mathbf{m}$, allo stesso modo come nel caso del dipolo elettrico $\mathbf{E}$ e $-\mathbf{H}$ si esprimono attraverso $\mathbf{d}$.

Le componenti spettrali dei potenziali della radiazione di quadrupolo sono:

$$A_\alpha^{(\omega)} = \frac{ik}{6} D_{\alpha\beta}^{(\omega)} \frac{\partial}{\partial X_\beta} \frac{e^{ikR_0}}{R_0}, \qquad \phi^{(\omega)} = \frac{1}{6} D_{\alpha\beta}^{(\omega)} \frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \frac{e^{ikR_0}}{R_0}.$$

Non riportiamo qui le espressioni del campo, in quanto sono complicate.

2. Calcolare la velocità di perdita del momento angolare da parte di un sistema di cariche che emette una radiazione di dipolo elettromagnetica.

Soluzione. Secondo la (32,9), la denstià del flusso del momento angolare di un campo elettromagnetico è data dalle componenti spaziali del 4-tensore $x^i T^{kl} - x^k T^{il}$. Passando alle notazioni tridimensionali, introduciamo il vettore tridimensionale del momento angolare di componenti $\frac{1}{2} e_{\alpha\beta\gamma} M^{\beta\gamma}$; la densità del suo flusso è data dal tensore tridimensionale

$$\frac{1}{2} e_{\alpha\beta\gamma} (x_\beta \sigma_{\gamma\delta} - x_\gamma \sigma_{\beta\delta}) = e_{\alpha\beta\gamma} x_\beta \sigma_{\gamma\delta},$$

dove $\sigma_{\alpha\beta} \equiv T^{\alpha\beta}$ è il tensore tridimensionale degli sforzi di Maxwell (tutti gli indici vengono messi in basso conformemente alle notazioni tridimensionali). Il momento angolare totale, perduto dal sistema nell'unità di tempo, è uguale al flusso del momento angolare del campo di radiazione attraverso una superficie sferica di raggio R_0:

$$-\frac{dM_\alpha}{dt} = \oint e_{\alpha\beta\gamma} x_\beta \sigma_{\gamma\delta} n_\delta \, df,$$

dove $df = R_0^2 \, do$, ed $\mathbf{n}$ è il versore di $\mathbf{R}_0$. Utilizzando per il tensore $\sigma_{\alpha\beta}$ la formula (33,3), otteniamo

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \frac{R_0^2}{4\pi} \int \{[\mathbf{nE}](\mathbf{nE}) + [\mathbf{nH}](\mathbf{nH})\} \, do. \tag{1}$$

Applicando questa formula al campo di radiazione a grandi distanze dal sistema, non è però possibile limitarsi ai termini $\sim 1/R_0$: in questa approssimazione $\mathbf{nE} = \mathbf{nH} = 0$, e quindi l'espressione integranda si annulla. Questi termini, dati dalle formule (67,5) e (67,6), sono sufficienti solamente per calcolare i fattori $[\mathbf{nE}]$ e $[\mathbf{nH}]$; le componenti longitudinali dei campi $\mathbf{nE}$ ed $\mathbf{nH}$ sono date dai termini $\sim 1/R_0^2$ (l'espressione integranda nella (1) diventa, in definitiva, $\sim 1/R_0^2$, e la distanza R_0, come si doveva aspettare, non compare nel risultato). Nell'approssimazione dipolare per la lunghezza d'onda si ha $\lambda \gg a$, e bisogna perciò distinguere i termini contenenti (rispetto alla (67,5) e alla (67,6)) un fattore supplementare $\sim \lambda/R_0$, oppure $\sim a/R_0$: sarà sufficiente lasciare solo i primi. Sono proprio questi termini che si possono ricavare dalla (72,3) e dalla (72,5); il calcolo, a meno dei termini del secondo ordine di $1/R_0$, ci dà[1]):

$$\mathbf{En} = \frac{2}{cR_0^2} \mathbf{n}\dot{\mathbf{d}}, \quad \mathbf{Hn} = 0. \tag{2}$$

Sostituendo la (2) e la (67,6) nella (1), otteniamo:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -\frac{1}{2\pi c^3} \int [\mathbf{n}\ddot{\mathbf{d}}](\mathbf{n}\dot{\mathbf{d}}) \, do.$$

---

[1]) Un valore non nullo di $\mathbf{Hn}$ l'avremmo avuto soltanto tenendo conto dei termini d'ordine superiore di a/R_0.

Infine, scrivendo l'espressione integranda nella forma $e_{\alpha\beta\gamma}n_\beta\ddot{d}_\gamma n_\delta\dot{d}_\delta$ e prendendo la media rispetto alle direzioni di n, troviamo in definitiva:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -\frac{2}{3c^3}[\dot{\mathbf{d}}\,\ddot{\mathbf{d}}]. \tag{3}$$

Notiamo che per un oscillatore lineare ($\mathbf{d} = \mathbf{d}_0 \cos \omega t$ con ampiezza reale $\mathbf{d}_0$) l'espressione (3) è nulla: non c'è perdita di momento angolare nell'irraggiamento.

§ 73. *Radiazione emessa da una carica in moto rapido*

Consideriamo ora una particella carica che si muove con velocità non piccola rispetto alla velocità della luce.

Le formule del § 67, dedotte supponendo $v \ll c$, non sono direttamente applicabili a questo caso. Tuttavia, possiamo considerare la particella nel sistema di riferimento in cui si trova in quiete nell'istante dato; in questo sistema le formule menzionate sono evidentemente applicabili (notiamo che ciò è possibile soltanto nel caso di una sola particella in moto; per piú particelle, non esiste, in generale, un sistema di riferimento dove tutte esse siano contemporaneamente in quiete).

Cosí, nel sistema di riferimento indicato, la particella irraggia nel tempo dt l'energia

$$d\mathscr{E} = \frac{2e^2}{3c^3} w^2\, dt \tag{73,1}$$

(in base alla formula (67,9)), dove w è l'accelerazione della particella nello stesso sistema. Quanto all'impulso totale da essa irraggiato, esso, nel sistema considerato, sarà nullo:

$$d\mathbf{P} = 0 \tag{73,2}$$

Infatti, l'impulso irraggiato si determina come l'integrale della densità del flusso d'impulso nel campo di radiazione, preso su una superficie chiusa che racchiude la particella. In virtú delle proprietà di simmetria della radiazione di dipolo, gli impulsi emessi in direzioni opposte sono uguali in grandezza ed opposti in direzione; segue quindi che l'integrale indicato è identicamente nullo.

Per passare ad un sistema di riferimento arbitrario, scriviamo le formule (73,1) e (73,2) in notazioni quadridimensionali. È facile vedere che l'«irraggiamento di 4-impulso» dP^i deve essere scritto come segue:

$$dP^i = -\frac{2e^2}{3c}\frac{du^k}{ds}\frac{du_k}{ds}\,dx^i = -\frac{2e^2}{3c}\frac{du^k}{ds}\frac{du_k}{ds}\,u^i\,ds. \tag{73,3}$$

In effetti, nel sistema di riferimento dove la particella persevera in quiete, le componenti spaziali della 4-velocità u^i sono nulle,

e $\frac{du^k}{ds}\frac{du_k}{ds} = -\frac{w^2}{c^4}$; ne segue che le componenti spaziali di dP^i si annullano, mentre la componente temporale dà l'uguaglianza (73,1).

Il 4-impulso totale irraggiato durante il percorso della particella attraverso il campo elettromagnetico è pari all'integrale dell'espressione (73,3), cioè

$$\Delta P^i = -\frac{2e^2}{3c}\int \frac{du^k}{ds}\frac{du_k}{ds}\,dx^i. \tag{73,4}$$

Scriviamo questa espressione in un'altra forma, esprimendo la 4-accelerazione du^i/ds mediante il tensore del campo elettromagnetico esterno e servendoci delle equazioni del moto (23,4):

$$mc\frac{du_k}{ds} = \frac{e}{c}F_{kl}u^l.$$

Avremo allora

$$\Delta P^i = -\frac{2e^4}{3m^2c^5}\int (F_{kl}u^l)(F^{km}u_m)\,dx^i. \tag{73,5}$$

La componente temporale dell'equazione (73,4) o (73,5) dà l'energia totale irraggiata $\Delta\mathscr{E}$. Sostituendo alle grandezze quadridimensionali le loro espressioni mediante le grandezze tridimensionali, otteniamo:

$$\Delta\mathscr{E} = \frac{2e^2}{3c^3}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{w^2 - \frac{[\mathbf{vw}]^2}{c^2}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^3}\,dt \tag{73,6}$$

($\mathbf{w} = \mathbf{v}$ è l'accelerazione della particella), oppure, in funzione dei campi elettrico e magnetico esterni:

$$\Delta\mathscr{E} = \int_{-\infty}^{\infty} I\,dt, \quad I = \frac{2e^4}{3m^2c^3}\,\frac{\left\{\mathbf{E}+\frac{1}{c}[\mathbf{vH}]\right\}^2 - \frac{1}{c^2}(\mathbf{Ev})^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}. \tag{73,7}$$

Le espressioni dell'impulso totale irraggiato si distinguono per il fattore supplementare $\mathbf{v}$ sotto il segno d'integrazione.

Dalla formula (73,7) segue che, per velocità vicine alla velocità della luce, la radiazione totale nell'unità di tempo dipende dalla velocità essenzialmente come $(1 - v^2/c^2)^{-1}$, cioè è proporzionale al quadrato del l'energia della particella in moto. Presenta un'eccezione soltanto il caso in cui il moto in un campo elettrico è parallelo alla direzione del campo. In questo caso, il fattore $(1 - v^2/c^2)$ che si trova al denominatore si divide per lo stesso fattore del numeratore, e la radiazione risulta indipendente dall'energia della particella.

Infine, analizziamo il problema della distribuzione angolare della radiazione emessa da una particella in moto rapido. Per risolvere

questo problema, è opportuno ricorrere all'espressione di Lienard-Wiechert (63,8) e (63,9) per il campo. A grandi distanze, dobbiamo conservare in essa solamente il termine di grado piú basso in $1/R$ (il secondo termine della formula (63,8)). Introducendo il versore $\mathbf{n}$ della direzione della radiazione ($\mathbf{R} = \mathbf{n}R$), otteniamo le formule:

$$\mathbf{E} = \frac{e}{c^2 R} \frac{\left[\mathbf{n}\left[\left(\mathbf{n} - \frac{\mathbf{v}}{c}\right)\mathbf{w}\right]\right]}{\left(1 - \frac{\mathbf{nv}}{c}\right)^3}, \quad \mathbf{H} = [\mathbf{nE}], \tag{73,8}$$

dove tutte le grandezze nei secondi membri delle uguaglianze sono prese nell'istante ritardato $t' = t - R/c$.

L'intensità della radiazione nell'angolo solido do è $dI = \frac{c}{4\pi} E^2 R^2 o d$. Sviluppando il quadrato E^2, troviamo:

$$dI = \frac{e^2}{4\pi c^3} \left\{ \frac{2(\mathbf{nw})(\mathbf{vw})}{c\left(1 - \frac{\mathbf{vn}}{c}\right)^5} + \frac{\mathbf{w}^2}{\left(1 - \frac{\mathbf{vn}}{c}\right)^4} - \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(\mathbf{nw})^2}{\left(1 - \frac{\mathbf{vn}}{c}\right)^6} \right\} do. \tag{73,9}$$

Se invece si vuole determinare la distribuzione angolare della radiazione totale durante l'intero moto della carica, bisogna integrare l'intensità rispetto al tempo. È necessario intanto tener presente che l'espressione da integrare è una funzione di t'; perciò si deve scrivere

$$dt = \frac{\partial t}{\partial t'} dt' = \left(1 - \frac{\mathbf{nv}}{c}\right) dt' \tag{73,10}$$

(vedi la (63,6)) e quindi integrare direttamente rispetto a dt'. In tal modo, otteniamo la seguente espressione per la radiazione totale emessa nell'elemento d'angolo solido do:

$$d\mathscr{E}_{\mathbf{n}} = \frac{e^2}{4\pi c^3} do \int \left\{ \frac{2(\mathbf{nw})(\mathbf{vw})}{c\left(1 - \frac{\mathbf{vn}}{c}\right)^4} + \frac{\mathbf{w}^2}{\left(1 - \frac{\mathbf{vn}}{c}\right)^3} - \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(\mathbf{nw})^2}{\left(1 - \frac{\mathbf{vn}}{c}\right)^5} \right\} dt'. \tag{73,11}$$

Come si vede dalla (73,9), la distribuzione angolare della radiazione nel caso generale è assai complicata. Nel caso ultrarelativistico ($1 - v/c \ll 1$), questa distribuzione ha una particolarità caratteristica dovuta alla presenza di potenze elevate della differenza $1 - \mathbf{vn}/c$ ai denominatori dei diversi termini di questa espressione. In altri termini, l'intensità è grande in un intervallo ristretto di angoli dove la differenza $1 - \mathbf{vn}/c$ è piccola. Indicando con θ l'an-

golo piccolo tra **n** e **v**, abbiamo:

$$1-\frac{v}{c}\cos\theta \approx 1-\frac{v}{c}+\frac{\theta^2}{2};$$

questa differenza è piccola ($\sim 1-v/c$) per $\theta \sim \sqrt{1-v/c}$ oppure, che è lo stesso,

$$\theta \sim \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \tag{73,12}$$

In tal modo, una particella ultrarelativistica irradia principalmente nella stessa direzione del suo moto nell'intervallo di angoli (73,12) intorno alla direzione della velocità.

Indichiamo ancora che per velocità e accelerazione della particella arbitrarie esistono sempre due direzioni dove l'intensità della radiazione si annulla. Tali sono le direzioni dove il vettore $\mathbf{n}-\mathbf{v}/c$ è parallelo al vettore **w** e, di conseguenza, il campo (73,8) si annulla (vedi anche problema 2 alla fine del paragrafo).

Scriviamo infine le formule piú semplici alle quali si riduce la (73,9) in due casi particolari.

Quando la velocità e l'accelerazione della particella sono parallele, si ha

$$\mathbf{H}=\frac{e}{c^2R}\frac{[\mathbf{wn}]}{\left(1-\frac{\mathbf{vn}}{c}\right)^3}$$

e per l'intensità

$$dI=\frac{e^2}{4\pi c^3}\frac{w^2\operatorname{sen}^2\theta}{\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)^6}do. \tag{73,13}$$

Essa è naturalmente simmetrica intorno alla direzione comune di **v** e **w** e si annulla nel senso della velocità ($\theta=0$) e nel senso opposto ($\theta=\pi$). Nel caso ultrarelativistico, l'intensità come funzione di θ ha due massimi pronunciati nella regione (73,12) con un « calo » sino a zero per $\theta=0$.

Quando invece la velocità e l'accelerazione sono perpendicolari, dalla (73,9) si ricava:

$$dI=\frac{e^2w^2}{4\pi c^3}\left[\frac{1}{\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)^4}-\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\varphi}{\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)^6}\right]do, \tag{73,14}$$

dove θ è, come precedentemente, l'angolo tra **n** e **v**, e φ l'azimut del vettore **n** relativamente al piano passante per **v** e **w**. Questa intensità è simmetrica soltanto rispetto al piano **vw** dove si annulla nelle due direzioni, che formano l'angolo $\theta=\arccos(v/c)$ con la velocità.

PROBLEMI

1. Determinare la radiazione totale emessa da una particella relativistica di carica e_1, di parametro d'urto ρ in un campo coulombiano di centro immobile (il potenziale $\varphi = e_2/r$).

Soluzione. Nell'attraversamento di un campo, una particella relativistica non viene quasi deviata[1]). Si potrà quindi nella (73,7) considerare costante la velocità e, di conseguenza, per il campo nel punto dove si trova la particella si avrà

$$\mathbf{E} = \frac{e_2\mathbf{r}}{r^3} \approx \frac{e_2\mathbf{r}}{(\rho^2+v^2t^2)^{3/2}},$$

con $x = vt$, $y = \rho$. Integrando nella (73,7) rispetto al tempo, avremo:

$$\Delta\mathscr{E} = \frac{\pi e_1^4 e_2^2}{12m^2c^3\rho^3 v}\,\frac{4c^2-v^2}{c^2-v^2}.$$

2. Determinare le direzioni nelle quali l'intensità della radiazione emessa da una particella in moto si annulla.

Soluzione. Dalla costruzione geometrica (fig. 15), risulta che le direzioni cercate **n** si trovano nel piano passante per **v** e **w** e che esse formano con la direzione **w** l'angolo χ determinato dalla relazione

$$\operatorname{sen}\chi = \frac{v}{c}\operatorname{sen}\alpha,$$

dove α è l'angolo tra **v** e **w**.

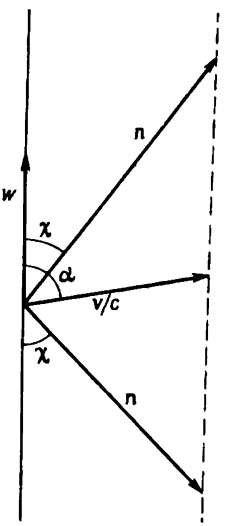

Fig. 15

3. Determinare l'intensità della radiazione emessa da una particella carica in moto stazionario nel campo di un'onda elettromagnetica piana polarizzata circolarmente.

Soluzione. Conformemente ai risultati del problema 3 nel § 48, la particella si muove su una circonferenza, e la sua velocità in ogni istante è parallela al campo **H** e perpendicolare al campo **E**. La sua energia cinetica è

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = c\sqrt{p^2+m^2c^2} = c\gamma$$

(le notazioni sono le stesse del problema indicato). La formula (73,7) ci permette di trovare l'intensità della radiazione:

$$I = \frac{2e^4}{3m^2c^3}\,\frac{\mathbf{E}^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{2e^4E_0^2}{3m^2c^3}\left[1+\left(\frac{eE_0}{mc\omega}\right)^2\right].$$

4. Risolvere il problema 3 per il campo di un'onda polarizzata linearmente.

Soluzione. Conformemente ai risultati del problema 2 nel § 48, il moto avviene nel piano xy passante per la direzione di propagazione dell'onda (l'asse delle x) e per la direzione del campo **E** (l'asse delle y); il campo **H** è diretto lungo

---

[1]) Quando $v \sim c$, una deviazione sotto un angolo sensibile può aver luogo solamente per parametri d'urto $\rho \sim e^2/mc^2$ che non permettono un esame classico.

l'asse delle z (dove $H_z = E_y$). La formula (73,7) ci dà:

$$I = \frac{2e^4\mathbf{E}^2}{3m^2c^3} \frac{\left(1 - \frac{v_x}{c}\right)^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Prendendo la media rispetto al periodo del moto dato dalla rappresentazione parametrica, ottenuta nel problema indicato, si ottiene:

$$\overline{I} = \frac{e^4E_0^2}{3m^2c^3}\left[1 + \frac{3}{8}\left(\frac{eE_0}{mc\omega}\right)^2\right].$$

§ 74. *Radiazione di frenamento in un campo magnetico*

Consideriamo la radiazione emessa da una carica che si muove a velocità arbitraria su una circonferenza in un campo magnetico iniforme costante; una tale radiazione è detta *radiazione di frenamento* in un campo magnetico.

Il raggio r dell'orbita e la frequenza ciclica ω_H del moto si esprimono mediante il vettore campo magnetico H e la velocità v della particella mediante le formule (vedi § 21):

$$r = \frac{mcv}{eH\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \omega_H = \frac{v}{r} = \frac{eH}{mc}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{74,1}$$

L'intensità totale della radiazione emessa in tutte le direzioni è determinata dalla formula (73,7) nella quale bisogna porre $\mathbf{E} = 0$ ed $\mathbf{H} \perp \mathbf{v}$:

$$I = \frac{2e^4H^2v^2}{3m^2c^5\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}. \tag{74,2}$$

Si vede che l'intensità totale è proporzionale al quadrato dell'impulso della particella.

Se invece ci interessa la distribuzione angolare della radiazione bisogna allora ricorrere alla formula (73,11). Una caratteristica interessante è data dall'intensità media rispetto ad un periodo del moto. Per calcolare questa grandezza integriamo la (73,11) rispetto al tempo corrispondente ad un giro della particella sulla circonferenza e dividiamo il risultato per il periodo $T = 2\pi/\omega_H$.

Scegliamo per piano xy il piano dell'orbita (e l'origine delle coordinate nel centro della circonferenza) ed orientiamo il piano yz nella direzione $\mathbf{k}$ della radiazione (fig. 16). Il campo magnetico sarà diretto lungo l'asse delle z negative (la direzione del moto della particella, rappresentata nella fig. 16, corrisponde alla carica e positiva). Inoltre, siano θ l'angolo tra la direzione $\mathbf{k}$ della radiazione e l'asse delle y e $\varphi = \omega_H t$ l'angolo tra il raggio vettore della particella

e l'asse delle x. Allora il coseno dell'angolo tra la direzione **k** e la velocità **v** è uguale a $\cos\theta\cos\varphi$ (il vettore **v** giace nel piano xy ed è perpendicolare in ogni istante al raggio vettore della particella).

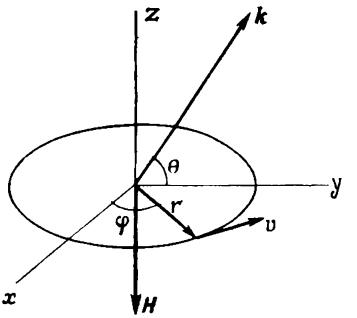

Fig. 16

Esprimiamo l'accelerazione **w** della particella in funzione del campo **H** e della velocità **v** usando l'equazione del moto [vedi la (21,1)]:

$$\mathbf{w} = \frac{e}{mc}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,[\mathbf{vH}].$$

Dopo un semplice calcolo otteniamo:

$$dI = do\,\frac{e^4H^2v^2}{8\pi^2m^2c^5}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\int_0^{2\pi}\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\operatorname{sen}^2\theta+\left(\frac{v}{c}-\cos\theta\cos\varphi\right)^2}{\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\cos\varphi\right)^5}\,d\varphi \tag{74,3}$$

(l'integrazione rispetto al tempo è stata sostituita con l'integrazione in $d\varphi = \omega_H dt$). Il processo d'integrazione è elementare, sebbene i calcoli siano laboriosi. Si ottiene, in definitiva, la seguente formula:

$$dI = do\,\frac{e^4H^2v^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{8\pi m^2c^5}\,\frac{\left[2-\cos^2\theta-\frac{v^2}{4c^2}\left(1+\frac{3v^2}{c^2}\right)\cos^4\theta\right]}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\cos^2\theta\right)^{7/2}}. \tag{74,4}$$

Il rapporto delle intensità di radiazione sotto l'angolo $\theta = \pi/2$ (perpendicolarmente al piano dell'orbita) e sotto l'angolo $\theta = 0$ (nel piano dell'orbita) è

$$\frac{(dI/do)_0}{(dI/do)_{\pi/2}} = \frac{4+3\frac{v^2}{c^2}}{8\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{5/2}}.$$

Allorché $v \to 0$, questo rapporto tende a 1/2, ma diventa molto grande quando le velocità si avvicinano alla velocità della luce. Torneremo su questo problema in seguito.

Consideriamo ora la distribuzione spettrale della radiazione. Essendo il moto della carica periodico, abbiamo il caso dello sviluppo in serie di Fourier. È comodo cominciare il calcolo dal potenziale vettore. Per la componente di Fourier del potenziale vettore si ha la formula (cfr. (66,12))

$$\mathbf{A}_n = e\,\frac{e^{ikR_0}}{eR_0T}\oint \exp\{i\,(\omega_H nt - \mathbf{kr})\}\,d\mathbf{r},$$

dove l'integrale è preso sulla traiettoria della particella (una circonferenza). Per le coordinate della particella abbiamo $x = r\cos\omega_H t$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\omega_H t$. Scegliamo per variabile d'integrazione l'angolo $\varphi = \omega_H t$. Notando che

$$\mathbf{kr} = kr\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi = \frac{nv}{c}\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi$$

($k = n\omega_H/c = nv/cr$), per la componente di Fourier della componente in x del potenziale vettore troviamo:

$$A_{xn} = -\frac{ev}{2\pi cR_0}\,e^{ikR_0}\int_0^{2\pi} e^{in\left(\varphi - \frac{v}{c}\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi\right)}\,\mathrm{sen}\,\varphi\,d\varphi.$$

Abbiamo già incontrato un tale integrale nel § 70. Esso si esprime mediante la derivata di una funzione di Bessel:

$$A_{xn} = -\frac{iev}{cR_0}\,e^{ikR_0}J'_n\left(\frac{nv}{c}\cos\theta\right). \tag{74,6}$$

Analogamente si calcola A_{yn}:

$$A_{yn} = \frac{e}{R_0\cos\theta}\,e^{ikR_0}J_n\left(\frac{nv}{c}\cos\theta\right). \tag{74,7}$$

Quanto alla componente sull'asse delle z, essa evidentemente non esiste.

In virtú delle formule del § 66, per l'intensità di radiazione di frequenza $\omega = n\omega_H$ nell'elemento di angolo solido do abbiamo:

$$dI_n = \frac{c}{2\pi}\,|\,\mathbf{H}_n\,|^2 R_0^2\,do = \frac{c}{2\pi}\,|\,[\mathbf{kA}_n]\,|^2 R_0^2\,do.$$

Notando che

$$|\,[\mathbf{Ak}]\,|^2 = A_x^2k^2 + A_y^2k^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta,$$

e sostituendo le espressioni (74,6) e (74,7), per l'intensità di radiazione avremo la seguente formula (*G. A. Schott*, 1912):

$$dI_n = \frac{n^2e^4H^2}{2\pi c^3m^2}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\left[\mathrm{tg}^2\,\theta\cdot J_n^2\left(\frac{nv}{c}\cos\theta\right) + \frac{v^2}{c^2}J_n'^2\left(\frac{nv}{c}\cos\theta\right)\right]do. \tag{74,8}$$

Per determinare l'intensità totale della radiazione di frequenza $\omega = n\omega_H$ in tutte le direzioni, è necessario integrare questa espressione rispetto a tutti gli angoli. L'integrazione non può essere fatta però in forma finita. Dopo una serie di trasformazioni, utilizzando alcune relazioni delle funzioni di Bessel, l'integrale cercato può essere ridotto alla forma seguente:

$$I_n = \frac{2e^4H^2}{m^2c^2v}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\left[n\frac{v^2}{c^2}J'_{2n}\left(\frac{2nv}{c}\right)-n^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\int_0^{v/c} J_{2n}(2n\xi)\,d\xi\right]. \tag{74,9}$$

Esaminiamo in dettaglio il caso ultrarelativistico in cui la velocità della particella è vicina alla velocità della luce.

Ponendo $v = c$ nel numeratore della formula (74,2), troviamo che l'intensità totale della radiazione di frenamento nel caso ultrarelativistico è proporzionale al quadrato dell'energia $\mathscr{E}$ della particella:

$$I = \frac{2e^4H^2}{3m^2c^3}\left(\frac{\mathscr{E}}{mc^2}\right)^2. \tag{74,10}$$

La distribuzione angolare della radiazione in questo caso è estremamente anisotropa. Essa è concentrata principalmente in prossimità del piano dell'orbita. L'intervallo angolare $\Delta\theta$ in cui è emessa gran parte della radiazione è facilmente determinabile dalla condizione $1-\frac{v^2}{c^2}\cos^2\theta \sim 1-\frac{v^2}{c^2}$. È ovvio che

$$\Delta\theta \sim \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{mc^2}{\mathscr{E}} \tag{74,11}$$

(questo risultato coincide naturalmente con la distribuzione angolare dell'intensità istantanea esaminata nel paragrafo precedente, vedi la (73,12)[1]).

Nel caso ultrarelativistico, assume una forma particolare anche la distribuzione spettrale della radiazione (*L. A. Arzimovič e I. J. Pomeranciuk*, 1945).

Vedremo piú avanti che in questo caso la parte principale della radiazione è di alta frequenza. Ciò premesso, si può ricorrere alla formula asintotica (70,9) che dà:

$$J_{2n}(2n\xi) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}\,n^{1/3}}\Phi\left[n^{2/3}(1-\xi^2)\right]. \tag{74,12}$$

---

[1]) Si badi a non confondere l'angolo θ di questo paragrafo con l'angolo θ tra **n** e **v** del § 73!.

Sostituendo nella (74,9), otteniamo la seguente formula per la distribuzione spettrale della radiazione per grandi n[1])

$$I_n = \frac{2e^4H^2}{\sqrt{\pi}\, m^2c^3} \frac{mc^2}{\mathscr{E}} \sqrt{u} \left[-\Phi'(u) - \frac{u}{2} \int_u^\infty \Phi(u)\, du \right], \qquad (74,13)$$

$$u = n^{2/3} \left(\frac{mc^2}{\mathscr{E}} \right)^2.$$

Allorché $u \to 0$, l'espressione tra parentesi quadre tende al limite costante $\Phi'(0) = -0,4587...$[2]). Per $u \ll 1$ abbiamo quindi:

$$I_n = 0,52 \frac{e^4H^2}{m^2c^3} \left(\frac{mc^2}{\mathscr{E}} \right)^2 n^{1/3}, \quad 1 \ll n \ll \left(\frac{\mathscr{E}}{mc^2} \right)^3. \qquad (74,14)$$

Se $u \gg 1$, si può ricorrere alla nota espressione asintotica della funzione di Airy (vedi nota alla pag. 201) ed ottenere:

$$I_n = \frac{e^4H^2 n^{1/2}}{2\sqrt{\pi}\, m^2c^3} \left(\frac{mc^2}{\mathscr{E}} \right)^{5/2} \exp\left[-\frac{2}{3} n \left(\frac{mc^2}{\mathscr{E}} \right)^3 \right], \quad n \gg \left(\frac{\mathscr{E}}{mc^2} \right)^3, \qquad (74,15)$$

cioè l'intensitá decresce esponenzialmente per n molto grandi.

La distribuzione spettrale ha dunque un massimo per $n \sim (\mathscr{E}/mc^2)^3$, e gran parte della radiazione è concentrata nella regione delle frequenze

$$\omega \sim \omega_H \left(\frac{\mathscr{E}}{mc^2} \right)^3 = \frac{eH}{mc} \left(\frac{\mathscr{E}}{mc^2} \right)^2. \qquad (74,16)$$

Queste frequenze sono molto grandi rispetto alla distanza ω_H tra due frequenze successive. In altri termini, lo spettro di radiazione ha un carattere « quasi continuo », essendo costituito da un numero molto grande di righe vicine. Si può allora, in luogo della funzione di distribuzione I_n, introdurre la distribuzione per un numero continuo di frequenze $\omega = n\omega_H$ e scrivere

$$dI = I_n\, dn = I_n \frac{d\omega}{\omega_H}.$$

---

[1]) Nella sostituzione, uno degli estremi d'integrazione ($n^{2/3}$) è stato sostituito con l'infinito, ed è stato posto, ove possibile, $v = c$. Sebbene nell'integrale (74,9) siano ugualmente presenti valori di ξ non vicini a 1, ciò nondimeno, l'utilizzazione della formula (74,12) è ammissibile, poiché l'integrale converge rapidamente nel suo estremo inferiore.

[2]) In virtú della definizione della funzione di Airy si ha:

$$\Phi'(0) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \xi \operatorname{sen} \frac{\xi^3}{3}\, d\xi = -\frac{1}{\sqrt{\pi} \cdot 3^{1/3}} \int_0^\infty x^{-1/3} \operatorname{sen} x\, dx = -\frac{3^{1/6}\Gamma(2/3)}{2\sqrt{\pi}}.$$

Per i calcoli numerici, è comodo esprimere questa distribuzione mediante le funzioni di MacDonald K_ν[1]). Questa distribuzione, dopo qualche trasformazione non complicata della formula (74,13), può essere rappresentata nel modo seguente:

$$dI = d\omega \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \frac{e^3 H}{mc^2} F\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right), \quad F(\xi) = \xi \int_\xi^\infty K_{5/3}(\xi)\, d\xi, \qquad (74,17)$$

dove è posto

$$\omega_c = \frac{3eH}{2mc}\left(\frac{\mathscr{E}}{mc^2}\right)^2. \qquad (74,18)$$

La figura 17 dà il grafico della funzione F (ξ).

Facciamo infine qualche osservazione per il caso in cui la particella si muove non su un'orbita piana, bensí su una traiettoria elicoidale, cioè con una componente longitudinale delle velocità

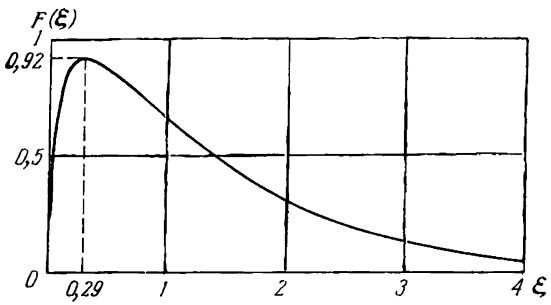

Fig. 17

(rispetto al campo) $v_{\parallel} = v \cos \chi$ (χ è l'angolo tra **H** e **v**). La frequenza del moto di rotazione è data dalla stessa formula (74,1), ma il vettore **v** descrive non un cerchio, bensí la superficie di un cono di asse diretto lungo **H** e di apertura pari a 2χ. L'intensità totale della radiazione (considerata come la perdita totale d'energia della particella in un secondo) si otterrà dalla (74,2) sostituendo H con $H_\perp = H \operatorname{sen} \chi$.

---

[1]) Il legame tra la funzione d'Airy e la funzione $K_{1/3}$ è dato dalla formula (4) riportata nella nota alla pag. 201. Per ulteriori trasformazioni si fa uso delle relazioni ricorrenti

$$K_{\nu-1}(x) - K_{\nu+1}(x) = -\frac{2\nu}{x} K_\nu, \quad 2K'_\nu(x) = -K_{\nu-1}(x) - K_{\nu+1}(x),$$

dove $K_{-\nu}(x) = K_\nu(x)$. In particolare, è facile trovare che

$$\Phi'(t) = -\frac{t}{\sqrt{3\pi}} K_{2/3}\left(\frac{2}{3} t^{3/2}\right).$$

Nel caso ultrarelativistico, la radiazione è concentrata nelle direzioni in prossimità delle generatrici del «cono delle velocità». La distribuzione spettrale e l'intensità totale (considerate nella stessa direzione) si ricavano dalla (74,17) e dalla (74,10) sostituendo $H \to H_\perp$. Se invece si tratta dell'intensità osservata nelle direzioni indicate da un osservatore immobile distante, bisogna allora introdurre un fattore che tenda conto dell'avvicinamento o dell'allontanamento generale della sorgente di radiazione (che si muove sul cerchio descritto dalla particella) dall'osservatore. Questo fattore è dato dal rapporto dt/dt_{oss}, dove dt_{oss} è l'intervallo di tempo tra gli arrivi all'osservatore dei segnali emessi dalla sorgente con l'intervallo dt. È evidente che

$$dt_{\text{oss}} = dt\left(1 - \frac{1}{c} v_{\parallel} \cos\vartheta\right),$$

dove ϑ è l'angolo tra le direzioni **k** ed **H** (quest'ultima è presa per la direzione positiva della velocità $v_{\parallel}$). Nel caso ultrarelativistico dove la direzione **k** è vicina alla direzione **v**, abbiamo $\vartheta \approx \chi$, in modo che

$$\frac{dt}{dt_{\text{oss}}} = \left(1 - \frac{v_{\parallel}}{c}\cos\chi\right)^{-1} \approx \frac{1}{\operatorname{sen}^2\chi}. \tag{74,19}$$

PROBLEMI

1. Determinare la legge di variazione dell'energia in funzione del tempo di una carica che descrive un'orbita circolare in un campo magnetico uniforme costante e perde energia per irraggiamento.

Soluzione. In base alla (74,2), per la perdita di energia nell'unità di tempo si ha:

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dt} = \frac{2e^4H^2}{3m^4c^7}(\mathscr{E}^2 - m^2c^4)$$

$\mathscr{E}$ è l'energia della particella). Da cui ricaviamo:

$$\frac{\mathscr{E}}{mc^2} = \operatorname{cth}\left(\frac{2e^4H^2}{3m^3c^5}t + \text{costante}\right).$$

Quando t cresce l'energia decresce in modo monotono e tende asintoticamente al valore $\mathscr{E} = mc^2$ (arresto totale della particella) per $t \to \infty$.

2. Trovare l'andamento asintotico per grandi n della distribuzione spettrale della radiazione per una particella che descrive una circonferenza a velocità non vicina alla velocità della luce.

Soluzione. Utilizziamo la nota formula della teoria delle funzioni di Bessel:

$$J_n(n\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\,(1-\varepsilon^2)^{1/4}}\left[\frac{\varepsilon}{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}\, e^{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right]^n,$$

valida per $n(1-\varepsilon^2)^{3/2} \gg 1$. Con l'aiuto di questa formula dalla (74,9) deduciamo:

$$I_n = \frac{e^4H^2\sqrt{n}}{2\sqrt{\pi}m^2c^3}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{5/4}\left[\frac{v/c}{1+\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\, e^{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right]^{2n}.$$

Questa formula è valida per $n\,(1 - v^2/c^2)^{3/2} \gg 1$; se, inoltre, $1 - v^2/c^2$ è piccola, la formula ottenuta si riduce alla (74,15).

3. Trovare la polarizzazione della radiazione emessa da una carica in campo magnetico.

Soluzione. Il campo elettrico $\mathbf{E}_n$ è calcolato a partire dal potenziale vettore $\mathbf{A}_n$ (74,6), (74,7) con l'aiuto della formula

$$\mathbf{E}_n = \frac{i}{k}\,[[\mathbf{k}\mathbf{A}_n]\,\mathbf{k}] = -\frac{i}{k}\,\mathbf{k}\,(\mathbf{k}\mathbf{A}_n) + ik\mathbf{A}_n.$$

Siano $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ i vettori unitari nel piano perpendicolare alla direzione $\mathbf{k}$, dove $\mathbf{e}_1$ è parallelo all'asse delle x, ed $\mathbf{e}_2$ giace nel piano yz (le loro componenti sono rispettivamente: $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, \operatorname{sen}\theta, -\cos\theta)$; i vettori $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{k}$ costituiscono una terna destrorsa. Allora il campo elettrico sarà:

$$\mathbf{E}_n = ikA_{xn}\mathbf{e}_1 + ik\operatorname{sen}\theta A_{yn}\mathbf{e}_2,$$

oppure, omettendo fattori inessenziali:

$$\mathbf{E}_n \backsim \frac{v}{c}\,J'_n\left(\frac{nv}{c}\cos\theta\right)\mathbf{e}_1 + \operatorname{tg}\theta J_n\left(\frac{nv}{c}\cos\theta\right) i\mathbf{e}_2.$$

L'onda è polarizzata ellitticamente (vedi § 48).

Nel caso ultrarelativistico, per n grandi e angoli θ piccoli, le funzioni J_n e J'_n si esprimono mediante $K_{1/3}$ e $K_{2/3}$, e ponendo, inoltre, nei loro argomenti

$$1 - \frac{v^2}{c^2}\cos^2\theta \approx 1 - \frac{v^2}{c^2} + \theta^2 = \left(\frac{mc^2}{\mathscr{E}}\right)^2 + \theta^2,$$

otteniamo in definitiva:

$$\mathbf{E}_n = \mathbf{e}_1\psi K_{2/3}\left(\frac{n}{3}\psi^3\right) + i\mathbf{e}_2\theta K_{1/3}\left(\frac{n}{3}\psi^3\right), \quad \psi = \sqrt{\left(\frac{mc^2}{\mathscr{E}}\right)^2 + \theta^2}.$$

Quando $\theta = 0$ la polarizzazione ellittica degenera in quella lineare lungo $\mathbf{e}_1$. Per angoli θ grandi ($|\,0\,| \gg mc^2/\mathscr{E}$, $n\theta^3 \gg 1$), abbiamo $K_{1/3}(x) \approx K_{2/3}(x) \approx \approx \sqrt{\pi/2x}\,e^{-x}$, e la polarizzazione tende a essere circolare: $\mathbf{E}_n \backsim \mathbf{e}_1 \pm i\mathbf{e}_2$; tuttavia, l'intensità di radiazione diventa allora esponenzialmente piccola. Nella regione angolare intermedia l'asse minore dell'ellisse è diretto lungo $\mathbf{e}_2$, l'asse maggiore lungo $\mathbf{e}_1$. Il senso della rotazione dipende dal segno dell'angolo θ ($\theta > 0$ se le direzioni $\mathbf{H}$ e $\mathbf{k}$ giacciono distinti rispetto al piano dell'orbita, come nella fig. 16).

§ 75. *Frenamento per emissione di radiazione*

Nel § 65 si è visto che lo sviluppo dei potenziali del campo di un sistema di cariche in serie di potenze di v/c conduce, in seconda approssimazione, alla lagrangiana che definisce completamente (in questa approssimazione) il moto delle cariche. Sviluppiamo ora il campo sino a termini d'ordine superiore e vediamo quali sono gli effetti da essi prodotti.

Nello sviluppo del potenziale scalare

$$\varphi = \int \frac{1}{R}\,\rho_{t-R/c}\,dV$$

il termine del terzo ordine in $1/c$ è:

$$\varphi^{(3)} = -\frac{1}{6c^3}\frac{\partial^3}{\partial t^3}\int R^2\rho\, dV. \tag{75,1}$$

Per le stesse ragioni, addotte nella deduzione della (65,3), nello sviluppo del potenziale vettore dobbiamo prendere solo il termine del secondo ordine in $1/c$, cioè

$$\mathbf{A}^{(2)} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{j}\, dV. \tag{75,2}$$

Facciamo la trasformazione dei potenziali:

$$\varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}, \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad} f,$$

scegliendo la funzione f in modo tale che il potenziale scalare $\varphi^{(3)}$ si annulli:

$$f = -\frac{1}{6c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int R^2\rho\, dV.$$

Il nuovo potenziale vettore sarà allora uguale a:

$$\mathbf{A}'^{(2)} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{j}dV - \frac{1}{6c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla\int R^2\rho\, dV =$$
$$= -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{j}\, dV - \frac{1}{3c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int \mathbf{R}\rho\, dV.$$

Passando qui dall'integrale alla somma sulle singole cariche, per il primo termine del secondo membro avremo l'espressione $-\frac{1}{c^2}\sum e\mathbf{v}$. Scriviamo nel secondo termine $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 - \mathbf{r}$, dove $\mathbf{R}_0$ ed $\mathbf{r}$ hanno il loro solito significato (vedi § 66); allora $\dot{\mathbf{R}} = -\dot{\mathbf{r}} = -\mathbf{v}$, e il secondo termine assume la forma $\frac{1}{3c^2}\sum e\dot{\mathbf{v}}$. Si ha cosí

$$\mathbf{A}'^{(2)} = -\frac{2}{3c^2}\sum e\dot{\mathbf{v}}. \tag{75,3}$$

Il campo magnetico corrispondente a questo potenziale è nullo ($\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}'^{(2)} = 0$), poiché $\mathbf{A}'^{(2)}$ non contiene esplicitamente le coordinate. Il campo elettrico $\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{A}}'^{(2)}/c$ è uguale a

$$\mathbf{E} = \frac{2}{3c^3}\dddot{\mathbf{d}}, \tag{75,4}$$

dove $\mathbf{d}$ è il momento di dipolo del sistema.

Vediamo quindi che i termini del terzo ordine nello sviluppo del campo fanno apparire forze supplementari agenti sulle cariche, che non sono presenti nella funzione di Lagrange (65,7); queste forze dipendono dalle derivate rispetto al tempo delle accelerazioni delle cariche.

Consideriamo un sistema di cariche in moto stazionario[1]) e calcoliamo il lavoro medio compiuto dal campo (75,4) nell'unità di tempo. Ciascuna carica e è sollecitata dalla forza $\mathbf{f} = e\mathbf{E}$, cioè

$$\mathbf{f} = \frac{2e}{3c^3}\dddot{\mathbf{d}}. \tag{75,5}$$

Nell'unità di tempo questa forza compie un lavoro pari a $\mathbf{fv}$; il lavoro totale compiuto su tutte le cariche è uguale alla somma estesa alle cariche:

$$\sum \mathbf{fv} = \frac{2}{3c^3}\dddot{\mathbf{d}} \sum e\mathbf{v} = \frac{2}{3c^3}\dddot{\mathbf{d}}\,\dot{\mathbf{d}} = \frac{2}{3c^3}\frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{d}}\,\ddot{\mathbf{d}}) - \frac{2}{3c^3}\ddot{\mathbf{d}}^2.$$

Il primo termine si annulla quando si prende la media rispetto al tempo, e quindi il lavoro medio vale:

$$\sum \overline{\mathbf{fv}} = -\frac{2}{3c^3}\overline{\ddot{\mathbf{d}}^2}. \tag{75,6}$$

L'espressione a secondo membro (presa con il segno opposto) è l'energia irraggiata mediamente dal sistema nell'unità di tempo (vedi (67,8)). Cosí, le forze (75,5) apparse in terza approssimazione descrivono l'azione inversa della radiazione sulle cariche. Queste forze sono dette forze *di frenamento per emissione di radiazione* o *forze d'attrito di Lorentz*.

Contemporaneamente all'energia, un sistema di cariche irraggiante perde anche il momento angolare. La diminuzione del momento angolare nell'unità di tempo, $d\mathbf{M}/dt$, può essere facilmente calcolata con l'aiuto delle espressioni per le forze di frenamento. Derivando il momento angolare $\mathbf{M} = \sum [\mathbf{rp}]$ rispetto al tempo, si ottiene $\dot{\mathbf{M}} = \sum [\mathbf{r}\dot{\mathbf{p}}]$, essendo $\sum [\dot{\mathbf{r}}\mathbf{p}] = \sum m\,[\mathbf{vv}] \equiv 0$. Sostituendo la derivata dell'impulso della particella rispetto al tempo con la forza d'attrito (75,5) che agisce su di essa, troviamo:

$$\dot{\mathbf{M}} = \sum [\mathbf{rf}] = \frac{2}{3c^3}\sum e\,[\mathbf{r}\dddot{\mathbf{d}}] = \frac{2}{3c^3}[\mathbf{d}\dddot{\mathbf{d}}].$$

Vogliamo determinare qui il valore medio nel tempo della perdita di momento angolare in un moto stazionario, esattamente come nel caso appena esaminato abbiamo calcolato la perdita media di energia. Scrivendo

$$[\mathbf{d}\dddot{\mathbf{d}}] = \frac{d}{dt}[\mathbf{d}\ddot{\mathbf{d}}] - [\dot{\mathbf{d}}\,\ddot{\mathbf{d}}]$$

e notando che la derivata totale rispetto al tempo (il primo termine) si annulla quando si prende la media, troviamo in definitiva la seguente

---

[1]) Piú precisamente, un moto che sarebbe stazionario se si trascurasse la radiazione che genera lo smorzamento progressivo del moto.

espressione per la variazione media di momento angolare di un sistema irraggiante[1]):

$$\overline{\frac{d\mathbf{M}}{dt}} = -\frac{2}{3c^3}\,\overline{[\dot{\mathbf{d}}\,\ddot{\mathbf{d}}]}. \tag{75,7}$$

Il frenamento per emissione di radiazione ha luogo anche nel caso di una sola carica in moto in un campo esterno. La forza corrispondente è data da:

$$\mathbf{f} = \frac{2e^2}{3c^3}\,\ddot{\mathbf{v}}. \tag{75,8}$$

Per una particella si può sempre scegliere un sistema di riferimento in cui essa sia in quiete nell'istante dato. Se in un tale sistema si calcolano i termini successivi dello sviluppo del campo generato dalla carica, è facile vedere che tutti questi termini si annullano quando il raggio vettore **R** tracciato dalla carica al punto d'osservazione tende a zero. In tal modo, nel caso di una sola carica la formula (75,8) è l'espressione esatta dell'azione inversa della radiazione nel sistema di riferimento dove la carica è in quiete.

Bisogna però tener presente, che la descrizione dell'azione della carica « su sé stessa » per mezzo della forza di frenamento non è affatto soddisfacente e contiene in sé delle contraddizioni. L'equazione del moto di una carica, in assenza di un campo esterno, sollecitata soltanto dalla forza (75,8) ha la forma

$$m\dot{\mathbf{v}} = \frac{2e^2}{3c^3}\,\ddot{\mathbf{v}}.$$

L'equazione possiede, oltre alla soluzione banale $\mathbf{v}$ = costante, ancora un'altra soluzione in cui l'accelerazione $\mathbf{v}$ è proporzionale a exp $(3mc^3t/2e^2)$, cioè cresce infinitamente con il tempo. Ciò vuol dire, per esempio, che una carica, attraversato un campo qualsiasi, all'uscita dal campo dovrebbe « accelerarsi da sola » infinitamente. L'assurdità di questo risultato dimostra quanto sia limitata l'applicabilità della formula (75,8).

È naturale a questo punto la domanda: come mai l'elettrodinamica, che soddisfa la legge di conservazione dell'energia, può condurre al risultato assurdo per cui una particella libera aumenta infinitamente la sua energia? In realtà, le origini di questa difficoltà risiedono nella « massa propria » elettromagnetica infinita delle particelle elementari della quale si è parlato nel § 37. Quando nelle equazioni del moto scriviamo per la carica una massa finita, in effetti attribuiamo alla carica formalmente una « massa propria » infinita negativa di origine non elettromagnetica, che, sommata alla massa elettromagnetica, rende finita la massa della particella. Siccome la differenza di due infiniti non è un'operazione

[1]) In accordo con il risultato (3) ottenuto nel problema 2 del § 72.

matematica del tutto corretta, ciò genera appunto una serie di difficoltà, compresa quella qui citata.

In un sistema di coordinate dove la velocità della particella è piccola, l'equazione del moto si scrive, tenuto conto del frenamento per radiazione, nel modo seguente:

$$m\dot{\mathbf{v}} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{vH}] + \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\mathbf{v}}. \tag{75,9}$$

In virtú delle considerazioni esposte, questa equazione è applicabile soltanto finché la forza di frenamento è piccola rispetto alla forza con la quale il campo esterno agisce sulla carica.

Per chiarire il significato fisico di questa condizione, procediamo nel modo seguente. Nel sistema di riferimento dove la carica è nell'istante dato in quiete, la derivata seconda della velocità rispetto al tempo, trascurata la forza di frenamento, vale:

$$\ddot{\mathbf{v}} = \frac{e}{m}\dot{\mathbf{E}} + \frac{e}{mc}[\dot{\mathbf{v}}\mathbf{H}].$$

Sostituiendo nel secondo termine (con la stessa approssimazione) $\dot{\mathbf{v}} = e\mathbf{E}/m$, otteniamo:

$$\ddot{\mathbf{v}} = \frac{e}{m}\dot{\mathbf{E}} + \frac{e^2}{m^2c}[\mathbf{EH}].$$

La forza di frenamento risulta quindi composta di due termini:

$$\mathbf{f} = \frac{2e^3}{3mc^3}\dot{\mathbf{E}} + \frac{2e^4}{3m^2c^4}[\mathbf{EH}]. \tag{75,10}$$

Se ω è la frequenza del moto, allora $\dot{\mathbf{E}}$ è proporzionale a $\omega\mathbf{E}$ e, di conseguenza, il primo termine è dell'ordine di $\frac{e^3\omega}{mc^3}E$; il secondo termine è dell'ordine di $\frac{e^4}{m^2c^4}EH$. Perciò la condizione per cui le forze di frenamento sono trascurabili rispetto alla forza esterna eE agente sulla carica conduce alla relazione:

$$\frac{e^2}{mc^3}\omega \ll 1,$$

oppure, introducendo la lunghezza d'onda $\lambda \sim c/\omega$:

$$\lambda \gg \frac{e^2}{mc^2}. \tag{75,11}$$

Cosí, la formula (75,8) del frenamento per radiazione è applicabile solamente nel caso in cui la lunghezza della onda incidente sulla carica è grande rispetto al « raggio » della carica e^2/mc^2. Dalla relazione trovata si vede che la distanza dell'ordine di e^2/mc^2 rappresenta nuovamente il limite oltre il quale l'elettrodinamica entra in contraddizione con sé stessa (vedi § 37).

Confrontando inoltre il secondo termine della forza di frenamento e la forza eE, troviamo la condizione

$$H \ll \frac{m^2c^4}{e^3} \tag{75,12}$$

(oppure $c/\omega_H \gg e^2/mc^2$, dove $\omega_H = eH/mc$), In tal modo, è necessario anche che il campo stesso non sia troppo forte. I campi $\sim m^2c^4/e^3$ costituiscono pure un limite oltre il quale l'elettrodinamica classica porta a contraddizioni interne. Qui bisogna inoltre tener presente che l'elettrodinamica diventa inapplicabile anche in seguito ad effetti quantistici, già per campi considerevolmente piú deboli[1]).

Ricordiamo, a scanso di malintesi, che la lunghezza d'onda nella (75,11) e la grandezza del campo nella (75,12) sono rapportate al sistema di riferimento nel quale la particella è in quiete nell'istante dato.

PROBLEMI

1. Determinare il tempo necessario affinché due cariche che si attraggono « cadano » l'una sull'altra mentre compiono un moto ellittico (con velocità piccola rispetto a quella della luce), perdendo energia per irraggiamento.

Soluzione. Supponendo piccola la perdita relativa di energia in un giro, possiamo porre la derivata dell'energia rispetto al tempo uguale all'intensità media della radiazione (determinata nel problema 1 del § 70):

$$\frac{d\,|\mathscr{E}|}{dt} = \frac{(2\,|\mathscr{E}|)^{3/2}\mu^{5/2}\alpha^3}{3c^3M}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2\left(3-\frac{2\,|\mathscr{E}|\,M^2}{\mu\alpha^2}\right), \tag{1}$$

dove $\alpha = |e_1e_2|$. Insieme all'energia, le particelle perdono il momento angolare. La perdita del momento angolare nell'unità di tempo è data dalla formula (75,7); sostituendo in essa l'espresione (70,1) per $\mathbf{d}$ e notando che $\mu\ddot{\mathbf{r}} = -\alpha\mathbf{r}/r^3$ ed $\mathbf{M} = \mu\,[\mathbf{rv}]$, troviamo:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -\frac{2\alpha}{3c^3}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2\frac{\mathbf{M}}{r^3}.$$

Prendiamo la media di questa espressione rispetto ad un periodo del moto. Tenendo conto che $\mathbf{M}$ varia lentamente, sarà sufficiente prendere nel secondo membro dell'uguaglianza la media soltanto di r^{-3}; questo valore medio si calcola esattamente nello stesso modo come abbiamo fatto nel problema 1 del § 70 per il valore medio di r^{-4}. Per la perdita media del momento angolare nell'unità di tempo troviamo in definitiva la seguente espressione:

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{2\alpha\,(2\mu\,|\mathscr{E}|)^{3/2}}{3c^3M^2}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2 \tag{2}$$

(qui, come nella (1), abbiamo omesso il tratto orizzontale che indica il valore medio). Dividendo la (1) per la (2), otteniamo l'equazione differenziale

$$\frac{d\,|\mathscr{E}|}{dM} = -\frac{\mu\alpha^2}{2M^3}\left(3-2\,\frac{|\mathscr{E}|\,M^2}{\mu\alpha^2}\right),$$

---

[1]) Per campi $\sim m^2c^3/\hbar e$, cioè quando $\hbar\omega_H \sim mc^2$. Questo limite è di $\hbar c/e^2 = 137$ volte inferiore al limite stabilito dalla condizione (75,12).

la cui integrazione ci dà:

$$|\mathscr{E}| = \frac{\mu\alpha^2}{2M^2}\left(1-\frac{M^3}{M_0^3}\right)+\frac{|\mathscr{E}_0|}{M_0}M. \tag{3}$$

La costante d'integrazione è stata scelta in modo tale che si abbia $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0$ per $M = M_0$, dove M_0 ed $\mathscr{E}_0$ sono i valori iniziali del momento angolare e dell'energia delle particelle.

Alla « caduta » delle particelle, l'una sull'altra, corrisponde $M \to 0$. Dalla (3) risulta allora che, come doveva essere, $\mathscr{E} \to -\infty$.

Notiamo che il prodotto $|\mathscr{E}|M^2$ tende a $\mu\alpha^2/2$, e dalla formula (70,3) segue che l'eccentricità $\varepsilon \to 0$, cioè l'orbita diventa a poco a poco circolare a misura che le particelle si avvicinano l'una all'altra. Sostituendo la (3) nella (2), determiniamo la derivata dt/dM, espressa in funzione di M, dopo di che l'integrazione rispetto a dM da M_0 a zero dà il tempo di caduta:

$$t_{\text{cad}} = \frac{c^3M_0^5}{\alpha\sqrt{2|\mathscr{E}_0|\mu^3}}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^{-2}\left(\sqrt{\mu\alpha^2}+\sqrt{2M_0^2|\mathscr{E}_0|}\right)^{-2}.$$

2. Trovare la lagrangiana limitata ai termini del quarto ordine[1]) di un sistema di due particelle identiche cariche (*J. A. Smorodinski e V. N. Golubenkov*, 1956).

Soluzione. Risulta comodo fare il calcolo seguendo un procedimento alquanto differente da quello utilizzato nel § 65. Partiamo dall'espressione della lagrangiana per le particelle e il loro campo:

$$L = \int\left\{\frac{1}{8\pi}(\mathbf{E}^2-\mathbf{H}^2)+\frac{1}{c}\mathbf{j}\mathbf{A}-\rho\varphi\right\}dV-\sum_a m_a c^2\sqrt{1-\frac{v_a^2}{c^2}}.$$

Ponendo

$$\mathbf{E}^2-\mathbf{H}^2 = \mathbf{E}\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}-\nabla\varphi\right)-\mathbf{H}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A}$$

e integrando per parti, otteniamo:

$$\frac{1}{8\pi}\int(\mathbf{E}^2-\mathbf{H}^2)\,dV =$$

$$= -\frac{1}{8\pi}\oint\{\mathbf{E}\varphi+[\mathbf{A}\mathbf{H}]\}\,d\mathbf{f}-\frac{1}{8\pi c}\frac{d}{dt}\int\mathbf{E}\mathbf{A}\,dV-\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{c}\mathbf{j}\mathbf{A}-\rho\varphi\right)dV.$$

Per un sistema senza radiazione di dipolo, l'integrale su una superficie infinitamente distante non dà nessun apporto ai termini dell'ordine di $1/c^4$. Per quanto concerne il termine contenente la derivata totale rispetto al tempo, esso può essere trascurato completamente nella lagrangiana. In tal modo, i termini cercati del quarto ordine della lagrangiana sono contenuti nell'espressione

$$L = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{c}\mathbf{j}\mathbf{A}-\rho\varphi\right)dV-\sum_a m_a c^2\sqrt{1-\frac{v_a^2}{c^2}}.$$

Continuando lo sviluppo, fatto nel § 65, troveremo i termini del quarto ordine nei potenziali (φ ed $\mathbf{A}/c$) del campo creato dalla carica 1 nel punto dove si trova

[1]) Vedi la nota alla pag. 221. I termini del terzo ordine della lagrangiana scompaiono automaticamente: i termini dell'ordine corrispondente del campo creato dalle particelle sono determinati dalla derivata rispetto al tempo del momento di dipolo [vedi la (75,3)] che nel dato caso si conserva.

la carica 2:

$$\varphi_1(2)=\frac{e}{24c^4}\frac{\partial^4 R^3}{\partial t^4}, \qquad \frac{1}{c}\mathbf{A}_1(2)=\frac{e}{2c^4}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(R\mathbf{v}_1).$$

Facendo la trasformazione (18,3) con una adeguata funzione f, questi potenziali possono essere espressi nella forma equivalente:

$$\varphi_1(2)=0, \qquad \frac{1}{c}\mathbf{A}_1(2)=\frac{e}{2c^4}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}(R\mathbf{v}_1)+\frac{1}{12}\frac{\partial^3}{\partial t^3}(\nabla R^3)\right] \tag{1}$$

(le derivazioni $\partial/\partial t$ si fanno fissando la posizione del punto d'osservazione, cioè del punto 2; le derivazioni ∇ si fanno rispetto alle coordinate del punto d'osservazione).

I termini del quarto ordine della lagrangiana sono dati ora dall'espressione :

$$L^{(4)}=\frac{e}{2c}[\mathbf{A}_1(2)\mathbf{v}_2+\mathbf{A}_2(1)\mathbf{v}_1]+\frac{m}{16c^4}(v_1^6+v_2^6). \tag{2}$$

Effettuando nella (1) alcune delle derivazioni, scriviamo $\mathbf{A}_1$ (2) nella forma

$$\frac{1}{c}\mathbf{A}_1(2)=\frac{e}{8c^4}\frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial t}, \qquad \mathbf{F}_1=\frac{\partial}{\partial t}[3R\mathbf{v}_1-R\mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{v}_1)]$$

(dove $\mathbf{n}$ è il versore diretto dal punto 1 al punto 2). Prima di continuare il calcolo, è comodo escludere immediatamente da $L^{(4)}$ i termini contenenti le derivate delle velocità rispetto al tempo di ordine superiore al primo; notiamo a questo scopo che

$$\frac{1}{c}\mathbf{A}_1(2)\mathbf{v}_2=\frac{e}{8c^4}\mathbf{v}_2\frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial t}=\frac{e}{8c^4}\left\{\frac{d}{dt}(\mathbf{v}_2\mathbf{F}_1)-(\mathbf{v}_2\nabla)(\mathbf{v}_2\mathbf{F}_1)-\mathbf{F}_1\dot{\mathbf{v}}_2\right\},$$

dove

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v}_2\mathbf{F}_1)=\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{v}_2\mathbf{F}_1)+(\mathbf{v}_2\nabla)(\mathbf{v}_2\mathbf{F}_1)$$

è la derivata totale rispetto al tempo (derivazione rispetto ai due estremi del vettore $\mathbf{R}$!) e può essere omessa nella lagrangiana. Le accelerazioni si eliminano invece dall'espressione ottenuta mediante le equazioni del moto in prima approssimazione: $m\dot{\mathbf{v}}_1=-e^2\mathbf{n}/R^2$, $m\dot{\mathbf{v}}_2=e^2\mathbf{n}/R^2$. Dopo un calcolo assai lungo, otteniamo in definitiva:

$$L^{(4)}=\frac{e^2}{8c^4R}\left\{[-v_1^2v_2^2+2(\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2)^2-3(\mathbf{n}\mathbf{v}_1)^2(\mathbf{n}\mathbf{v}_2)^2+\right.$$
$$+(\mathbf{n}\mathbf{v}_1)^2v_2^2+(\mathbf{n}\mathbf{v}_2)^2v_1^2]+\frac{e^2}{mR}[-v_1^2-v_2^2+$$
$$\left.+3(\mathbf{n}\mathbf{v}_1)^2+3(\mathbf{n}\mathbf{v}_2)^2]+\frac{2e^4}{m^2R^2}\right\}+\frac{m}{16c^4}(v_1^6+v_2^6).$$

Dalla simmetria dovuta all'identità delle due cariche risulta a priori che, nel sistema di riferimento dove il loro centro di massa è in quiete, si avrà $\mathbf{v}_1=-\mathbf{v}_2$. Per i termini del quarto ordine della lagrangiana si ha allora:

$$L^{(4)}=\frac{e^2}{8c^4R}\left\{\frac{1}{16}[v^4-3(\mathbf{n}\mathbf{v})^4+2(\mathbf{n}\mathbf{v})^2v^2]+\frac{e^2}{2mR}[3(\mathbf{n}\mathbf{v})^2-v^2]+\frac{2e^4}{m^2R^2}\right\}+\frac{mv^6}{2^9c^4},$$

dove $\mathbf{v}=\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1$[1]).

[1]) Questo metodo di esclusione di accelerazione è scorretto; il metodo corretto è dato da B. M. Barker, R. F. O'Connell, Canad. J. Phys., 58, 1659 (1980).

§ 76. *Frenamento per emissione di radiazione nel caso relativistico*

Ricaviamo l'espressione relativistica del frenamento per emissione di radiazione (per una sola carica), valida anche per un moto a velocità dell'ordine di quella della luce. Questa forza rappresenterà ora un quadrivettore g^i con il quale si dovrà completare l'equazione del moto di una carica, scritta nella forma quadridimensionale:

$$mc\frac{du^i}{ds}=\frac{e}{c}F^{ik}u_k+g^i. \tag{76,1}$$

Per determinare g^i, notiamo che per $v \ll c$ le sue tre componenti spaziali debbono ridursi alle componenti del vettore $\mathbf{f}/c$ (75,8). È facile vedere che il quadrivettore $\frac{2e^2}{3c}\frac{d^2u^i}{ds^2}$ possiede questa proprietà. Esso non soddisfa però l'identità $g^iu_i = 0$ che vale per le componenti di ogni quadrivettore forza. Perché questa condizione sia soddisfatta, bisogna aggiungere all'espressione scritta un certo quadrivettore composto della 4-velocità u^i e delle sue derivate. Le tre componenti spaziali di questo vettore si debbono annullare nel caso limite $\mathbf{v} = 0$ in maniera tale che non venga alterato il giusto valore di $\mathbf{f}$, già dato dall'espressione $\frac{2e^2}{3c}\frac{d^2u^i}{ds^2}$. Il quadrivettore u^i possiede questa proprietà, e, di conseguenza, il termine supplementare cercato deve avere la forma αu^i. Lo scalare α deve esser scelto in maniera tale che sia soddisfatta la relazione $g^iu_i = 0$. Troviamo in definitiva:

$$g^i=\frac{2e^2}{3c}\left(\frac{d^2u^i}{ds^2}-u^iu^k\frac{d^2u_k}{ds^2}\right). \tag{76,2}$$

L'espressione ottenuta può essere scritta in un'altra forma, esprimendo, in virtú delle equazioni del moto, le derivate d^2u^i/ds^2 in funzione del tensore del campo elettromagnetico esterno agente sulla particella:

$$\frac{du^i}{ds}=\frac{e}{mc^2}F^{ik}u_k, \qquad \frac{d^2u^i}{ds^2}=\frac{e}{mc^2}\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^l}u_ku^l+\frac{e^2}{m^2c^4}F^{ik}F_{kl}u^l.$$

Facendo la sostituzione, bisogna tener presente che il prodotto del tensore $\partial F^{ik}/\partial x^l$, antisimmetrico rispetto agli indici i, k, per il tensore simmetrico u_iu_k dà zero. Dunque,

$$g^i=\frac{2e^3}{3mc^3}\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^l}u_ku^l-\frac{2e^4}{3m^2c^5}F^{il}F_{kl}u^k+\frac{2e^4}{3m^2c^5}(F_{kl}u^l)(F^{km}u_m)\,u^i. \tag{76,3}$$

L'integrale della 4-forza g^i preso sulla linea d'universo del moto della carica che attraversa il campo dato deve coincidere (con il segno contrario) con la radiazione totale emessa dalla carica del 4-impulso ΔP^i (allo stesso modo come il valore medio del lavoro della forza $\mathbf{f}$ coincide nel caso non relativistico con l'intensità della radiazione

di dipolo; vedi la (75,6)). È facile provare che le cose stanno esattamente in questo modo. Il primo termine della (76,2) nell'integrazione si annulla, perché la particella all'infinito ha accelerazione nulla, cioè $du^i/ds = 0$. Integrando il secondo termine per parti otteniamo:

$$-\int g^i\, ds = \frac{2e^2}{3c}\int u^i \frac{d^2u_k}{ds^2}\, ds = -\frac{2e^2}{3c}\int \frac{du_k}{ds}\frac{du^k}{ds}\, dx^i,$$

risultato che coincide esattamente con la (73,4).

Quando la velocità della particella tende a c, fra le componenti spaziali cresce piú rapidamente il termine del quadrivettore (76,3), che contiene i prodotti tripli delle componenti della 4-velocità. Conservando perciò nella (76,3) soltanto questo termine e tenendo conto della relazione (9,18) tra le componenti spaziali del quadrivettore g^i e la forza tridimensionale $\mathbf{f}$, troviamo per quest'ultima:

$$\mathbf{f} = \frac{2e^4}{3m^2c^4}(F_{kl}u^l)(F^{km}u_m)\,\mathbf{n},$$

dove $\mathbf{n}$ è il versore di $\mathbf{v}$. In questo caso, la forza $\mathbf{f}$ è diretta in senso contrario della velocità della particella; dirigendo l'asse delle x lungo questa velocità e sviluppando le espressioni quadridimensionali, otteniamo:

$$f_x = -\frac{2e^4}{3m^2c^4}\,\frac{(E_y - H_z)^2 + (E_z + H_y)^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{76,4}$$

(ovunque, tranne che al denominatore, è stato posto $v = c$). Si vede che per una particella ultrarelativistica la forza di frenamento è proporzionale al quadrato della sua energia.

Sottolineiamo qui un fatto molto interessante. È stato dimostrato al paragrafo precedente che le espressioni ottenute per il frenamento per emissione di radiazione sono applicabili solo ai campi la cui grandezza nel sistema di quiete della particella (sistema K_0) è piccola rispetto all'espressione m^2c^4/e^3. Sia F l'ordine di grandezza del campo esterno nel sistema di riferimento K dove la particella si muove con velocità v. Allora, l'ordine di grandezza del campo nel sistema K_0, vale $F/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ (vedi le formule di trasformazione nel § 24). Risulta quindi che F deve soddisfare la condizione

$$\frac{e^3F}{m^2c^4\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \ll 1 \tag{76,5}$$

Siccome il rapporto fra la forza di frenamento (76,4) e la forza esterna ($\sim eF$) è dell'ordine di grandezza

$$\frac{e^3F}{m^2c^4\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)},$$

si vede che la validità della condizione (76,5) non impedisce che la forza di frenamento possa diventare (per energia sufficientemente grande della particella) grande rispetto alla forza ordinaria di Lorentz agente su una carica in un campo elettromagnetico [1]). Può avvenire dunque che per una particella ultrarelativistica il frenamento per emissione di radiazione sia la forza principale agente su di essa.

In questo caso, si può supporre che la perdita di energia (cinetica) della particella nell'unità di percorso sia uguale alla sola forza di frenamento f_x; tenendo presente che quest'ultima è proporzionale al quadrato dell'energia della particella, si ha:

$$-\frac{d\mathscr{E}_{\text{cin}}}{dx} = k(x)\,\mathscr{E}^2_{\text{cin}},$$

dove con $k(x)$ è indicato il coefficiente dipendente dalla coordinata x, che si esprime, conformemente alla (76,4), in funzione delle componenti trasversali del campo. L'integrazione di questa equazione ci dà:

$$\frac{1}{\mathscr{E}_{\text{cin}}} = \frac{1}{\mathscr{E}_0} + \int_{-\infty}^{x} k(x)\,dx,$$

dove $\mathscr{E}_0$ è l'energia iniziale della particella (l'energia per $x \to -\infty$). In particolare, l'energia finale $\mathscr{E}_1$ della particella (dopo aver attraversato il campo) è data dalla formula

$$\frac{1}{\mathscr{E}_1} = \frac{1}{\mathscr{E}_0} + \int_{-\infty}^{+\infty} k(x)\,dx.$$

Si vede che per $\mathscr{E}_0 \to \infty$ l'energia finale $\mathscr{E}_1$ tende ad un limite costante non dipendente da $\mathscr{E}_0$ (*I. J. Pomeranciuk*, 1939). Ne segue che dopo aver attraversato il campo l'energia della particella non può superare il valore $\mathscr{E}_{\text{crit}}$ definito dalla uguaglianza

$$\frac{1}{\mathscr{E}_{\text{crit}}} = \int_{-\infty}^{+\infty} k(x)\,dx$$

---

[1]) Sottolineiamo che questo risultato non contraddice affatto la deduzione dell'espressione relativistica del quadrivettore forza g^i, il quale era assunto piccolo rispetto al quadrivettore forza $\frac{e}{c} F^{ik} u_k$. È sufficiente che venga osservata la condizione che le componenti di un quadrivettore siano piccole rispetto a quelle di un altro almeno in un solo sistema di riferimento; in virtú dell'invarianza relativistica, le formule quadridimensionali ottenute da questa ipotesi saranno automaticamente valide per ogni altro sistema di riferimento.

oppure, sostituendo l'espressione di $k(x)$,

$$\frac{1}{\mathscr{E}_{\text{crit}}}=\frac{2}{3m^2c^4}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\int_{-\infty}^{+\infty}[(E_y-H_z)^2+(E_z+H_y)^2]\,dx. \qquad (76,6)$$

PROBLEMI

1. Determinare l'energia limite che può possedere una particella dopo aver attraversato il campo di un dipolo magnetico $\mathfrak{m}$; il vettore $\mathfrak{m}$ e la direzione del moto giacciono nello stesso piano.

Soluzione. Prendiamo per piano xz il piano passante per il vettore $\mathfrak{m}$ e la direzione del moto; la particella si muova parallelamente all'asse delle x a distanza ρ da quest'ultimo. Per le componenti trasversali del campo del dipolo magnetico agente sulla particella [vedi la (44,4)] si ha:

$$H_y=0,$$

$$H_z=\frac{(3\mathfrak{m}\mathbf{r})\,z-\mathfrak{m}_z r^2}{r^5}=\frac{\mathfrak{m}}{(\rho^2+x^2)^{5/2}}\{3(\rho\cos\varphi+x\operatorname{sen}\varphi)\rho-(\rho^2+x^2)\cos\varphi\}$$

(φ è l'angolo tra $\mathfrak{m}$ e l'asse delle z). Sostituendo nella (76,6) ed integrando, otteniamo:

$$\frac{1}{\mathscr{E}_{\text{crit}}}=\frac{\mathfrak{m}^2\pi}{64m^2c^4\rho^5}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2(15+26\cos^2\varphi).$$

2. Scrivere l'espressione tridimensionale della forza di frenamento nel caso relativistico.

Soluzione. Calcolando le componenti spaziali del quadrivettore (76,3), avremo:

$$\mathbf{f}=\frac{2e^3}{3mc^3}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial t}+(\mathbf{v}\nabla)\right)\mathbf{E}+\frac{1}{c}\left[\mathbf{v}\left(\frac{\partial}{\partial t}+(\mathbf{v}\nabla)\right)\mathbf{H}\right]\right\}+$$
$$+\frac{2e^4}{3m^2c^4}\left\{[\mathbf{EH}]+\frac{1}{c}[\mathbf{H}[\mathbf{Hv}]]+\frac{1}{c}\mathbf{E}(\mathbf{vE})\right\}-$$
$$-\frac{2e^4}{3m^2c^5\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}\mathbf{v}\left\{\left(\mathbf{E}+\frac{1}{c}[\mathbf{vH}]\right)^2-\frac{1}{c^2}(\mathbf{Ev})^2\right\}.$$

§ 77. *Decomposizione spettrale della radiazione nel caso ultrarelativistico*

Nel (§ 73) è stato dimostrato che la radiazione di una particella ultrarelativistica è diretta principalmente in avanti, nel senso della velocità della particella: essa è compresa quasi interamente in un piccolo intervallo di angoli

$$\Delta\theta\sim\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

intorno alla direzione di $\mathbf{v}$.

Nel calcolare la decomposizione spettrale della radiazione ha un'importanza fondamentale la relazione tra la grandezza di questo

intervallo e l'angolo totale α di diffusione della particella durante il passaggio attraverso un campo elettromagnetico esterno.

L'angolo α può essere valutato nel modo seguente. La variazione trasversale (rispetto alla direzione del moto) dell'impulso della particella è dell'ordine di grandezza del prodotto della forza trasversale eF [1]) per il tempo impiegato a percorrere il campo $t \sim a/v \approx a/c$ (dove a è la distanza alla quale il campo è sensibilmente differente da zero). Il rapporto fra questa grandezza e l'impulso

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \approx \frac{mc}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

determina l'ordine di grandezza del piccolo angolo α:

$$\alpha \sim \frac{eFa}{mc^2}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

Dividendolo per $\Delta\theta$, troviamo:

$$\frac{\alpha}{\Delta\theta} \sim \frac{eFa}{mc^2}. \tag{77,1}$$

Notiamo che questo rapporto non dipende dalla velocità della particella ed è interamente determinato dalle proprietà del campo esterno stesso.

Supponiamo innanzitutto che

$$eFa \gg mc^2, \tag{77,2}$$

cioè che l'angolo totale di diffusione della particella sia grande rispetto a $\Delta\theta$. Possiamo allora affermare che la radiazione emessa in una direzione proviene essenzialmente dall'arco di traiettoria dove la velocità della particella è quasi parallela a questa direzione (formando con quest'ultima l'angolo compreso nell'intervallo $\Delta\theta$) e che la lunghezza di questo arco è piccola rispetto ad a. Sullo stesso arco il campo F può essere considerato costante, e siccome un piccolo arco di curva può essere approssimato con un arco di cerchio, si possono applicare i risultati ottenuti nel § 74 per la radiazione emessa in un moto circolare uniforme (sostituendo nello stesso tempo H con F). In particolare, si può affermare che gran parte della radiazione è concentrata nella regione di frequenze

$$\omega \sim \frac{eF}{mc\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} \tag{77,3}$$

(vedi la (74,16)).

[1]) Se l'asse delle x è orientato nella direzione del moto della particella, allora $(eF)^2$ è la somma dei quadrati delle componenti sugli assi y e z della forza di Lorentz $e\mathbf{E} + \frac{e}{C}[\mathbf{vH}]$, dove si può inoltre porre $v \approx c$:

$$F^2 = (E_y - H_z)^2 + (E_z + H_y)^2.$$

Nel caso limite opposto

$$eFa \ll mc^2, \tag{77,4}$$

l'angolo totale di diffusione della particella è piccolo rispetto a $\Delta\theta$. Allora, tutta la radiazione é emessa essenzialmente in uno stretto intervallo di angoli $\Delta\theta$ intorno alla direzione del moto ed è determinata dall'intera traiettoria della particella.

Per calcolare la decomposizione spettrale dell'intensità in questo caso, è comodo partire dall'espressione per il campo nella zona delle onde nella forma di Lienard-Wiechert (73,8) Calcoliamo la componente di Fourier

$$\mathbf{E}_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E} e^{i\omega t}\, dt.$$

L'espressione del secondo membro della formula (73,8) è calcolata all'istante ritardato t', determinato dalla condizione $t' = t - R(t')/c$. A grandi distanze dalla particella che si muove con una velocità quasi costante $\mathbf{v}$ si ha:

$$t' \approx t - \frac{R_0}{c} + \frac{1}{c}\mathbf{n}\mathbf{r}(t') \approx t - \frac{R_0}{c} + \frac{1}{c}\mathbf{n}\mathbf{v}t'$$

($\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \approx \mathbf{v}t$ è il raggio vettore della particella), oppure

$$t = t'\left(1 - \frac{\mathbf{n}\mathbf{v}}{c}\right) + \frac{R_0}{c}.$$

Sostituiamo l'integrazione in dt con l'integrazione in dt' ponendo

$$dt = \left(1 - \frac{\mathbf{n}\mathbf{v}}{c}\right) dt',$$

ed otteniamo:

$$\mathbf{E}_\omega = \frac{e}{c^2} \frac{e^{ikR_0}}{R_0\left(1 - \frac{\mathbf{n}\mathbf{v}}{c}\right)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\mathbf{n}\left[\left(\mathbf{n} - \frac{\mathbf{v}}{c}\right)\mathbf{w}(t')\right]\right] e^{i\omega t'\left(1 - \frac{\mathbf{n}\mathbf{v}}{c}\right)} dt'.$$

La velocità $\mathbf{v}$ è considerata qui ovunque come una grandezza costante, solo l'accelerazione $\mathbf{w}(t')$ è variabile. Ponendo

$$\omega' = \omega\left(1 - \frac{\mathbf{n}\mathbf{v}}{c}\right) \tag{77,5}$$

ed introducendo la componente di Fourier dell'accelerazione corrispondente a questa frequenza, scriviamo $\mathbf{E}_\omega$ nella forma

$$\mathbf{E}_\omega = \frac{e}{c^2} \frac{e^{ikR_0}}{R_0} \left(\frac{\omega}{\omega'}\right)^2 \left[\mathbf{n}\left[\left(\mathbf{n} - \frac{\mathbf{v}}{c}\right)\mathbf{w}_{\omega'}\right]\right].$$

Infine, in base alla (66,9), per l'energia irraggiata nell'angolo solido do e di frequenze comprese nell'intervallo $d\omega$ troviamo

finalmente:

$$d\mathscr{E}_{\mathbf{n}\omega} = \frac{e^2}{2\pi c^3}\left(\frac{\omega}{\omega'}\right)^4 \left|\left[\mathbf{n}\left[\left(\mathbf{n}-\frac{\mathbf{v}}{c}\right)\mathbf{w}_{\omega'}\right]\right]\right|^2 do\,\frac{d\omega}{2\pi}. \qquad (77,6)$$

È facile valutare l'ordine di grandezza dell'intervallo di frequenze in cui quali è concentrata gran parte della radiazione nel caso (77,4) osservando che la componente di Fourier $\mathbf{w}_{\omega'}$ è sensibilmente differente da zero soltanto se il tempo $1/\omega'$ o, il che è lo stesso, se l'espressione

$$\frac{1}{\omega\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}$$

è dello stesso ordine del tempo $a/v \sim a/c$ nel corso del quale l'accelerazione della particella varia sensibilmente. Troviamo quindi:

$$\omega \sim \frac{c}{a\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}. \qquad (77,7)$$

La dipendenza di queste frequenze dall'energia è la stessa che si ha nella (77,3), ma il coefficiente è diverso.

Nello studio effettuato (per ambedue i casi (77,2) e (77,4)) si è supposto che la perdita totale di energia della particella durante il suo passaggio attraverso il campo fosse relativamente piccola. Mostriamo ora che il problema dell'irraggiamento di una particella ultrarelativistica, la cui perdita totale di energia è comparabile alla sua energia iniziale, si riduce al primo dei casi studiati.

La perdita di energia della particella nel campo si può definire come il lavoro della forza d'attrito di Lorentz. Il lavoro della forza (76,4) su un percorso $\sim a$ è dell'ordine di grandezza di

$$af \sim \frac{e^4F^2a}{m^2c^4\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}.$$

Perché esso sia comparabile all'energia totale della particella $mc^2/\sqrt{1-v^2/c^2}$, il campo deve manifestarsi sino a distanze

$$a \sim \frac{m^3c^6}{e^4F^2}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

In questo caso la condizione (77,2) sarà automaticamente soddisfatta:

$$aeF \sim \frac{m^3c^6}{e^3F}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \gg mc^2,$$

perché il campo F deve, in ogni caso, verificare la condizione (76,5) senza la quale l'elettrodinamica ordinaria non può essere in generale applicata.

PROBLEMI

1. Determinare la distribuzione spettrale dell'intensità totale (in tutte le direzioni) della radiazione nell'ipotesi che valga la condizione (77,2).

Soluzione. La radiazione proveniente da un elemento d'arco della traiettoria è determinata dalla formula (74,13), dove H deve essere sostituito con il valore F della forza trasversale nel punto dato e dove, inoltre, bisogna passare dallo spettro discreto di frequenze a quello continuo. Questo passaggio vien fatto moltiplicando formalmente per dn e sostituendo

$$I_n\, dn = I_n \frac{dn}{d\omega}\, d\omega = I_n \frac{d\omega}{\omega_0}.$$

Integrando poi l'intensità rispetto a tutto il tempo, troveremo la distribuzione spettrale della radiazione totale nella forma:

$$d\mathscr{E}_\omega = -d\omega \frac{2e^2\omega\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{c\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\Phi'(u)}{u} + \frac{1}{2}\int_u^{\infty} \Phi(u)\, du\right] dt,$$

dove $\Phi(u)$ è la funzione di Airy della variabile indipendente

$$u = \left[\frac{mc\omega}{eF}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\right]^{2/3}.$$

L'espressione integranda dipende dalla variabile d'integrazione t in modo implicito mediante la grandezza u (F, e con essa anche u, variano sulla traiettoria della particella; per il moto dato, questa variazione può essere considerata come una dipendenza dal tempo).

2. Determinare la distribuzione spettrale dell'energia totale irraggiata (in tutte le direzioni) nell'ipotesi che valga la condizione (77,4).

Soluzione. Tenendo presente che il contributo maggiore è dato dalla radiazione emessa sotto angoli piccoli rispetto alla direzione del moto, scriviamo:

$$\omega' = \omega\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right) \approx \omega\left(1-\frac{v}{c}+\frac{\theta^2}{2}\right) \approx \frac{\omega}{2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}+\theta^2\right).$$

Nell'espressione (77,6) all'integrazione rispetto agli angoli $d_0 = \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\varphi \approx \approx \theta\, d\theta\, d\varphi$ sostituiamo l'integrazione in $d\varphi d\omega'/\omega$. Sviluppando il quadrato del doppio prodotto vettoriale nella (77,6), bisogna tener presente che, nel caso ultrarelativistico, la componente longitudinale dell'accelerazione è piccola rispetto a quella trasversale (nel rapporto $1 - v^2/c^2$) e, nel dato caso, $\mathbf{w}$ e $\mathbf{v}$ si possono considerare, con un grado di approssimazione sufficiente, perpendicolari. Per la distribuzione spettrale della radiazione totale troviamo infine la seguente espressione:

$$d\mathscr{E}_\omega = \frac{e^2\omega\, d\omega}{2\pi c^3} \int_{\frac{\omega}{2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}^{\infty} \frac{|\mathbf{w}_{\omega'}|^2}{\omega'^2}\left[1-\frac{\omega}{\omega'}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)+\frac{\omega^2}{2\omega'^2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2\right] d\omega'.$$

§ 78. *Diffusione da cariche libere*

Quando su un sistema di cariche incide un'onda elettromagnetica, sotto l'azione di questa le cariche si mettono in moto. Questo moto è accompagnato, a sua volta, da una radiazione emessa in tutte le direzioni: si dice che si ha una *diffusione* dell'onda iniziale.

È comodo caratterizzare la diffusione come il rapporto fra la quantità d'energia emessa dal sistema diffondente in una data direzione nell'unità di tempo e la densità del flusso d'energia della radiazione incidente. Questo rapporto ha la dimensione di un'area e si chiama perciò *sezione efficace di diffusione*.

Sia dI l'energia irradiata dal sistema nell'angolo solido do (in 1 sec) quando il sistema è colpito da un'onda con vettore di Poynting S. Allora la sezione didiffusione (nell'angolo solido do) è

$$d\sigma = \frac{\overline{dI}}{\overline{S}} \tag{78,1}$$

(il trattino indica il valore medio rispetto al tempo). L'integrale di $d\sigma$ su tutte le direzioni è la sezione totale di diffusione.

Consideriamo la diffusione generata da una sola carica libera e ferma. Supponiamo che su questa carica incida un'onda piana monocromatica polarizzata linearmente. Il campo elettrico si può in questo caso scrivere nella forma

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos (\mathbf{kr} - \omega t + \alpha).$$

Partiremo dal presupposto che la velocità acquisita dalla carica sotto l'azione del campo dell'onda incidente sia piccola rispetto alla velocità della luce, condizione che in pratica ha sempre luogo. Si può allora considerare la forza agente sulla carica uguale ad $e\mathbf{E}$ e trascurare la forza $\frac{e}{c}$ [vH] del campo magnetico. In questo caso, si può trascurare anche l'effetto dello spostamento della carica quando essa oscilla sotto l'azione del campo. Se la carica oscilla intorno all'origine delle coordinate, si può allora ritenere che essa si trova costantemente sotto l'azione del campo presente nell'origine delle coordinate, cioè

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos (\omega t - \alpha).$$

Siccome le equazioni del moto della carica hanno la forma:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E},$$

e il suo momento di dipolo è $\mathbf{d} = e\mathbf{r}$, si ha

$$\ddot{\mathbf{d}} = \frac{e^2}{m}\mathbf{E}. \tag{78,2}$$

Per calcolare la radiazione diffusa, è comodo utilizzare la formula (67,7) per la radiazione di dipolo; il che è lecito perché la velocità acquisita dalla carica è supposta piccola. Notiamo anche che la frequenza dell'onda emessa dalla carica (cioè dell'onda diffusa) è evidentemente uguale alla frequenza dell'onda incidente.

Sostituendo la (78,2) nella (67,7), troviamo:

$$dI = \frac{e^4}{4\pi m^2 c^3} [\mathbf{E}\mathbf{n}']^2 \, do, \tag{78,3}$$

dove $\mathbf{n}'$ è il vettore unitario nella direzione della diffusione. D'altra parte, il vettore di Poynting dell'onda incidente è uguale a

$$S = \frac{c}{4\pi} E^2.$$

Di qui troviamo la sezione di diffusione nell'angolo solido do:

$$d\sigma = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \operatorname{sen}^2 \theta \, do, \tag{78,4}$$

dove θ è l'angolo tra la direzione della diffusione e la direzione del campo elettrico $\mathbf{E}$ dell'onda incidente. Si vede che la sezione di diffusione da una carica libera non dipende dalla frequenza.

Determiniamo la sezione d'urto totale σ. A questo scopo, prendiamo la direzione di $\mathbf{E}$ per asse polare; allora $do = \operatorname{sen} \theta d\theta d\varphi$, ei ntegrando in $d\theta$ da 0 a π e in $d\varphi$ da 0 a 2π si trova:

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \tag{78,5}$$

(*formula di Thomson*).

Infine, calcoliamo la sezione differenziale $d\sigma$ per il caso in cui l'onda incidente non è polarizzata (luce naturale). Per fare questo si deve mediare la (78,4) su tutte le direzioni del vettore $\mathbf{E}$ nel piano perpendicolare alla direzione di propagazione dell'onda incidente (direzione del vettore d'onda $\mathbf{k}$). Indicando con $\mathbf{e}$ il versore di $\mathbf{E}$, scriviamo:

$$\overline{\operatorname{sen}^2 \theta} = 1 - \overline{(\mathbf{n}'\mathbf{e})^2} = 1 - n'_\alpha n'_\beta \overline{e_\alpha e_\beta}.$$

Utilizzando la formula [1])

$$\overline{e_\alpha e_\beta} = \frac{1}{2} \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}\right) \tag{78,6}$$

otteniamo:

$$\overline{\operatorname{sen}^2 \theta} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{(\mathbf{n}'\mathbf{k})^2}{k^2}\right) = \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \vartheta),$$

dove ϑ è l'angolo tra le direzioni dell'onda incidente e dell'onda diffusa (angolo di diffusione). In tal modo, la sezione di diffusione dell'onda non polarizzata da parte di una carica libera è:

$$d\sigma = \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 (1 + \cos^2 \vartheta) do. \tag{78,7}$$

---

[1]) In effetti, $\overline{e_\alpha e_\beta}$ è un tensore simmetrico di traccia uguale a uno, che, moltiplicato per k_α, dà zero, essendo $\mathbf{e}$ e $\mathbf{k}$ perpendicolari. L'espressione scritta verifica esattamente queste condizioni.

L'effetto di diffusione sulla particella diffondente si manifesta con una forza. Le considerazioni seguenti permettono di convincersene facilmente. L'onda incidente perde in media nell'unità di tempo l'energia $c\overline{W}\sigma$, dove $\overline{W}$ è la densità media di energia e σ la sezione totale. Siccome l'impulso del campo è uguale alla sua energia divisa per la velocità della luce, la quantità d'impulso perduta dall'onda incidente è $\overline{W}\sigma$. D'altra parte, nel sistema di riferimento dove la carica effettua soltanto piccole oscillazioni sotto l'azione della forza $e\mathbf{E}$ e dove la sua velocità v è quindi piccola, il flusso totale d'impulso nell'onda diffusa è uguale, a meno dei termini dell'ordine di v/c, a zero (è stato dimostrato nel § 73 che in un sistema di riferimento dove $v = 0$ la particella non irraggia impulso). Ne risulta che tutto l'impulso perduto dall'onda incidente viene «assorbito» dalla particella diffondente. La forza media $\overline{\mathbf{f}}$ agente sulla particella è uguale al valore medio dell'impulso assorbito nell'unità di tempo, cioè

$$\overline{\mathbf{f}} = \sigma\overline{W}\mathbf{n} \tag{78,8}$$

($\mathbf{n}$ è il vettore unitario nella direzione di propagazione dell'onda incidente). Notiamo che la forza media è una grandezza del secondo ordine rispetto al campo dell'onda incidente, mentre la forza «istantanea» (il cui termine dominante è $e\mathbf{E}$) è del primo ordine rispetto al campo.

Si può ottenere la formula (78,8) anche direttamente, prendendo la media della forza di frenamento (75,10). Il primo termine, proporzionale ad $\dot{\mathbf{E}}$, si annulla quando si prende la media (come pure il valore medio della forza dominante $e\mathbf{E}$). Il secondo termine, invece, dà:

$$\overline{\mathbf{f}} = \frac{2e^4}{3m^2c^4}\overline{E^2}\mathbf{n} = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \cdot \frac{\overline{E^2}}{4\pi}\mathbf{n},$$

che, in virtú della (78,5), coincide con la (78,8).

PROBLEMI

1. Determinare la sezione di diffusione di un'onda polarizzata ellitticamente da parte di una carica libera.

Soluzione. Il campo dell'onda ha la forma $\mathbf{E} = \mathbf{A}\cos(\omega t + \alpha) + \mathbf{B}\,\mathrm{sen}\,(\omega t + \alpha)$, dove $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ sono vettori perpendicolari (vedi § 48). Per analogia con quanto si è fatto nel testo, troviamo:

$$d\sigma = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{[\mathbf{A}\mathbf{n}']^2 + [\mathbf{B}\mathbf{n}']^2}{A^2 + B^2}\, do.$$

2. Determinare la sezione di diffusione di un'onda polarizzatal inearmente da da parte di una carica che compie (sotto l'azione di una forza elastica) piccole oscillazioni (il cosiddetto oscillatore).

Soluzione. L'equazione del moto della carica nel campo dell'onda incidente $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t + \alpha)$ è

$$\ddot{\mathbf{r}} + \omega_0^2 \mathbf{r} = \frac{e}{m} \mathbf{E}_0 \cos(\omega t + \alpha),$$

dove ω_0 è la frequenza delle sue oscillazioni libere. Per le oscillazioni forzate si ha quindi:

$$\mathbf{r} = \frac{e\mathbf{E}_0 \cos(\omega t + \alpha)}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

Determinato $\ddot{\mathbf{d}}$, troviamo:

$$d\sigma = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \operatorname{sen}^2 \theta \, do$$

(θ è l'angolo tra $\mathbf{E}$ ed $\mathbf{n}'$).

3. Determinare la sezione totale per la luce diffusa da un dipolo elettrico che rappresenta dal punto di vista meccanico un rotatore. Si suppone che la frequenza ω dell'onda sia grande rispetto alla frequenza Ω_0 di rotazione libera del dipolo.

Soluzione. Nell'ipotesi $\omega \gg \Omega_0$ si può trascurare la rotazione propria del rotatore e considerare solamente la rotazione forzata sotto l'azione del momento delle forze $[\mathbf{dE}]$ esercitate dall'onda. L'equazione di questo moto è $J\dot{\mathbf{\Omega}} = [\mathbf{dE}]$, dove J è il momento d'inerzia del rotatore e $\mathbf{\Omega}$ la velocità angolare di rotazione. La variazione del vettore momento dipolare, quando esso ruota senza che vari il suo modulo, è data dalla formula $\dot{\mathbf{d}} = [\mathbf{\Omega d}]$. Da queste due equazioni (omettendo il termine contenente il quadrato di $\mathbf{\Omega}$) otteniamo:

$$\ddot{\mathbf{d}} = \frac{1}{J} [[\mathbf{dE}]\mathbf{d}] = \frac{1}{J} \{\mathbf{E}d^2 - (\mathbf{Ed})\,\mathbf{d}\}.$$

Supponendo che tutte le orientazioni del dipolo nello spazio siano ugualmente probabili e prendendo la media di $\ddot{\mathbf{d}}^2$ su tutte le direzioni, otteniamo la sezione totale nella forma

$$\sigma = \frac{16\pi d^4}{9c^4 J^2}.$$

4. Determinare il grado di depolarizzazione di una luce naturale diffusa da una carica libera.

Soluzione. Per ragioni di simmetria, è evidente che le due componenti incoerenti polarizzate della luce diffusa (vedi § 50) saranno polarizzate linearmente: una nel piano di diffusione (il piano passante per il raggio incidente e il raggio diffuso), e l'altra perpendicolarmente a questo piano. Le intensità di queste componenti sono determinate dalle componenti del campo dell'onda incidente nel piano della diffusione ($\mathbf{E}_{\parallel}$) e perpendicolarmente a questo piano ($\mathbf{E}_{\perp}$) e, in virtú della (78,3), sono rispettivamente proporzionali a $[\mathbf{E}_{\parallel}\mathbf{n}']^2 = \overline{E}_{\parallel}^2 \cos^2\vartheta$ e $[\mathbf{E}_{\perp}\mathbf{n}']^2 = \overline{E}_{\perp}^2$ (ϑ è l'angolo di diffusione). Siccome per una luce naturale incidente si ha $\overline{E}_{\parallel}^2 = \overline{E}_{\perp}^2$, il grado di dipolarizzazione (vedi la definizione (50,9)) è

$$\rho = \cos^2\vartheta$$

5. Determinare la frequenza (ω') della luce diffusa da una carica in moto.

Soluzione. In un sistema di coordinate dove la carica è a riposo, la frequenza della luce non varia nella diffusione ($\omega = \omega'$). Si può quindi scrivere questa

relazione in forma invariante

$$k'_i u'^i = k_i u^i,$$

dove u^i è il quadrivelocità della carica. Di qui senza alcuna difficoltà ricaviamo:

$$\omega' \left(1 - \frac{v}{c} \cos\theta'\right) = \omega \left(1 - \frac{v}{c} \cos\theta\right),$$

dove θ e θ' sono gli angoli formati dalle onde incidente e diffusa con la direzione del moto (v è la velocità della carica).

6. Determinare la distribuzione angolare della diffusione di un'onda polarizzata rettilineamente da parte di una carica che si muove a velocità arbitraria v nella direzione di propagazione dell'onda.

Soluzione. La velocità **v** della particella è perpendicolare ai campi **E** ed **H** dell'onda incidente, e perciò perpendicolare anche all'accelerazione **w** acquisita dalla particella. L'intensità della diffusione è determinata dalla formula (73,14) nella quale bisogna esprimere l'accelerazione **w** in funzione dei campi **E** ed **H** conformemente alla formula ottenuta nel problema del § 17. Dividendo l'intensità dI per il vettore di Poynting dell'onda incidente, troviamo per la sezione di diffusione la seguente espressione:

$$d\sigma = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{v}{c}\right)^2}{\left(1 - \frac{v}{c} \operatorname{sen}\theta \cos\varphi\right)^6} \left[\left(1 - \frac{v}{c} \operatorname{sen}\theta \cos\varphi\right)^2 - \right.$$
$$\left. - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \cos^2\theta\right] do,$$

dove, ora, θ e φ sono l'angolo polare e l'azimut della direzione **n'** rispetto ad un sistema di coordinate con l'asse delle z diretto lungo **E** e l'asse delle x lungo **v** ($\cos(\mathbf{n}', \mathbf{E}) = \cos\theta$, $\cos(\mathbf{n}', \mathbf{v}) = \operatorname{sen}\theta \cos\varphi$).

7. Determinare il moto di una carica sotto l'azione della forza media con la quale l'onda diffusa agisce sulla carisa.

Soluzione. La forza (78,8) e, di conseguenza, anche la velocità del moto considerato sono dirette nella direzione della propagazione dell'onda incidente (asse delle x). Nel sistema di riferimento ausiliario K_0 dove la carica è in quiete (ricordiamo che si tratta della media di un moto rispetto ad un periodo di oscillazioni piccole), la forza agente sulla carica è $\sigma \overline{W}_0$, e l'accelerazione acquisita dalla carica sotto l'azione di questa forza è

$$w_0 = \frac{\sigma}{m} \overline{W}_0$$

l'indice zero caratterizza le grandezze nel sistema di riferimento K_0). Il passaggio al sistema iniziale K (dove la carica si muove con la velocita v) si realizza applicando la formula dedotta nel problema del § 7 e la formula (47,7); si ottiene in definitiva:

$$\frac{d}{dt} \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \frac{dv}{dt} = \frac{\overline{W}_\sigma}{m} \frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}.$$

Integrando questa equazione troviamo:

$$\frac{\overline{W}_\sigma}{mc}t=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}\cdot\frac{2-\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}}-\frac{2}{3},$$

Quest'espressione definisce implicitamente la velocità $v = dx/dt$ come funzione del tempo (la costante d'integrazione è stata scelta in maniera tale che $v = 0$ per $t = 0$).

8. Determinare la sezione di diffusione di un'onda polarizzata linearmente da parte di un oscillatore, tenendo conto del frenamento per emissione di radiazione.

Soluzione. Scriviamo l'equazione del moto della carica nel campo dell'onda incidente nella forma seguente:

$$\ddot{\mathbf{r}}+\omega_0^2\mathbf{r}=\frac{e}{m}\mathbf{E}_0e^{-i\omega t}+\frac{2e^2}{3mc^3}\dddot{\mathbf{r}}.$$

Nella forza di frenamento si può approssimativamente porre $\dddot{\mathbf{r}}=-\omega_0^2\mathbf{r}$; si ottiene allora:

$$\ddot{\mathbf{r}}+\gamma\dot{\mathbf{r}}+\omega_0^2\mathbf{r}=\frac{e}{m}\mathbf{E}_0e^{-i\omega t},$$

dove $\gamma=\frac{2e^2}{3mc^3}\omega_0^2$. Di qui ricaviamo:

$$\mathbf{r}=\frac{e}{m}\mathbf{E}_0\frac{e^{-i\omega t}}{\omega_0^2-\omega^2-i\omega\gamma}.$$

La sezione di diffusione è:

$$\sigma=\frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2}.$$

§ 79. *Diffusione di onde di basse frequenze*

La diffusione di onde elettromagnetiche da parte di un sistema di cariche si distingue dalla diffusione da parte di una sola carica (immobile), in primo luogo per il fatto che, in conseguenza del moto proprio delle cariche nel sistema, la frequenza della radiazione diffusa può essere differente da quella dell'onda incidente. Accanto alla frequenza ω dell'onda incidente, lo sviluppo spettrale della radiazione diffusa contiene anche frequenze ω', differenti da ω per una qualsiasi delle frequenze proprie del moto del sistema diffusore. La diffusione acompagnata da cambiamento di frequenza si dice *incoerente* a differenza della diffusione *coerente* che avviene senza cambiamento di frequenza.

Supponendo debole il campo dell'onda incidente, possiamo rappresentare la densità di corrente nella forma $\mathbf{j} = \mathbf{j}_0 + \mathbf{j}'$, dove $\mathbf{j}_0$ è la densità di corrente in assenza di campo esterno e $\mathbf{j}'$ la variazione della corrente sotto l'azione dell'onda incidente. Ciò premesso, anche il potenziale vettore (ed altre grandezze) del campo del sistema potrà essere scritto nella forma $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}'$, dove $\mathbf{A}_0$ ed $\mathbf{A}'$

sono determinati dai punti $\mathbf{j}_0$ e $\mathbf{j}'$: il potenziale $\mathbf{A}'$ descrive l'onda diffusa dal sistema.

Consideriamo la diffusione di un'onda la cui frequenza ω è piccola rispetto a tutte le frequenze proprie del sistema. La diffusione comprenderà sia una parte coerente che incoerente, ma noi esamineremo qui soltanto la diffusione coerente.

Per calcolare il campo di un'onda diffusa, quando la frequenza ω è assai bassa, si può sempre ricorrere allo sviluppo dei potenziali ritardati, come abbiamo già fatto nei §§ 67 e 71, anche se le velocità delle particelle nel sistema non sono piccole rispetto alla velocità della luce. In effetti, perché lo sviluppo dell'integrale

$$\mathbf{A}' = \frac{1}{cR_0} \int \mathbf{j}'_{t-\frac{R_0}{c}+\frac{\mathbf{rn}'}{c}} dV \tag{79,1}$$

sia legittimo è necessario solamente che il tempo $\mathbf{rn}'/c \sim a/c$ sia piccolo rispetto al tempo $\sim 1/\omega$; per ω ($\omega \ll c/a$) sufficientemente piccole, questa condizione è soddisfatta quali che siano le velocità delle particelle nel sistema.

I primi termini dello sviluppo danno:

$$\mathbf{H}' = \frac{1}{c^2 R_0} \{[\ddot{\mathbf{d}}'\mathbf{n}'] + [[\ddot{\mathbf{m}}'\mathbf{n}']\,\mathbf{n}']\},$$

dove $\mathbf{d}'$, $\mathbf{m}'$ sono i contributi ai momenti di dipolo e magnetico del sistema, dovuti alla radiazione incidente sul sistema. I termini successivi dello sviluppo contengono le derivate rispetto al tempo di ordine superiore al secondo, e quindi le omettiamo.

La componente $\mathbf{H}'_\omega$ della decomposizione spettrale del campo dell'onda diffusa, uguale alla frequenza della radiazione incidente, è determinata dalla stessa formula, dove tutte le grandezze debbono essere sostituite dalle loro componenti di Fourier: $\ddot{\mathbf{d}}'_\omega = -\omega^2\mathbf{d}'_\omega$, $\ddot{\mathbf{m}}'_\omega = -\omega^2\mathbf{m}'_\omega$; si ottiene allora:

$$\mathbf{H}'_\omega = \frac{\omega^2}{c^2 R_0} \{[\mathbf{n}'\mathbf{d}'_\omega] + [\mathbf{n}'\,[\mathbf{m}'_\omega\mathbf{n}']]\}. \tag{79,2}$$

I termini successivi dello sviluppo del campo darebbero grandezze proporzionali ad una potenza piú elevata della bassa frequenza. Se le velocità di tutte le particelle del sistema sono piccole ($v \ll c$), nella (79,1) si può allora trascurare il secondo termine rispetto al primo, perché il momento magnetico contiene il rapporto v/c. Allora

$$\mathbf{H}'_\omega = \frac{1}{c^2 R_0}\,\omega^2\,[\mathbf{n}'\mathbf{d}'_\omega]. \tag{79,3}$$

Se la carica totale del sistema è nulla, per $\omega \to 0$, $\mathbf{d}'_\omega$ e $\mathbf{m}_\omega$ tendono a limiti costanti (se la somma delle cariche fosse differente da zero, per $\omega = 0$, cioè in un campo costante, si metterebbe in moto

anche il sistema in blocco). Per ω piccole ($\omega \ll v/a$), $\mathbf{d}'_\omega$ e $\mathbf{m}'_\omega$ si possono quindi considerare non dipendenti dalla frequenza, in modo che il campo dell'onda diffusa è proporzionale al quadrato della frequenza, mentre la sua intensità è proporzionale a ω^4. In tal modo, nella diffusione di onde di bassa frequenza, la sezione della diffusione coerente è proporzionale alla quarta potenza della frequenza della radiazione incidente[1]).

§ 80 *Diffusione di onde di alte frequenze*

Consideriamo ora la diffusione di onde da un sistema di cariche nel caso in cui la frequenza ω dell'onda sia alta rispetto alle frequenze proprie fondamentali del sistema. L'ordine di grandezza di quest'ultime è $\omega_0 \sim v/a$, in modo che ω deve soddisfare la condizione

$$\omega \gg \omega_0 \sim \frac{v}{a}. \tag{80,1}$$

Partiremo inoltre dal presupposto che le velocità delle cariche all'interno del sistema siano piccole ($v \ll c$).

In base alla condizione (80,1), il periodo del moto delle cariche nel sistema è grande rispetto al periodo dell'onda. Perciò il moto delle cariche nel sistema si può considerare uniforme negli intervalli di tempo dell'ordine del periodo dell'onda. Ciò vuol dire che nello studio della diffusione di onde corte si possono trascurare le interazioni trale cariche nel sistema, che possono essere cioè considerate libere.

In tal modo, nel calcolo della velocità $\mathbf{v}'$ acquisita dalla carica nel campo dell'onda incidente possiamo considerare ciascuna carica del sistema separatamente e scriverne l'equazione del moto nella forma

$$m\frac{d\mathbf{v}'}{dt} = e\mathbf{E} = e\mathbf{E}_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{kr})},$$

dove $\mathbf{k} = \omega\mathbf{n}/c$ è il vettore d'onda dell'onda incidente. Il raggio vettore della carica è, naturalmente, una funzione del tempo. Nell'esponente a secondo membro di questa equazione la velocità di variazione del primo termine col tempo è grande rispetto alla velocità di variazione del secondo (la prima è uguale a ω e la seconda è dell'ordine di $kv \sim v\omega/c \ll \omega$). Di conseguenza, nell'integrazione delle equazioni del moto si può ritenere che nel secondo

---

[1]) Questo risultato è valido di fatto non soltanto per la diffusione della luce da atomi neutri, ma anche da ioni. Essendo la massa del nucleo grande, si può trascurare la diffusione dovuta al moto d'insieme dello ione considerato.

membro r sia costante. Allora

$$\mathbf{v}' = -\frac{e}{i\omega m}\mathbf{E}_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{kr})}, \tag{80,2}$$

Per il potenziale vettore di un'onda diffusa (a grandi distanze dal sistema) in base alla (79,1) si ha:

$$\mathbf{A}' = \frac{1}{cR_0}\sum (e\mathbf{v}')_{t-\frac{R_0}{c}+\frac{\mathbf{rn}'}{c}},$$

dove la sommatoria è estesa a tutte le cariche del sistema. Sostituendo la (80,2) in quest'ultima, troviamo:

$$\mathbf{A}' = -\frac{1}{icR_0\omega} e^{-i\omega\left(t-\frac{R_0}{c}\right)} \mathbf{E}_0 \sum \frac{e^2}{m} e^{-i\mathbf{qr}}, \tag{80,3}$$

dove $\mathbf{q} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}$ è la differenza tra il vettore d'onda dell'onda diffusa $\mathbf{k}' = \omega\mathbf{n}'/c$ e il vettore d'onda $\mathbf{k} = \omega\mathbf{n}/c$ dell'onda incidente[1]). Il valore della somma nella (80,3) deve essere preso nell'istante $t' = t - R_0/c$, perché la variazione di r nel tempo $\mathbf{rn}'/c$ può essere trascurata, dato che le velocità delle particelle sono supposte piccole (per brevità, omettiamo, come al solito, l'indice t'). Il valore assoluto del vettore q è

$$q = 2\frac{\omega}{c}\operatorname{sen}\frac{\vartheta}{2}, \tag{80,4}$$

dove ϑ è l'angolo di diffusione.

Quando si ha una diffusione da parte di un atomo (o di una molecola) nella somma della (80,3) si possono trascurare i termini corrispon denti ai nuclei, poiché le loro masse sono grandi rispetto a quelle degli elettroni. Poiché piú avanti verrà considerato questo caso, portiamo fuori dal segno di sommatoria il fattore e^2/m, dove e ed m rappresentano la carica e la massa dell'elettrone.

In virtú della (66,3) per il campo $\mathbf{H}'$ dell'onda diffusa troviamo:

$$\mathbf{H}' = \frac{[\mathbf{E}_0\mathbf{n}']}{c^2R_0} e^{-i\omega\left(t-\frac{R_0}{c}\right)} \frac{e^2}{m}\sum e^{-i\mathbf{qr}}. \tag{80,5}$$

Il flusso d'energia nell'angolo solido nella direzione di $\mathbf{n}'$ vale:

$$\frac{c\,|\mathbf{H}'|^2}{8\pi} R_0^2\, do = \frac{e^4}{8\pi c^3 m^2}[\mathbf{n}'\mathbf{E}_0]^2 \left|\sum e^{-i\mathbf{qr}}\right|^2 do.$$

Dividendo questa espressione per il flusso d'energia $c\,|\,\mathbf{E}_0\,|^2/8\pi$ dell'onda incidente ed introducendo l'angolo θ tra la direzione del campo E dell'onda incidente e la direzione della diffusione, troviamo

---

[1]) Piú precisamente, il vettore d'onda è $\mathbf{k}' = \omega'\mathbf{n}'/c$, dove la frequenza ω' dell'onda diffusa può essere differente da ω. Tuttavia, nel caso considerato delle alte frequenze, si può trascurare la differenza $\omega' - \omega \sim \omega_0$.

in definitiva la sezione di diffusione nella forma

$$d\sigma = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \overline{\left|\sum e^{-i\mathbf{qr}}\right|^2} \operatorname{sen}^2\theta\, do. \tag{80,6}$$

Il trattino indica la media rispetto al tempo, cioè la media rispetto al moto delle cariche nel sistema; è necessario prendere la media perché la diffusione è considerata in intervalli di tempo grandi rispetto al periodo del moto delle cariche nel sistema.

Per la lunghezza d'onda della radiazione incidente dalla condizione (80,1) si deduce la disuguaglianza $\lambda \ll ac/v$. Per quanto riguarda il valore relativo di λ ed a, sono possibili i due casi limiti: $\lambda \gg a$ e $\lambda \ll a$. In entrambi i casi la formula generale (80,6) si semplifica sensibilmente.

Per $\lambda \gg a$ nell'espressione (80,6) si ha $\mathbf{qr} \ll 1$; perché $q \sim 1/\lambda$, $r \sim a$. Sostituendo perciò $e^{i\mathbf{qr}}$ con 1 abbiamo:

$$d\sigma = Z^2 \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \operatorname{sen}^2\theta\, do, \tag{80,7}$$

cioè la diffusione è proporzionale al quadrato del numero Z di elettroni nell'atomo.

Passiamo al caso $\lambda \ll a$. Nel quadrato della somma nella (80,6) si hanno, accanto ai quadrati del modulo di ciascun termine, uguali a 1, dei prodotti tipo $e^{i\mathbf{q}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)}$. Quando si prende la media rispetto al moto delle cariche, cioè rispetto alla loro disposizione nel sistema, le differenze $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ percorrono valori in un intervallo dell'ordine di a. Siccome $q \sim 1/\lambda$, $\lambda \ll a$, il fattore esponenziale $e^{i\mathbf{q}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)}$ è in questo intervallo una funzione oscillante rapidamente, e il suo valore medio è nullo. In tal modo, per $\lambda \ll a$ la sezione di diffusione è uguale a

$$d\sigma = Z \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \operatorname{sen}^2\theta\, do, \tag{80,8}$$

cioè proporzionale al numero atomico. Notiamo che questa formula è inapplicabile nel caso in cui gli angoli di diffusione siano piccoli ($\vartheta \sim \lambda/a$), perché, allora $q \sim \vartheta/\lambda \sim 1/a$, e l'esponente $\mathbf{qr}$ non è grande rispetto a 1.

Per determinare la sezione della diffusione coerente, dobbiamo separare la parte del campo dell'onda diffusa di frequenza ω. L'espressione (80,5) del campo dipende dal tempo mediante il fattore $e^{-i\omega t}$ e dipende inoltre dal tempo anche la somma $\sum e^{-i\mathbf{qr}}$. Quest'ultima circostanza fa sí che il campo dell'onda diffusa contiene, oltre alla frequenza ω, altre frequenze ancora (anche se vicine). La parte del campo che contiene la frequenza ω (cioè dipende dal tempo soltanto mediante il fattore $e^{-i\omega t}$) si ottiene, evidentemente, prendendo la media rispetto al tempo della somma $\sum e^{-i\mathbf{qr}}$. Consegue che l'espressione per la sezione della diffusione coe-

rente $d\sigma_{\text{coer}}$ si distingue dalla sezione totale $d\sigma$ per il fatto che in luogo del valore medio del quadrato del modulo della somma essa contiene il quadrato del modulo del valore medio della somma:

$$d\sigma_{\text{coer}} = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \overline{\left|\sum e^{-i\mathbf{qr}}\right|^2} \operatorname{sen}^2\theta\, do. \tag{80,9}$$

È utile notare che questo valore medio della somma non è altro (a meno di un coefficiente) che la componente spaziale di Fourier della distribuzione media $\rho(\mathbf{r})$ della densità della carica elettrica nell'atomo:

$$e\,\overline{\sum e^{-i\mathbf{qr}}} = \int \rho(\mathbf{r})\, e^{-i\mathbf{qr}}\, dV = \rho_{\mathbf{q}}. \tag{80,10}$$

Se $\lambda \gg a$, possiamo sostituire di nuovo $e^{-i\mathbf{qr}}$ con 1_a in modo che

$$d\sigma_{\text{coer}} = Z^2 \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \operatorname{sen}^2\theta\, do. \tag{80,11}$$

Confrontando con la sezione totale (80,7), vediamo che $d\sigma_{\text{coer}} = d\sigma$, cioè che tutta la diffusione è interamente coerente.

Se, al contrario, $\lambda \ll a$, allora, quando si prende la media nella (80,9), tutti i termini della somma (in quanto valori medi di funzioni del tempo oscillanti rapidamente) scompaiono, in modo che $d\sigma_{\text{coer}} = 0$. In questo caso quindi la diffusione è interamente incoerente.

Capitolo X

PARTICELLA IN UN CAMPO GRAVITAZIONALE

§ 81. *Campo gravitazionale in meccanica non relativistica*

I *campi gravitazionali* godono della proprietà fondamentale seguente: tutti i corpi, indipendentemente dalla massa, si muovono, in essi allo stesso modo (a parità di condizioni iniziali).

Per esempio, le leggi della caduta libera nel campo d'attrazione della Terra sono le stesse per tutti i corpi: quali che siano le loro masse, tutti acquisiscono la stessa accelerazione.

Questa proprietà dei campi gravitazionali permette di stabilire un'analogia sostanziale tra il moto dei corpi in un campo gravitazionale e il moto dei corpi che non si trovano in un campo esterno ma che riferiti ad un sistema di riferimento non inerziale. In effetti, in un sistema di riferimento inerziale il moto libero di tutti i corpi avviene in modo rettilineo ed uniforme, e se, per esempio, le loro velocità erano nell'istante iniziale uguali, resteranno uguali per tutto il tempo. È evidente dunque che se si considera questo moto in un sistema non inerziale dato, allora relativamente a questo sistema tutti i corpi si muoveranno allo stesso modo.

Quindi, le proprietà del moto in un sistema di riferimento non inerziale sono identiche a quelle che si hanno in un sistema inerziale in presenza di un campo gravitazionale. In altri termini, un sistema di riferimento non inerziale è equivalente ad un campo gravitazionale; questa affermazione costituisce il cosidetto *principio di equivalenza*.

Consideriamo, per esempio, il moto in un sistema di riferimento uniformemente accelerato. I corpi di masse arbitrarie, che si muovono liberamente in un tale sistema, possiederanno evidentemente, relativamente a questo sistema, una accelerazione costante uguale ed opposta all'accelerazione del sistema stesso. Tale è pure il moto in un campo gravitazionale uniforme e costante, nel campo d'attrazione della Terra per esempio (in regioni piccole dove il campo può essere considerato uniforme). Cosí, un sistema di riferimento uniformemente accelerato è equivalente ad un campo esterno uniforme e costante. Nello stesso senso un sistema di riferimento in moto traslatorio accelerato non uniformemente è equivalente ad un campo gravitazionale uniforme ma variabile.

Tuttavia, i campi ai quali sono equivalenti sistemi di riferimento non inerziali non sono del tutto identici ai campi gravitazionali « reali», esistenti anche nei sistemi inerziali. Esiste tra di essi una differenza sostanziale per ciò che concerne le loro proprietà all'infinito. Ad una distanza infinita dai corpi che lo generano, il campo gravitazionale « reale » tende sempre a zero. Al contrario, i campi ai quali sono equivalenti sistemi di riferimento non inerziali, crescono illimitatamente all'infinito, oppure, al massimo, tendono ad un valore finito. Cosí, le forze centrifughe, che nascono in un sistema di riferimento rotante, tendono all'infinito quando ci si allontana dall'asse di rotazione; un campo equivalente ad un sistema di riferimento in un moto rettilineo lo stesso è identico in tutto lo spazio, compreso l'infinito.

I campi equivalenti a sistemi di riferimento non inerziali scompaino passando ad un sistema inerziale. Contrariamente a ciò, i campi gravitazionali « reali » (esistenti anche in un sistema inerziale) non si possono eliminare mediante una scelta del sistema di riferimento. Questo risulta già evidente dal differente comportamento all'infinito dei campi gravitazionali « reali » e dei campi equivalenti a sistemi di riferimento non inerziali; poiché questi ultimi all'infinito non tendono a zero, è chiare che non è possibile mediante una scelta del sistema di riferimento eliminare i campi « reali » che si annulla all'infinito.

La sola cosa che si possa ottenere con una scelta adeguata del sistema di riferimento, è di eliminare il campo gravitazionale in una regione dello spazio sufficientemente piccola perché in essa il campo possa essere condsiderato uniforme. Questo può essere ottenuto scegliendo un sistema in moto la cui accelerazione sia uguale all'accelerazione che una particella acquisterebbe se fosse collocata nella regione considerata del campo.

Il moto di una particella in un campo gravitazionale è definito, in meccanica non relativistica, da una lagrangiana che si scrive (in un sistema di riferimento inerziale):

$$L = \frac{mv^2}{2} - m\varphi, \tag{81,1}$$

dove φ è una funzione delle coordinate e del tempo, che caratterizza il campo e si dice *potenziale gravitazionale*[1]). Le equazioni del moto ricavate dalla (81,1) hanno la forma:

$$\dot{\mathbf{v}} = -\operatorname{grad} \varphi. \tag{81,2}$$

Esse non contengono la massa o qualche altra costante che caratterizzi le proprietà della particella. Questo fatto è l'espressione della proprietà fondamentale dei campi gravitazionali.

[1]) In seguito, non avremo piú bisogno di utilizzare il potenziale elettromagnetico φ, in modo che indicando il potenziale gravitazionale con la stessa lettera non si avranno equivoci.

§ 82. *Campo gravitazionale in meccanica relativistica*

La proprietà fondamentale dei campi gravitazionali, e cioè che tutti i corpi si muovono in essi nello stesso modo, resta valida anche in meccanica relativistica. Rimane, di conseguenza, anche l'analogia tra i campi gravitazionali e i sistemi di riferimento non inerziali. È perciò naturale, nello studio delle proprietà dei campi gravitazionali in meccanica relativistica, partire anche in questo caso da questa analogia.

In un sistema di riferimento inerziale di coordinate cartesiane, l'intervallo ds è determinato dalla relazione

$$ds^2 = c^2\, dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

Nel passaggio a qualsiasi altro sistema di riferimento inerziale (cioè nelle trasformazioni di Lorentz) l'intervallo, come è noto, conserva lo stesso valore. Se si passa però ad un sistema di riferimento non inerziale, ds^2 non è piú esprimibile tramite i quadrati dei differenziali delle quattro coordinate.

Per esempio, se si passa ad un sistema di coordinate in rotazione uniforme

$$x = x' \cos \Omega t - y' \operatorname{sen} \Omega t, \quad y = x' \operatorname{sen} \Omega t + y' \cos \Omega t, \quad z = z'$$

(Ω è la velocità angolare di rotazione, diretta lungo l'asse delle z), l'intervallo assume la forma

$$ds^2 = [c^2 - \Omega^2 (x'^2 + y'^2)]\, dt^2 - dx'^2 - dy'^2 - \\ - dz'^2 + 2\Omega y'\, dx'\, dt - 2\Omega x'\, dy'\, dt.$$

Quale che sia la legge di trasformazione del tempo, questa espressione non può essere ridotta alla somma dei quadrati dei differenziali delle quattro coordinate.

Di conseguenza, in un sistema di riferimento non inerziale il quadrato dell'intervalo sarà una certa forma quadratica generale dei differenziali delle coordinate, cioè

$$ds^2 = g_{ik}\, dx^i\, dx^k, \tag{82,1}$$

dove g_{ik} sono funzioni delle coordinate spaziali x^1, x^2, x^3 e della coordinata temporale x^0. Il sistema quadridimensionale di coordinate x^0, x^1, x^2, x^3 è quindi curvilineo allorché si passa a sistemi di riferimento non inerziali. Le grandezze g_{ik}, che determinano tutte le proprietà della geometria in ciascun sistema di coordinate curvilineo dato, definiscono la cosiddetta *metrica* dello spazio-tempo.

È evidente che le grandezze g_{ik} possono sempre essere considerate simmetriche rispetto agli indici i e k ($g_{ik} = g_{ki}$), poiché sono determinate dalla forma simmetrica (82,1), dove g_{ik} e g_{ki} en-

trano con lo stesso fattore $dx^i dx^k$. Nel caso generale si hanno dunque soltanto 10 grandezze g_{ik} distinte: quattro con indici uguali e $4 \cdot 3/2 = 6$ con indici diversi. In un sistema di riferimento inerziale, quando si ricorre alle coordinate spaziali cartesiane $x^{1,2,3} = x, y, z$ e al tempo $x^0 = ct$, le grandezze g_{ik} sono uguali a:

$$g_{00} = 1, \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1, \quad g_{ik} = 0 \text{ per } i \neq k. \qquad (82,2)$$

Un sistema di coordinate (quadridimensionale) con tali valori di g_{ik} lo chiameremo *galileiano*.

Nel paragrafo precedente è stato detto che i sistemi di riferimento non inerziali sono equivalenti a dei campi di forza. Si vede ora che in meccanica relativistica questi campi sono determinati dalle grandezze g_{ik}.

La stessa cosa si può dire dei campi gravitazionali « reali ». Ogni campo gravitazionale non è altro che una modificazione della metrica dello spazio-tempo e pertanto è determinato dalle grandezze g_{ik} Questa circostanza fondamentale significa che le proprietà geometriche dello spazio-tempo (cioè la sua metrica) sono determinate da fenomeni fisici, e non sono proprietà invariabili dello spazio e del tempo.

La teoria dei campi gravitazionali costruita sulla base della teoria della relatività è detta *relatività generale*. Essa fu elaborata da Einstein (che ne diede la formulazione definitiva nel 1916), ed è forse la piú elegante delle teorie fisiche esistenti. È degno di nota il fatto che Einstein costruí la sua teoria in modo puramente deduttivo e solamente in seguito essa è stata confermata da osservazioni astronomiche.

Come in meccanica non relativistica vi è una differenza radicale tra i campi gravitazionali « reali » e i campi che sono equivalenti a sistemi di riferimento non inerziali. Quando si passa ad un sistema di riferimento non inerziale, la forma quadratica assume l'aspetto (82,1), cioè le grandezze g_{ik} si ricavano dai loro valori galileiani (82,2) mediante una trasformazione delle coordinate e, di conseguenza, con la trasformazione inversa possono essere ridotte ai valori galileiani in tutto lo spazio. La forma (82,2) delle g_{ik} è molto particolare, come si vede già dal fatto che è impossibile, in generale, ridurre le 10 grandezze g_{ik} ad una forma assegnata mediante una trasformazione di sole quattro coordinate.

Un campo gravitazionale reale non può essere eliminato con nessuna trasformazione delle coordinate. In altri termini, in presenza di un campo gravitazionale, lo spazio-tempo è tale che le g_{ik}, che ne determinano la metrica, non possono essere ridotte, con trasformazione di coordinate, alla forma galileiana contemporaneamente in tutto lo spazio. Un tale spazio-tempo è detto *curvo*, contrariamente allo spazio-tempo *piatto* dove questa riduzione è possibile.

È tuttavia possibile, con una appropriata trasformazione delle coordinate, ridurre le g_{ik} ad una forma galileiana in un punto arbitrario di nuo spazio-tempo non galileiano: basta ridurre a forma diagonale una forma quadratica a coefficienti costanti (i valori di g_{ik} nel punto dato). Chiameremo un tale sistema di coordinate sistema *galileiano* per il punto dato[1]).

Notiamo che, ridotta alla forma diagonale nel punto dato, la matrice delle g_{ik} ha un valore principale positivo e tre valori principali negativi (l'insieme di questi segni costituisce la *segnatura* della matrice). Ne risulta, in particolare, che il determinante g, costituito dalle grandezze g_{ik}, in uno spazio-tempo reale è sempre negativo:

$$g < 0. \tag{82,3}$$

Un cambiamento della metrica dello spazio-tempo significa anche un cambiamento della metrica propriamente spaziale. A g_{ik} galileiane in uno spazio-tempo piatto corrisponde la geometria euclidea dello spazio. In un campo gravitazionale la geometria dello spazio diventa non euclidea. Ciò riguarda sia i campi gravitazionali « reali », nei quali lo spazio-tempo è « curvo », che i campi originati da un sistema di riferimento non inerziale il cui spazio-tempo è piatto.

La questione della geometria spaziale in un campo gravitazionale verrà esaminata piú dettagliatamente nel § 84. Limitiamoci qui a fare un semplice ragionamento che spiega però chiaramente perché è inevitabile che le proprietà non euclidee dello spazio compaiono quando si passa ad un sistema di riferimento non inerziale. Consideriamo due sistemi di riferimento l'uno dei quali (K) è inerziale e l'altro (K') ruota uniformemente rispetto a K intorno all'asse comune z. Una circonferenza nel piano xy del sistema K (di centro nell'origine delle coordinate) può essere considerata anche come una circonferenza nel piano $x'y'$ del sistema K'. Misurando la lunghezza della circonferenza e del suo diametro con un metro nel sistema K, otteniamo dei valori il cui rapporto è π, dato che nel sistema di riferimento inerziale la geometria è euclidea. Supponiamo ora che le misure siano fatte con un metro fisso rispetto a K'. Osservando questo processo dal sistema K, troviamo che il metro applicato tangenzialmente alla circonferenza subisce la contrazione di Lorentz mentre resta inalterato quando è applicato radialmente. Ne segue chiaramente che il rapporto della lunghezza della circonferenza al suo diametro fornito da una tale misura sarà maggiore di π.

[1]) Per evitare malintesi, diciamo subito che la scelta di un tale sistema di coordinate non significa ancora l'eliminazione del campo gravitazionale nel corrispondente elemento infinitesimale di 4-volume. Una tale eliminazione, che è pure sempre possibile in virtú del principio di equivalenza, significa qualcosa di piú (vedi § 87).

Nel caso generale di un campo gravitazionale variabile arbitrario, la metrica dello spazio non soltanto è non euclidea, ma varia inoltre con il tempo. Ciò vuol dire che i rapporti tra le diverse distanze geometrice variano con il tempo. Ne segue che la disposizione di « particelle di prova », poste nel campo, non può restare inalterata in nessun sistema di coordinate[1]). Cosí, se le particelle sono disposte lungo una qualsiasi circonferenza e lungo il suo diametro, allora, poiché il rapporto tra la lunghezza della circonferenza e il diametro non è uguale a π e varia con il tempo, è chiaro che se le distanze tra le particelle lungo il diametro restano invariate, debbono per forza variare le distanze tra le particelle periferiche, e viceversa. In tal modo, l'immobilità relativa di un sistema di corpi nella relatività generale è assolutamente impossibile.

Questa circostanza cambia sostanzialmente la nozione stessa di sistema di riferimento in relatività generale rispetto al suo significato in relatività ristretta. In quest'ultima, con un sistema di riferimento si intendeva un insieme di corpi in quiete gli uni rispetto agli altri, vincolati rigidamente. In presenza di un campo gravitazionale variabile tali sistemi di corpi non esistono e per determinare esattamente la posizione della particella nello spazio, è necessario, per essere rigorosi, avere una quantità infinita di corpi che occupano come un mezzo continuo tutto lo spazio. Un tale sistema di corpi, a ciascuno dei quali è vincolato un orologio che segna un tempo arbitrario, rappresenta esattamente un sistema di riferimento nella relatività generale.

Poiché la scelta del sistema di riferimento è arbitraria, le leggi della natura debbono essere espresse in relatività generale in un modo, formalmente idoneo per ogni sistema di coordinate quadridimensionale (o, come si usa dire, in forma *covariante*). Tuttavia, questa circostanza non significa, naturalmente, l'equivalenza fisica di tutti questi sistemi di riferimento (simile all'equivalenza fisica di tutti i sistemi di riferimento inerziali in relatività ristretta). Al contrario, la descrizione concreta dei fenomeni fisici, comprese le proprietà del moto dei corpi, è diversa in tutti i diversi sistemi di riferimento.

§ 83. Coordinate curvilinee

Poiché nello studio dei campi gravitazionali è necessario considerare i fenomeni in sistemi di riferimento arbitrari, nasce la necessità di sviluppare la geometria quadridimensionale in una forma,

[1]) Ad essere rigorosi, il numero di particelle deve essere superiore a quattro. Siccome con sei segmenti tra di esse si piò costruire un tetraedro, si può sempre, con una definizione appropriata del sistema di riferimento, fare sí che un sistema di quattro particelle formi un tetraedro rigido. A maggior ragione, è possibile determinare la rigidità di un sistema di tre o di due particelle.

valida in coordinate arbitrarie. A questo problema sono dedicati i §§ 83, 85, 86.

Consideriamo una trasformazione di un sistema di coordinate x^0, x^1, x^2, x^3 in un altro x'^0, x'^1, x'^2, x'^3:

$$x^i = f^i(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3),$$

dove f^i sono delle funzioni. In una trasformazione di coordinate, i loro differenziali si trasformano secondo le formule

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} dx'^k. \tag{83,1}$$

Ogni insieme di quattro grandezze A^i che in una trasformazione di coordinate si trasformano come i differenziali delle coordinate si chiama *quadrivettore controvariante*:

$$A^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} A'^k. \tag{83,2}$$

Sia φ uno scalare. Le derivate $\partial\varphi/\partial x^i$, in una trasformazione di coordinate, si trasformano secondo le formule

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x^i} = \frac{\partial\varphi}{\partial x'^k} \frac{\partial x'^k}{\partial x^i}, \tag{83,3}$$

differenti dalle formule (83,2). Ogni insieme di quattro grandezze A_i che in una trasformazione di coordinate, si trasformano come le derivate di uno scalare si chiama *quadrivettore covariante*:

$$A_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} A'_k. \tag{83,4}$$

In modo analogo si definiscono i 4-tensori dei diversi ranghi. Per esempio, si chiama 4-tensore controvariante di rango due A^{ik} un insieme di 16 grandezze che si trasformano come i prodotti di due vettori controvarianti, cioè secondo la legge

$$A^{ik} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^l} \frac{\partial x^k}{\partial x'^m} A'^{lm}. \tag{83,5}$$

Un tensore covariante di rango due A_{ik} si trasforma secondo la legge

$$A_{ik} = \frac{\partial x'^l}{\partial x^i} \frac{\partial x'^m}{\partial x^k} A'_{lm}, \tag{83,6}$$

e un 4-tensore misto A^i_k si trasforma come

$$A^i_k = \frac{\partial x^i}{\partial x'^l} \frac{\partial x'^m}{\partial x^k} A'^l_m. \tag{83,7}$$

Le definizioni date rappresentano una generalizzazione naturale delle definizioni dei quadrivettori e dei 4-tensori in coordinate gali-

leiane (§ 6); anche secondo queste ultime i differenziali dx^i e le derivate $\partial\varphi/dx^i$ formano rispetttivamente un quadrivettore controvariante e un quadrivettore covariante[1]).

Le regole di formazione dei 4-tensori per moltiplicazione e contrazione di prodotti di altri 4-tensori in coordinate curvilinee restano le stesse che in coordinate galileiane. È facile, per esempio, provare che, in virtú delle leggi di trasformzione (83,2) e (83,4), il prodotto scalare A^iB_i di due quadrivettori è un invariante:

$$A^iB_i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^l}\frac{\partial x'^m}{\partial x^i}A'^lB'_m = \frac{\partial x'^m}{\partial x'^l}A'^lB'_m = A'^lB'_l.$$

Nel passaggio a coordinate curvilinee non cambia nemmeno la definizione del 4-tensore unità δ^i_k: le sue componenti sono quindi $\delta^i_k = 0$ per $i \neq k$, e uguali a 1 per $i = k$. Se A^k è un quadrivettore, moltiplicando per δ^i_k avremo:

$$A^k\delta^i_k = A^i,$$

cioè otterremo di nuovo un quadrivettore; questa è la dimostrazione che δ^i_k è un tensore.

Il quadrato dell'elemento di lunghezza in coordinate curvilinee è una forma quadratica nei differenziali

$$ds^2 = g_{ik}dx^idx^k, \tag{83,8}$$

dove g_{ik} sono funzioni delle coordinate; le g_{ik} sono simmetriche rispetto agli indici i e k:

$$g_{ik} = g_{ki}. \tag{83,9}$$

Siccome il prodotto (contratto) di g_{ik} per il tensore controvariante $dx^i\,dx^k$ è uno scalare, le g_{ik} formano un tensore covariante, detto *tensore metrico*.

Due tensori A_{ik} e B^{ik} sono detti inversi l'uno dell'altro se

$$A_{ik}B^{kl} = \delta^l_i.$$

In particolare, si chiama tensore metrico controvariante g^{ik} il tensore inverso di g_{ik}, e cioè

$$g_{ik}g^{kl} = \delta^l_i. \tag{83,10}$$

Una stessa grandezza fisica vettoriale può essere rappresentata sia in componenti controvarianti che covarianti. È evidente che le uniche grandezze che possono determinare il legame tra le une e le altre sono le componenti del tensore metrico. Tale legame è dato dalle

---

[1]) Mentre nel sistema galileiano anche le coordinate x^i stesse (e non soltanto i loro differenziali) formano un quadrivettore, ciò non si verifica, naturalmente, in coordinate curvilinee.

formule

$$A^i = g^{ik} A_k, \quad A_i = g_{ik} A^k. \tag{83,11}$$

In un sistema di coordinate galileiano le componenti del tensore metrico sono:

$$g_{ik}^{(0)} = g^{ik(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{83,12}$$

Le formule (83,11) danno inoltre il noto legame: $A^0 = A_0$, $A^{1,\,2,\,3} = -A_{1,\,2,\,3}$[1]).

Quanto finora esposto riguarda anche i tensori. Il passaggio tra le diverse forme di uno stesso tensore fisico viene effettuato mediante il tensore metrico in base alle formule

$$A^i_{\ k} = g^{il} A_{lk}, \quad A^{ik} = g^{il} g^{km} A_{lm},$$

e analogamente per tensori di ogni rango.

Nel § 6 è stato già definito (in coordinate galileiane) lo pseudotensore unitario completamente antisimmetrico e^{iklm}. Cerchiamo ora la sua espressione in un sistema di coordinate curvilineo arbitrario. Indichiamolo ora con E^{iklm}, conservando il simbolo e^{iklm} per le grandezze già definite a partire dal valore $e^{0123} = 1$ (oppure $e_{0123} = -1$).

Siano x'^i ed x^i rispettivamente coordinate galileiane e coordinate curvilinee arbitrarie. In virtú delle regole generali di trasformazione dei tensori abbiamo:

$$E^{iklm} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^p} \frac{\partial x^k}{\partial x'^r} \frac{\partial x^l}{\partial x'^s} \frac{\partial x^m}{\partial x'^t} e^{prst},$$

oppure

$$E^{iklm} = J e^{iklm};$$

dove J è il determinante composto delle derivate dx^i/dx'^p, cioè lo jacobiano della trasformazione delle coordinate galileiane in coordinate curvilinee:

$$J = \frac{\partial (x^0, x^1, x^2, x^3)}{\partial (x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)}.$$

Questo jacobiano si può esprimere mediante il determinante del tensore metrico g_{ik} (nel sistema delle x^i). A questo scopo, scriviamo la

[1]) Ogni volta che per fare un'analogia ci serviamo del sistema di coordinate galileiano, bisogna tener presente che questo sistema può essere scelto solamente per uno spazio quadridimensionale piatto. Se si trattasse di uno spazio quadridimensionale curvo, bisognerebbe parlare allora di un sistema di coordinate galileiano nel dato elemento infinitesimale di 4-volume, sistema che esiste sempre. Questa precisazione non modifica le deduzoni che andremo facendo.

formula di trasformazione del tensore metrico:

$$g^{ik} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^l} \frac{\partial x^k}{\partial x'^m} g^{lm\,(0)}$$

ed eguagliamo i determinanti delle grandezze che si trovano in ambedue i membri di questa uguaglianza. Il determinante del tensore inverso è $|g^{ik}| = 1/g$, mentre il determinante $|g^{lm(0)}| = -1$. Di conseguenza, abbiamo $1/g = -J^2$,per cui $J = 1/\sqrt{-g}$.

Dunque, un tensore unitario antisimmetrico di rango quattro in coordinate curvilinee deve essere definito come segue:

$$E^{iklm} = \frac{1}{\sqrt{-g}} e^{iklm}. \tag{83,13}$$

Abbassando gli indici di questo tensore con l'aiuto della formula

$$e^{prst} g_{ip} g_{kr} g_{ls} g_{mt} = -g e_{iklm},$$

troviamo le componenti covarianti

$$E_{iklm} = \sqrt{-g} e_{iklm}. \tag{83,14}$$

In coordinate galileiane x'^i, l'integrale di uno scalare su $d\Omega' = dx'^0\, dx'^1\, dx'^2\, dx'^3$ è pure uno scalare, cioè l'elemento $d\Omega'$ si comporta nell'integrazione come uno scalare (§ 6). Quando si passa a coordinate curvilinee x^i, l'elemento d'integrazione $d\Omega'$ diventa

$$d\Omega' \to \frac{1}{J} d\Omega = \sqrt{-g}\, d\Omega.$$

In coordinate curvilinee, il prodotto $\sqrt{-g}\, d\Omega$ si comporta dunque come un invariante quando lo si integra in un 4-volume[1]).

Tutto ciò che è stato detto alla fine del § 6 degli elementi d'integrazione su una ipersuperficie, su una superficie e lungo una linea resta valido anche per le coordinate curvilinee, con la sola differenza che cambia alquanto la definizione dei tensori duali. L'elemento d'« area » di una ipersuperficie definita da tre spostamenti infinitesimali è un tensore controvariante antisimmetrico dS^{ikl}; il suo vettore duale si ottiene moltiplicando per il tensore $\sqrt{-g}\, e_{iklm}$,

---

[1]) Se φ è uno scalare, allora la grandezza $\sqrt{-g}\varphi$, che nell'integrazione in $d\Omega$ dà un invariante, si chiama talvolta *densità scalare*. Analogamente si chiamano *densità vettoriale* e *tensoriale* $\sqrt{-g}A^i$, $\sqrt{-g}A^{ik}$, ecc. Queste grandezze, moltiplicate per l'elemento di 4-volume $d\Omega$, danno un vettore o un tensore (ma l'integrale $\int A^i \sqrt{-g} d\Omega$ su una regione finita non può essere, in generale, un vettore, perché le leggi di trasformazione del vettore A^i sono diverse nei diversi punti della regione).

e cioè

$$\sqrt{-g}\, dS_i = -\frac{1}{6} e_{iklm}\, dS^{klm} \sqrt{-g}. \tag{83,15}$$

Analogamente, se df^{ik} è l'elemento di superficie (bidimensionale) costruito su due spostamenti infinitesimali, il suo tensore duale è definito nel modo seguente:[1])

$$\sqrt{-g}\, df^*_{ik} = \frac{1}{2} \sqrt{-g}\, e_{iklm}\, df^{lm}. \tag{83,16}$$

Lasciamo qui, come prima, i simboli dS_i e df^*_{ik} per indicare rispettivamente $\frac{1}{6} e_{klmi}\, dS^{klm}$ e $\frac{1}{2} e_{iklm}\, df^{lm}$ (e non i loro prodotti per $\sqrt{-g}$); le regole dalla (6,14) alla (6,19) di trasformazione di diversi integrali gli uni negli altri restano allora le stesse, perché il loro risultato è di carattere formale, e non è connesso alle proprietà tensoriali delle grandezze corrispondenti. Tra queste formule di trasformazione, avremo bisogno soprattutto della trasformazione di un integrale su ipersuperficie in un integrale in un 4-volume (teorema di Gauss) che si ottiene per sostituzione

$$dS_i \to d\Omega \frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{83,17}$$

84. *Distanze e intervalli di tempo*

Abbiamo già detto che in relatività generale la scelta del sistema di riferimento non è soggatta a limitazioni di sorta: il ruolo delle tre coordinate spaziali x^1, x^2, x^3 puo esser svolto da grandezze qualsiasi che definiscano la posizione dei corpi nello spazio, e la coordinata temporale x^0 può essere determinata da un orologio che segni il tempo in modo arbitrario. Sorge qui il problema: come si possono determinare a partire dai valori delle grandezze x^0, x^1, x^2, x^3 le distanze e gli intervalli di tempo reali?

Determiniamo prima la relazione tra il tempo reale, che indicheremo in seguito con τ, e la coordinata x^0. A questo scopo, considereremo due eventi infinitamente vicini, che avvengono nello

---

[1]) Si suppone che gli elementi dS^{klm} e df^{ik} siano costruiti sugli spostamenti infinitesimali dx^i, dx'^i, dx''^i nella stessa maniera come sono stati definiti nel § 6, a prescindere dal significato geometrico delle coordinate x^i. Resta valido anche il precedente significato formale degli elementi dS_i, df^{*k}_i. In particolare, si ha $dS_0 = dx^1 dx^2 dx^3 = dV$. Conserveremo in seguito il vecchio simbolo dV per il prodotto dei differenziali di tre coordinate spaziali; bisogna ricordare, tuttavia, che l'elemento di un volume geometrico spaziale è dato in coordinate curvilinee non da dV, bensí dal prodotto $\sqrt{\gamma}\, dV$, dove γ è il determinante di un tensore metrico spaziale che verrà definito nel paragrafo seguente.

stesso punto dello spazio. Allora l'intervallo ds^2 tra questi due eventi non è altro che $cd\tau$, dove $d\tau$ è l'intervallo di tempo (reale) tra i due eventi. Ponendo $dx^1 = dx^2 = dx^3 = 0$ nell'espressione generale $ds^2 = g_{ik}\, dx^i dx^k$, troviamo dunque:

$$ds^2 = c^2\, d\tau^2 = g_{00}\, (dx^0)^2,$$

donde

$$d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{g_{00}}\, dx^0, \tag{84,1}$$

o ancora, per il tempo tra due eventi verificatisi nello stesso punto dello spazio,

$$\tau = \frac{1}{c} \int \sqrt{g_{00}}\, dx^0. \tag{84,2}$$

Tali sono le relazioni che determinano gli intervalli di tempo reale (o, come si dice, il *tempo proprio* in un punto dato dello spazio) in funzione della coordinata x^0. Notiamo anche che la grandezza g_{00}, come segue dalle formule riportate, è positiva:

$$g_{00} > 0. \tag{84,3}$$

Occorre sottolineare la differenza tra il significato della condizione (84,3) e la condizione di segnatura determinata (segni degli autovalori) del tensore g_{ik} (§ 82). Un tensore g_{ik}, che non soddisfi la seconda di queste condizioni, non può, in generale, corrispondere ad un campo gravitazionale reale, qualunque esso sia, non può cioè determinare la metrica di uno spazio-tempo reale. Se la condizione (84,3) non venisse soddisfatta, ciò significherebbe solamente che il sistema di riferimento corrispondente non può essere realizzato da corpi reali ; se invece viene soddisfatta la condizione sugli autovalori, con una trasformazione appropriata delle coordinate si può ottenere allora che g_{00} diventi positiva (un esempio di tale sistema è dato dal sistema di coordinate in rotazione, vedi § 89).

Determiniamo ora l'elemento dl di distanza spaziale. In relatività ristretta, si può definire l'elemento dl come l'intervallo tra due eventi infinitamente vicini aventi luogo in uno stesso istante. In relatività generale invece non si può generalmente adottare questo procedimento, cioè non si può definire dl semplicemente ponendo $dx^0 = 0$ in ds. Ciò è dovuto al fatto che il tempo proprio in un campo gravitazionale è legato alla coordinata x^0 da una relazione che è diversa in diversi punti dello spazio.

Per determinare dl procederemo ora come segue. Supponiamo che un segnale luminoso venga emesso da un punto B dello spazio (di coordinate $x^\alpha + dx^\alpha$) verso un punto infinitamente vicino A (di coordinate x^α) e riflesso immediatamente lungo lo stesso cammino. Il tempo necessario perché avvenga l'intero processo (misurato nello stesso punto B) è evidentemente il doppio della distanza tra i due punti moltiplicata per c.

Scriviamo l'intervallo mettendo in evidenza le coordinate spaziali e la coordinata temporale:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta + 2g_{0\alpha}\, dx^0\, dx^\alpha + g_{00}\,(dx^0)^2, \tag{84,4}$$

con le solite convenzioni di somma. L'intervallo tra due eventi corrispondenti alla partenza e all'arrivo del segnale da un punto ad un altro è nullo. Risolvendo l'equazione $ds^2 = 0$ rispetto a dx^0, troviamo due radici:

$$\begin{aligned} dx^{0\,(1)} &= \frac{1}{g_{00}}\left(-g_{0\alpha}\, dx^\alpha - \sqrt{(g_{0\alpha}g_{0\beta} - g_{\alpha\beta}g_{00})\, dx^\alpha\, dx^\beta}\right), \\ dx^{0\,(2)} &= \frac{1}{g_{00}}\left(-g_{0\alpha}\, dx^\alpha + \sqrt{(g_{0\alpha}\, g_{0\beta} - g_{\alpha\beta}\, g_{00})\, dx^\alpha\, dx^\beta}\right), \end{aligned} \tag{84,5}$$

che corrispondono alla propagazione del segnale nelle due direzioni, tra i punti A e B. Se x^0 è l'istante d'arrivo del segnale in A,

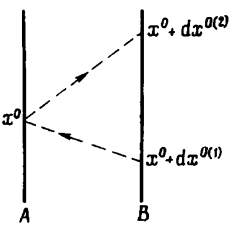

Fig. 18

allora gli istanti della sua partenza da B e del suo ritorno in B saranno rispettivamente $x^0 + dx^{0\,(1)}$ ed $x^0 + dx^{0\,(2)}$. Nella figura schematica 18 le rette continue rappresentano le linee d'universo corrispondenti alle coordinate date x^α ed $x^\alpha + dx^\alpha$, e le rette tratteggiate rapresentano le linee d'universo dei segnali[1]). È ovvio che l'intervallo di « tempo » totale tra l'emissione e il ritorno del segnale nello stesso punto è uguale a

$$dx^{0\,(2)} - dx^{0\,(1)} = \frac{2}{g_{00}}\sqrt{(g_{0\alpha}g_{0\beta} - g_{\alpha\beta}g_{00})\, dx^\alpha\, dx^\beta}.$$

L'intervallo di tempo reale corrispondente si trova, conformemente alla (84,1), moltiplicando per $\sqrt{g_{00}}/c$, e la distanza dl tra

[1]) Nella fig. 18 è supposto che $dx^{0(2)} > 0$, $dx^{0(1)} < 0$, il che non è però necessario: $dx^{0(1)}$ e $dx^{0(2)}$ possono avere lo stesso segno. Il fatto che in questo caso il valore di x^0 (A) nell'istante d'arrivo del segnale in A potrebbe essere inferiore al valore x^0 (B) nell'istante della sua partenza da B non è contraddittorio, perché non si suppone che gli orologi situati in punti diversi dello spazio siano in qualche modo sincronizzati.

i due punti si ottiene moltiplicando ancora per $c/2$. Troviamo in definitiva:

$$dl^2 = \left(-g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha} g_{0\beta}}{g_{00}} \right) dx^\alpha dx^\beta.$$

Questa è l'espressione cercata che determina la distanza in funzione degli elementi di coordinate spaziali. Riscriviamo la formula ottenuta come segue:

$$dl^2 = \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \tag{84,6}$$

dove

$$\gamma_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha} g_{0\beta}}{g_{00}} \tag{84,7}$$

è il tensore metrico tridimensionale che definisce la metrica, cioè le proprietà geometriche dello spazio. Le relazioni (84,7) stabiliscono il legame tra la metrica dello spazio reale e la metrica dello spazio-tempo quadridimensionale[1])

Bisogna tuttavia tener presente che le g_{ik} dipendono, in generale, da x^0, in modo che la metrica spaziale (84,6) varia pure con il tempo. Per questa ragione, non ha senso integrare dl: un tale integrale dipenderebbe dalla linea d'universo d'integrazione tra i due punti spaziali dati. Di conseguenza, in relatività generale, la nozione di distanza determinata tra corpi non ha, in generale, senso; essa ha solo un significato locale. L'unico caso in cui la distanza può essere definita anche in regioni finite dello spazio è quello di sistemi di riferimento dove le g_{ik} non dipendono dal tempo, e, di conseguenza, l'integrale $\int dl$ su una curva spaziale acquista un significato determinato.

È utile notare che il tensore $-\gamma_{\alpha\beta}$ è l'inverso del tensore controvariante tridimensionale $g^{\alpha\beta}$. Infatti, scrivendo per componenti

---

[1]) La forma quadratica (84,6) deve essere sostanzialmente positiva. Per questo, i suoi coefficienti debbono, come è noto, soddisfare le condizioni

$$\gamma_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{vmatrix} > 0.$$

Esprimendo le γ_{ik} mediante le g_{ik}, troviamo facilmente che queste condizioni assumono la forma

$$\begin{vmatrix} g_{00} & g_{01} \\ g_{10} & g_{11} \end{vmatrix} < 0, \quad \begin{vmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad g < 0.$$

Queste condizioni, come pure le condizioni (84,3), debbono essere soddisfatte dalle componenti del tensore metrico in qualsiasi sistema di riferimento che può essere realizzato con corpi reali.

l'uguaglianza $g^{ik}g_{kl} = \delta^i_l$, abbiamo:

$$\begin{aligned} g^{\alpha\beta}g_{\beta\gamma} + g^{\alpha 0}g_{0\gamma} &= \delta^\alpha_\gamma, \\ g^{\alpha\beta}g_{\beta 0} + g^{\alpha 0}g_{00} &= 0, \\ g^{0\beta}g_{\beta 0} + g^{00}g_{00} &= 1. \end{aligned} \tag{84,8}$$

Ricavando $g^{\alpha 0}$ dalla seconda uguaglianza e sostituendo nella prima, otteniamo:

$$-g^{\alpha\beta}\gamma_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma,$$

come dovevasi dimostrare. Si può esprimere questo risultato in altri termini, dicendo che le grandezze $-g^{\alpha\beta}$ formano un tensore metrico controvariante tridimensionale corrispondente alla metrica (84,6):

$$\gamma^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\beta}. \tag{84,9}$$

Indichiamo anche che i determinanti g e γ, formati rispettivamente dalle grandezze g_{ik} e $\gamma_{\alpha\beta}$, sono legati tra di loro dalla semplice relazione:

$$-g = g_{00}\gamma. \tag{84,10}$$

In una serie di ulteriori applicazioni sarà comodo introdurre il vettore tridimensionale $\mathbf{g}$ le cui componenti covarianti sono definite come segue:

$$g_\alpha = -\frac{g_{0\alpha}}{g_{00}}. \tag{84,11}$$

Considerando $\mathbf{g}$ come un vettore nello spazio della metrica (84,6), le componenti controvarianti si determinano come $g^\alpha = \gamma^{\alpha\beta}g_\beta$. Con l'aiuto della (84,9) e della seconda uguaglianza della (84,8) è facile vedere che

$$g^\alpha = \gamma^{\alpha\beta}g_\beta = -g^{0\alpha}. \tag{84,12}$$

Notiamo anche la formula

$$g^{00} = \frac{1}{g_{00}} - g_\alpha g^\alpha, \tag{84,13}$$

che segue dalla terza uguaglianza delle (84,8).

Passiamo ora alla definizione della nozione di simultaneità in relatività generale. In altri termini, vediamo se è possibile sincronizzare gli orologi che si trovano in differenti punti dello spazio, studiamo cioè la possibilità di farne corrispondere le indicazioni.

Una tale sincronizzazione deve evidentemente essere realizzata con uno scambio di segnali luminosi tra i due punti. Consideriamo di nuovo il processo di propagazione di segnali tra i due punti infinitamente vicini A e B, rappresentato nella fig. 18. Bisogna considerare come simultaneo con l'istante x^0 nel punto A l'indicazione dell'orologio in B nell'istante tra la partenza e il ritorno del segnale

in questo punto, cioè l'istante

$$x^0 + \Delta x^0 = x^0 + \frac{1}{2}(dx^{0\,(2)} + dx^{0\,(1)}).$$

Sostituendo la (84,5) in questa espressione, troviamo la differenza dei valori del «tempo» x^0, per due eventi simultanei aventi luogo in due punti infinitamente vicini nella forma

$$\Delta x^0 = -\frac{g_{0\alpha}\,dx^\alpha}{g_{00}} \equiv g_\alpha\,dx^\alpha. \tag{84,14}$$

Questa relazione permette di sincronizzare gli orologi in qualsiasi volume infinitesimale dello spazio. Continuando una tale sincronizzazione con altri punti, si possono sincronizzare gli orologi, cioè determinare la simultaneità di eventi, lungo una qualsiasi linea non chiusa[1]).

Per quanto riguarda la sincronizzazione degli orologi lungo un contorno chiuso, essa è, in generale, impossibile. Infatti, descrivendo il contorno e ritornando nel punto di partenza, si otterrebbe per Δx^0 un valore differente da zero. A maggior ragione è impossibile una sincronizzazione univoca degli orologi in tutto lo spazio. Fanno eccezione i sistemi di riferimento dove tutte le componenti $g_{0\alpha}$ sono nulle[2]).

Bisogna sottolineare che l'impossibilità della sincronizzazione di tutti gli orologi è una proprietà dei sistemi di riferimento arbitrari, e non dello spazio-tempo come tale. In qualsiasi campo gravitazionale si può sempre scegliere (e perfino in infiniti modi) un sistema di riferimento in modo tale da annullare identicamente le tre grandezze $g_{0\alpha}$ e, di conseguenza, da rendere possibile la sincronizzazione totale degli orologi (vedi § 97).

Già in relatività ristretta il cammino del tempo reale è differente per orologi in un moto relativo. In relatività generale, invece, il tempo reale scorre in modo differente nei diversi punti dello spazio anche in uno stesso sistema di riferimento. Ciò vuol dire che l'intervallo di tempo proprio tra due eventi aventi luogo in un punto dello spazio e l'intervallo di tempo tra due eventi contemporanei ai primi in un altro punto dello spazio sono, in generale, differenti l'uno dall'altro.

---

[1]) Moltiplicando l'uguaglianza (84,14) per g_{00} e portando tutti e due i termini a primo membro, si può esprimere la condizione di sincronizzazione nella forma $dx_0 = g_{0i}dx^i = 0$: il «differenziale covariante» dx_0 tra due eventi simultanei infinitamente vicini deve essere nullo.

[2]) Sono da includere qui anche i casi in cui le $g_{0\alpha}$ si possono annullare con una semplice trasformazione della coordinata temporale, a prescindere dalla scelta del sistema di oggetti che servono alla determinazione delle coordinate spaziali.

§ 85. *Derivazione covariante*

In coordinate galileiane[1]) i differenziali dA_i di un vettore A_i formano un vettore, e le derivate parziali $\partial A_i/\partial x^k$ delle sue componenti rispetto alle coordinate formano un tensore. In coordinate curvilinee ciò non si verifica; dA_i non è piú un vettore, e $\partial A_i/\partial x^k$ non è piú tensore. Ciò è dovuto al fatto che dA_i è la differenza di vettori che si trovano in punti differenti (infinitamente vicini) dello spazio; i vettori in punti differenti dello spazio si trasformano in modo diverso perché i coefficienti nelle formule di trasformazione (83,2), (83,4) sono funzioni delle coordinate.

È facile verificare questo anche direttamente. A questo scopo, ricaviamo le formule di trasformazione dei differenziali dA_i in coordinate curvilinee. Un vettore covariante si trasforma in base alla formula

$$A_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} A'_k;$$

di conseguenza,

$$dA_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} dA'_k + A'_k d\frac{\partial x'^k}{\partial x^i} = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} dA'_k + A'_k \frac{\partial^2 x'^k}{\partial x^i \partial x^l} dx^l.$$

Dunque, le dA_i non si trasformano come un vettore (lo stesso si può dire anche dei differenziali dei vettori controvarianti). Soltanto nel caso in cui le derivate seconde $\frac{\partial^2 x'^k}{\partial x^i \partial x^l} = 0$, cioè se x'^k sono funzioni lineari delle x^k, le formule di trasformazione diventano

$$dA_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} dA'_k.$$

cioè le dA_i si trasformano come un vettore.

Ci proponiamo ora di determinare un tensore in coordinate curvilinee che sia l'analogo del tensore $\partial A_i/\partial x^k$ in coordinate galileiane. In altri termini, dobbiamo trasformare $\partial A_i/\partial x^k$ esprimendolo in coordinate curvilinee.

Affinché il differenziale di un vettore in coordinate curvilinee sia un vettore, è necessario che i due vettori dei quali si prende la differenza si trovino in uno stesso punto dello spazio. In altri termini, bisogna « trasportare » in qualche modo l'uno dei due vettori infinitamente vicini nel punto dove si trova il secondo, e solo dopo determinare la differenza tra due vettori che si trovano ormai nello stesso punto dello spazio. L'operazione stessa di trasporto deve essere inoltre definita in modo tale che la differenza indicata coincida in coordinate galileiane con il differenziale ordinario dA_i. Siccome dA_i è una semplice differenza tra componenti di due vet-

[1]) E in generale quando le grandezze g_{ik} sono costanti.

tori indefinitamente vicini, ciò significa che in seguito all'operazione di trasporto le componenti del vettore in coordinate galileiane non debbono variare. Ma un tale trasporto non è altro che lo spostamento del vettore parallelamente a sé stesso. Nel *trasporto parallelo* di un vettore, le sue componenti in coordinate galileiane non variano; in coordinate curvilinee, invece le componenti del vettore generalmente variano. Ne risulta che in coordinate curvilinee la differenza tra le componenti dei due vettori dopo il trasporto di uno di essi nel punto in cui si trova il secondo non coinciderà con la differenza prima del trasporto (cioè con il differenziale dA_i).

Per confrontare due vettori infinitamente vicini, dobbiamo spostare parallelamente uno di essi nel punto di trasporto. Consideriamo un vettore controvariante qualsiasi; se il suo valore nel punto di coordinate x^i è A^i, esso sarà $A_i + dA^i$ nel punto vicino a $x^i + dx^i$. Eseguiamo sul vettore A^i l'operazione di trasporto infinitesimo parallelo nel punto $x^i + dx^i$; indichiamo con δA^i la sua variazione. Allora la differenza DA^i tra i due vettori che si trovano ora nello stesso punto è uguale a

$$DA^i = dA^i - \delta A^i. \tag{85,1}$$

La variazione δA^i delle componenti del vettore nel trasporto parallelo infinitesimo dipende dalla grandezza delle componenti stesse, e questa dipendenza, inoltre, deve essere evidentemente lineare. Ciò risulta direttamente dal fatto che la somma di due vettori deve trasformarsi secondo la stessa legge vilida per ciascuno dei vettori. Si deve quindi avere

$$\delta A^i = -\Gamma^i_{kl} A^k \, dx^l, \tag{85,2}$$

dove Γ^i_{kl} sono funzioni delle coordinate la cui forma, naturalmente, dipende dalla scelta del sistema di coordinate; in un sistema galileiano le $\Gamma^i_{kl} = 0$.

Questo è sufficiente per affermare che le grandezze Γ^i_{kl} non formano un tensore, perché un tensore nullo in un sistema di coordinate sarà nullo in qualsiasi altro sistema. È ovvio che in uno spazio curvo non si può, mediante una scelta delle coordinate, annullare ovunque tutte le Γ^i_{kl}. Si può, però, scegliere un sistema di coordinate tale dove le Γ^i_{kl} si annullino in un punto assegnato (vedi la fine di questo paragrafo) [1]). Le grandezze Γ^i_{kl} si chiamano *simboli di Chri-*

---

[1]) Si intende parlare di un tale sistema di coordinate quando per brevità in tutti i ragionamenti si dice semplicemente sistema galileiano; perciò, tutte le dimostrazioni si riferiscono non soltanto a uno spazio quadridimensionale piatto, ma anche ad uno curvo.

stoffel. In seguito, ci serviremo anche delle grandezze $\Gamma_{i,\,kl}$ [1]), definite come segue:

$$\Gamma_{i,\,kl} = g_{im}\Gamma^m_{kl}. \tag{85,3}$$

E viceversa

$$\Gamma^i_{kl} = g^{im}\Gamma_{m,\,kl}. \tag{85,4}$$

Anche la variazione per trasporto parallelo delle componenti di un vettore covariante è facilmente ricavabile tramite i simboli di Christoffel. Per vederlo, notiamo che gli scalari evidentemente non variano per trasporto parallelo. In particolare, il prodotto scalare tra due vettori non varia per trsporto parallelo di ambedue i vettori.

Siano A_i e B^i rispettivamente un vettore covariante e uno controvariante. Da $\delta\,(A_iB^i) = 0$ si ricava allora:

$$B^i\delta A_i = -A_i\delta B^i = \Gamma^i_{kl}B^kA_i\,dx^l,$$

oppure, cambiando gli indici,

$$B^i\delta A_i = \Gamma^k_{il}A_kB^i\,dx^l.$$

Essendo le B^i arbitrarie, abbiamo:

$$\delta A_i = \Gamma^k_{il}A_k\,dx^l, \tag{85,5}$$

che è la variazione di un vettore covariante per trasporto parallelo.

Sostituendo la (85,2) e $dA^i = \frac{\partial A^i}{\partial x^l}\,dx^l$ nella (85,1) otteniamo:

$$DA^i = \left(\frac{\partial A^i}{\partial x^l} + \Gamma^i_{kl}A^k\right)dx^l. \tag{85,6}$$

Analogamente troviamo per un vettore covariante:

$$DA_i = \left(\frac{\partial A_i}{\partial x^l} - \Gamma^k_{il}A_k\right)dx^l. \tag{85,7}$$

Le espressioni comprese tra parentesi nella (85,6) e (85,7) sono tensori perché, moltiplicati per il vettore dx^l, danno di nuovo un vettore. È evidente che queste grandezze sono proprio i tensori, che rappresentano la generalizzazione cercata della derivata di un vettore in coordinate curvilinee. Questi tensori sono detti *derivate covarianti* rispettivamente dei vettori A^i ed A_i. Indicandole $A^i{}_{;\,k}$ ed $A_{i;\,k}$ possiamo scrivere:

$$DA^i = A^i{}_{;\,l}\,dx^l, \quad DA_i = A_{i;\,l}\,dx^l, \tag{85,8}$$

---

[1]) In luogo di Γ^i_{kl} e $\Gamma_{i,kl}$ si usano talvolta rispettivamente le notazioni $\left\{{kl \atop i}\right\}$ e $\left[{kl \atop i}\right]$.

e le derivate covarianti sono:

$$A^i_{;\,l} = \frac{\partial A^i}{\partial x^l} + \Gamma^i_{kl} A^k, \tag{85,9}$$

$$A_{i;\,l} = \frac{\partial A_i}{\partial x^l} - \Gamma^k_{il} A_k. \tag{85,10}$$

In coordinate galileiane $\Gamma^i_{kl} = 0$ e le derivate covarianti diventano derivate ordinarie.

È facile definire anche la derivata covariante di un tensore. A questo scopo, bisogna determinare la variazione del tensore per trasporto parallelo infinitesimo. Consideriamo, per esempio, un tensore controvariante arbitrario, ottenuto come prodotto di due vettori controvarianti $A^i B^k$. Per un trasporto parallelo:

$$\delta\,(A^i B^k) = A^i \delta B^k + B^k \delta A^i = -A^i \Gamma^k_{lm} B^l\, dx^m - B^k \Gamma^i_{lm} A^l\, dx^m.$$

In virtú della linearità di questa trasformazione, essa deve aver luogo anche per ogni tensore A^{ik}:

$$\delta A^{ik} = -\,(A^{im}\Gamma^k_{ml} + A^{mk}\Gamma^i_{ml})\, dx^l. \tag{85,11}$$

Sostituendo questa espressione in

$$DA^{ik} = dA^{ik} - \delta A^{ik} \equiv A^{ik}_{;\,l}\, dx^l,$$

troviamo la derivata covariante del tensore A^{ik} nella forma

$$A^{ik}_{;\,l} = \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^l} + \Gamma^i_{ml} A^{mk} + \Gamma^k_{ml} A^{im}. \tag{85,12}$$

In modo assolutamente analogo troviamo le derivate covarianti dei tensori misti e covarianti nella forma:

$$A^i_{k;\,l} = \frac{\partial A^i_k}{\partial x^l} - \Gamma^m_{kl} A^i_m + \Gamma^i_{ml} A^m_k, \tag{85,13}$$

$$A_{ik;\,l} = \frac{\partial A_{ik}}{\partial x^l} - \Gamma^m_{il} A_{mk} - \Gamma^m_{kl} A_{im}. \tag{85,14}$$

Analogamente si può definire la derivata covariante di un tensore di ordine qualsiasi. Si ottiene la seguente regola di derivazione covariante: per trovare la derivata covariante di un tensore $A^{\cdot\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\cdot}$ rispetto a x^l, bisogna aggiungere alla derivata ordinaria $\partial A^{\cdot\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\cdot}/\partial x^l$ per ciascun indice covariante i $(A^{\cdot\cdot}_{\cdot i\cdot})$ il termine $-\Gamma^k_{ut} A^{\cdot\cdot}_{\cdot k\cdot}$, e per ciascun indice controvariante i $(A^{\cdot i\cdot}_{\cdot\cdot\cdot})$ il termine $+\Gamma^i_{kl} A^{\cdot k\cdot}_{\cdot\cdot\cdot}$.

È facile provare che la derivata covariante di un prodotto si ottiene con le stesse regole della derivata ordinaria di un prodotto. La derivata covariante di uno scalare φ coincide con la derivata ordinaria, è cioè il vettore covariante $\varphi_k = \partial\varphi/\partial x^k$, in virtú del fatto che per gli scalari $\delta\varphi = 0$ e, di conseguenza, $D\varphi = d\varphi$. Per

esempio, la derivata covariante del prodotto A_iB_k è

$$(A_iB_k)_{;\,l} = A_{i;\,l}B_k + A_iB_{k;\,l}.$$

Elevando l'indice di derivazione covariante, si ottengono le cosiddette derivate controvarianti. Cosí

$$A_i^{;\,k} = g^{kl}A_{i;\,l}, \quad A^{i;\,k} = g^{kl}A^i_{;\,l}.$$

Dimostriamo che i simboli di Christoffel Γ^i_{kl} sono simmetrici rispetto agli indici inferiori. Essendo la derivata covariante del vettore $A_{i;\,k}$ un tensore, la differenza $A_{i;\,k} - A_{k;\,i}$ è pure un tensore. Supponiamo che il vettore A_i sia il gradiente di uno scalare, cioè $A_i = \partial\varphi/\partial x^i$. Poiché

$$\frac{\partial A_i}{\partial x^k} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i \partial x^k} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i},$$

con l'aiuto dell'espressione (85,10) abbiamo:

$$A_{k;\,i} - A_{i;\,k} = (\Gamma^l_{ik} - \Gamma^l_{ki})\frac{\partial\varphi}{dx^l}.$$

In coordinate galileiane le derivate covarianti si trasformano in derivate ordinarie, e il primo membro dell'uguaglianza si annulla. Poiché $A_{k;\,i} - A_{i;\,k}$ è un tensore, essendo esso nullo in un sistema, dovrà essere nullo in qualsiasi altro sistema di coordinate. Ne segue che

$$\Gamma^i_{kl} = \Gamma^i_{lk}. \tag{85,15}$$

È evidente anche che

$$\Gamma_{i,\,kl} = \Gamma_{i,\,lk}. \tag{85,16}$$

Nel caso generale, ci sono 40 differenti grandezze Γ^i_{kl}: per ciascuno dei quattro valori dell'indice i esistono 10 coppie di valori differenti degli indici k ed l (considerando la simmetria in k e l).

Per concludere questo paragrafo, citiamo le formule di trasformazione dei simboli di Christoffel da un sistema di coordinate ad un altro. Queste formule si possono ottenere confrontando le leggi di trasformazione di ambedue i membri delle uguaglianze che definiscono una qualsiasi derivata covariante, ed esigendo che queste leggi siano identiche per i due membri. Un calcolo semplice ci dà la formula

$$\Gamma^i_{kl} = \Gamma'^m_{np}\frac{\partial x^i}{\partial x'^m}\frac{\partial x'^n}{\partial x^k}\frac{\partial x'^p}{\partial x^l} + \frac{\partial^2 x'^m}{\partial x^k\,\partial x^l}\frac{\partial x^i}{\partial x'^m}. \tag{85,17}$$

Da questa formula si vede che le grandezze Γ^i_{kl} si comportano come tensori sotanto nei confronti delle trasformazioni lineari delle coordinate (quando il secondo termine nella (85,17) è nullo).

La formula (85,17) permette di provare facilmente l'affermazione precedente secondo la quale è possibile scegliere il sistema di coordinate in modo tale da rendere nulle tutte le Γ^i_{kl} in un punto arbitrario assegnato (un tale sistema è detto *localmente inerziale o localmente geodetico*, vedi § 87)[1]).

Supponiamo infatti che il punto dato sia scelto per origine delle coordinate e che le grandezze Γ^i_{kl} abbiano in questo punto (in coordinate x^i) i valori iniziali $(\Gamma^i_{kl})_0$. Facciamo in prossimità di questo punto la trasformazione

$$x'^i = x^i + \frac{1}{2}(\Gamma^i_{kl})_0 x^k x^l. \tag{85,18}$$

Allora

$$\left(\frac{\partial^2 x'^m}{\partial x^k \partial x^l}\frac{\partial x^i}{\partial x'^m}\right)_0 = (\Gamma^i_{kl})_0$$

in base alla (85,17), tutte le Γ'^m_{np} si annullano.

Notiamo che per la trasformazione (85,18) si ha

$$\left(\frac{\partial x'^i}{\partial x^k}\right)_0 = \delta^i_k,$$

e, di conseguenza, i valori di qualsiasi tensore (anche del tensore g_{ik}) in punto dato non cambiano, in modo che l'annullamento dei simboli di Christoffel può essere fatto contemporaneamente con la riduzione delle g_{ik} alla forma galileiana.

§ 86. *Relazione tra i simboli di Christoffel e il tensore metrico*

Dimostriamo che la derivata covariante del tensore metrico g_{ik} è nulla. Notiamo a questo scopo che per il vettore DA_i, come pure per qualsiasi vettore, deve valere la relazione

$$DA_i = g_{ik} DA^k.$$

D'altra parte, $A_i = g_{ik}A^k$, e quindi

$$DA_i = D(g_{ik}A^k) = g_{ik}DA^k + A^k Dg_{ik}.$$

Confrontando con $DA_i = g_{ik}DA^k$, e tenendo presente che il vettore A^i è arbitrario, otteniamo:

$$Dg_{ik} = 0.$$

---

[1]) Si può mostrare anche che, con una scelta adeguata delle coordinate, si possono annullare tutte le Γ^i_{kl} non soltanto in un punto dato, ma su una linea d'universo data (si veda la dimostrazione di questa asserzione nel libro di P. K. Rascevski *Rimanova geometrifa i tensornyi analiz* (*Geometria di Riemann e analisi tensoriale*), (§ 91, Edizioni Nauka, 1964).

Per la derivata covariante si ha dunque

$$g_{ik;\,l} = 0. \tag{86,1}$$

Di conseguenza, nella derivazione covariante le g_{ik} sono da considerarsi costanti.

L'uguaglianza $g_{ik;\,l} = 0$ può servire per esprimere i simboli di Christoffel Γ^i_{kl} mediante il tensore metrico g_{ik}. A questo scopo, secondo la definizione generale (85,14) scriviamo:

$$g_{ik;\,l} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - g_{mk}\Gamma^m_{il} - g_{im}\Gamma^m_{kl} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - \Gamma_{k,\,il} - \Gamma_{i,\,kl} = 0.$$

In tal modo, le derivate di g_{ik} si esprimono mediante i simboli di Christoffel[1]). Scriviamo queste derivate permutando gli indici i, k, l:

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} = \Gamma_{k,\,il} + \Gamma_{i,\,kl}, \quad \frac{\partial g_{li}}{\partial x^k} = \Gamma_{i,\,kl} + \Gamma_{l,\,ik}, \quad -\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} = -\Gamma_{l,\,ki} - \Gamma_{k,\,li}.$$

Prendendo la semisomma di queste uguaglianze, troviamo (ricordando che $\Gamma_{i,\,kl} = \Gamma_{i,\,lk}$):

$$\Gamma_{i,\,kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}\right). \tag{86,2}$$

Di qui ricaviamo per i simboli $\Gamma^i_{kl} = g^{im}\,\Gamma_{m,\,kl}$:

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2}\,g^{im}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}\right). \tag{86,3}$$

Queste formule danno le espressioni cercate dei simboli di Christoffel in funzione del tensore metrico.

Ricaviamo l'espressione del simbolo di Christoffel contratto Γ^i_{ki} che ci sarà utile in seguito. Determiniamo a questo scopo il differenziale dg del determinante g formato dalle componenti del tensore g_{ik}; si può trovare dg prendendo il differenziale di ciascuna componente del tensore g_{ik} e moltiplicandola per il suo coefficiente nel determinante, cioè per il minore corrispondente. D'altra parte, le componenti del tensore g^{ik}, inverso del tensore g_{ik}, sono uguali, come è noto, ai minori del determinante formato delle grandezze g_{ik} divisi per questo determinante. I minori del determinante g sono uguali dunque a gg^{ik}. Quindi

$$dg = gg^{ik}\,dg_{ik} = -gg_{ik}\,dg^{ik} \tag{86,4}$$

(poiché $g_{ik}g^{ik} = \delta^i_i = 4$, si ha $g^{ik}dg_{ik} = -\,g_{ik}\,dg^{ik}$).

Dalla (86,3) si deduce:

$$\Gamma^i_{ki} = \frac{1}{2}\,g^{im}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{mi}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^m}\right).$$

---

[1]) La scelta di un sistema di coordinate localmente geodetiche significa quindi che tutte le derivate prime delle componenti del tensore metrico si annullano nel punto dato.

Permutando gli indici m ed i nel primo e terzo termine tra parentesi, questi termini si annullano e si ottiene:

$$\Gamma^i_{ki} = \frac{1}{2} g^{im} \frac{\partial g_{im}}{\partial x^k},$$

o, per la (86,4),

$$\Gamma^i_{ki} = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^k} = \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^k}. \tag{86,5}$$

È utile anche conoscere l'espressione delle $g^{kl}\Gamma^i_{kl}$. Si ha:

$$g^{kl}\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2} g^{kl} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right) = g^{kl} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right).$$

Con l'aiuto della (86,4) si può trasformare questa espressione nella forma

$$g^{kl}\Gamma^i_{kl} = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial (\sqrt{-g}\, g^{ik})}{\partial x^k} \tag{86,6}$$

In numerosi calcoli è opportuno anche tener presente che le derivate del tensore controvariante g^{ik} sono legate alle derivate delle g_{ik} dalle relazioni

$$g_{il} \frac{\partial g^{lk}}{\partial x^m} = -g^{lk} \frac{\partial g_{il}}{\partial x^m} \tag{86,7}$$

(che si ottengono derivando l'uguaglianza $g_{il}g^{lk} = \delta^k_l$). Indichiamo, infine, che le derivate delle g^{ik} si possono esprimere anche mediante le grandezze Γ^i_{kl}. Infatti, direttamente dall'identità $g^{ik}{}_{;l} = 0$ si deduce che

$$\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} = -\Gamma^i_{ml} g^{mk} - \Gamma^k_{ml} g^{im}. \tag{86,8}$$

Le formule ottenute permettono di scrivere l'espressione $A^i_{;i}$, che rappresenta la generalizzazione della divergenza di un vettore in coordinate curvilinee, in una forma comoda. Utilizzando la (86,5), abbiamo

$$A^i_{;i} = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + \Gamma^i_{li} A^l = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + A^l \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^l},$$

o in forma piú semplice:

$$A^i_{;i} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial (\sqrt{-g}\, A^i)}{\partial x^i}. \tag{86,9}$$

Un'espressione analoga può essere ottenuta anche per la divergenza di un vettore antisimmetrico A^{ik}. Dalla (85,12) abbiamo:

$$A^{ik}_{;k} = \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^k} + \Gamma^i_{mk} A^{mk} + \Gamma^k_{mk} A^{im}.$$

Poiché $A^{mk} = -A^{km}$, si ha

$$\Gamma^i_{mk}A^{mk} = -\Gamma^i_{km}A^{km} = 0.$$

Sostituendo l'espressione (86,5) di Γ^k_{mk}, troviamo dunque:

$$A^{ik}_{;\,k} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\sqrt{-g}\,A^{ik})}{\partial x^k}. \tag{86,10}$$

Sia ora A_{ik} un tensore simmetrico; troviamo l'espressione $A^k_{i\,;\,k}$ delle sue componenti miste. Si ha:

$$A^k_{i;\,k} = \frac{\partial A^k_i}{\partial x^k} + \Gamma^k_{lk}A^l_i - \Gamma^l_{ik}A^k_l = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(A^k_i\sqrt{-g})}{\partial x^k} - \Gamma^l_{ki}A^k_l.$$

L'ultimo termine è uguale qui a

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}\right)A^{kl}.$$

In virtú della simmetria del tensore A^{kl}, i termini estremi tra parentesi si eliminano, e resta

$$A^k_{i;\,k} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\sqrt{-g}\,A^k_i)}{\partial x^k} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}A^{kl}. \tag{86,11}$$

In coordinate cartesiane $\frac{\partial A_l}{\partial x^k} - \frac{\partial A_k}{\partial x^i}$ è un tensore antisimmetrico. In coordinate curvilinee questo tensore ha la forma $A_{i;\,k} - A_{k;\,i}$. Tuttavia, con l'aiuto delle espressioni di $A_{i;\,k}$ e tenendo presente che $\Gamma^i_{kl} = \Gamma^i_{lk}$ si ottiene:

$$A_{i;\,k} - A_{k;\,i} = \frac{\partial A_l}{\partial x^k} - \frac{\partial A_k}{\partial x^i}. \tag{86,12}$$

Infine, trasformiamo in coordinate curvilinee la somma $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x^i}$ delle derivate seconde di uno scalare φ. È evidente che questa somma diventa in coordinate curvilinee $\varphi^{;\,i}_{;\,i}$. Però $\varphi_{;\,i} = \partial\varphi/\partial x^i$ perché la derivazione covariante di uno scalare si riduce alla derivazione ordinaria. Elevando l'indice i, abbiamo:

$$\varphi^{;\,i} = g^{ik}\frac{\partial\varphi}{\partial x^k}$$

e con l'aiuto della formula (86,9) troviamo:

$$\varphi^{;\,i}_{;\,i} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{-g}\,g^{ik}\frac{\partial\varphi}{\partial x^k}\right). \tag{86,13}$$

È utile sottolineare che il teorema di Gauss (83,17) per la trasformazione dell'integrale di un vettore su una ipersuperficie in in-

tegrale su un volume quadridimensionale può essere scritto, tenendo conto della (86,9), nella forma

$$\int A^i \sqrt{-g}\, dS_i = \int A^i_{;i} \sqrt{-g}\, d\Omega. \qquad (86,14)$$

§ 87. *Moto di una particella in un campo gravitazionale*

Il moto di una particella materiale libera in relatività ristretta è determinato dal principio di minima azione:

$$\delta S = -mc\delta \int ds = 0, \qquad (87,1)$$

in virtú del quale la particella si muove in modo tale che la sua linea d'universo è estremale tra due punti d'universo dati, cioè è nel dato caso una retta (nello spazio ordinario a tre dimensioni ciò si traduce in un moto rettilineo uniforme).

Il moto di una particella in un campo gravitazionale deve essere determinato dal principio di minima azione sotto la stessa forma (87,1) poiché il campo gravitazionale non è altroche una modificazione della metrica dello spazio-tempo, che si esprime solo nella modificazione dell'espressione di ds tramite dx^i. In un campo gravitazionale dunque una particella si muova in modo tale che il suo punto d'universo descriva una linea estremale o, come si dice, una *geodetica* nello spazio quadridimensionale x^0, x^1, x^2, x^3; tuttavia, poiché in presenza del campo gravitazionale lo spazio-tempo non è galileiano, questa linea non è una « retta », e il moto spaziale reale della particella non è rettilineo e uniforme.

Invece di partire nuovamente dal principio di minima azione (vedi il problema di questo paragrafo), è piú semplice trovare le equazioni del moto di una particella in un campo gravitazionale generalizzando in modo appropriato le equazioni differenziali del moto libero di una particella in relatività ristretta, cioè in un 4-sistema di coordinate galileiane. Queste equazioni si scrivono $du^i/ds = 0$, o altrimenti $du^i = 0$, dove $u^i = dx^i/ds$ è il quadrivettore velocità. È evidente che in coordinate curvilinee questa equazione si generalizza nel modo seguente:

$$Du^i = 0. \qquad (87,2)$$

L'espressione (85,6) del differenziale covariante di un vettore ci dà:

$$du^i + \Gamma^i_{kl} u^k\, dx^l = 0.$$

Dividendo questa equazione per ds, si ottiene:

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{kl} \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{ds} = 0. \qquad (87,3)$$

Queste sono le equazioni del moto cercate. Ne risulta che il moto di una particella in un campo gravitazionale è determinato dalle grandezze Γ^i_{kl}. La derivata d^2x^i/ds^2 è la 4-accelerazione della particella. Ne segue che possiamo ritenere la grandezza $-m\Gamma^i_{kl}u^k u^l$ la « 4-forza » agente sulla particella nel campo gravitazionale. Il tensore g_{ik} assume qui il ruolo dei « potenziali » del campo gravitazionale: le sue derivate definiscono il campo Γ^i_{kl}[1]).

Nel § 85 è stato dimostrato che, con una scelta adeguata del sistema di coordinate, è sempre possibile annullare tutte le Γ^i_{kl} in ogni punto dato dello spazio-tempo. Si vede ora che la scelta di un tale sistema di riferimento localmente inerziale significa l'annullamento del campo gravitazionale nel volume infinitesimo dato dello spazio-tempo e la possibilità di una tale scelta è l'espressione del principio d'equivalenza nella teoria relativistica della gravitazione[2]).

Il 4-impulso di una particella in un campo gravitazionale è definito come

$$p^i = mcu^i, \tag{87,4}$$

e il suo quadrato è

$$p_i p^i = m^2c^2. \tag{87,5}$$

Sostituendo $p_i = -\partial S/\partial x^i$, troviamo l'equazione di Hamilton-Jacobi per una particella in un campo gravitazionale:

$$g^{ik}\frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^k} - m^2c^2 = 0. \tag{87,6}$$

L'equazione della linea geodetica nella forma (87,3) non è applicabile alla propagazione di un segnale luminoso perché lungo la linea d'universo di propagazione di un raggio luminoso l'intervallo $ds = 0$ e tutti i termini dell'equazione (87,3) diventano infiniti. Per conferire alle equazioni del moto in questo caso una forma adeguata, utilizziamo il fatto che la direzione della propagazione di un raggio di luce in ottica geometrica è determinata dal vettore d'onda,

---

[1]) Notiamo anche un'altra forma dell'equazione del moto espresso mediante le componenti covarianti della 4-accelerazione. Dalla condizione $Du_i = 0$ ricaviamo

$$\frac{du_i}{ds} - \Gamma_{k,\,il}u^k u^l = 0.$$

Sostituendo qui i $\Gamma_{k,il}$ ricavati dalla (86,2), due termini si eliminano, e resta

$$\frac{du_i}{ds} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}u^k u^l = 0. \tag{87,3a}$$

[2]) Nella nota alla pag. 317 è stata indicata la possibilità di scegliere un sistema di riferimento che sia « inerziale lungo la linea d'universo data ». In particolare, se per tale linea è presa la linea della coordinata temporale (sulla quale x^1, x^2, x^3 = costante), il campo gravitazionale sarà quindi eliminato nell'elemento dato del volume spaziale nel corso di tutto il tempo.

tangente al raggio. Possiamo quindi scrivere il quadrivettore d'onda nella forma $k^i = dx^i/d\lambda$, dove λ è un parametro variabile lungo il raggio. In relatività ristretta, il vettore d'onda non varia lungo un raggio di luce che si propaga nel vuoto, cioè $dk^i = 0$ (vedi § 53). In un campo gravitazionale questa equazione diventa $Dk^i = 0$, oppure

$$\frac{\partial k^i}{\partial \lambda} + \Gamma^i_{kl} k^k k^l = 0 \tag{87,7}$$

(λ è determinata dalle stesse equazioni)[1]).

Il quadrato del quadrivettore d'onda è nullo (vedi § 48):

$$k_i k^i = 0. \tag{87,8}$$

Sostituendo qui a k^i le $\partial\psi/\partial x^i$ (ψ è l'iconale), troviamo l'equazione dell'iconale in un campo gravitazionale nella forma:

$$g^{ik} \frac{\partial \psi}{\partial x^i} \frac{\partial \psi}{\partial x^k} = 0. \tag{87,9}$$

Nel caso limite di velocità piccole, le equazioni relativistiche del moto di una particella in un campo gravitazionale si devono ridurre alle rispettive equazioni non relativistiche. Bisogna inoltre tener presente che se le velocità si suppongono piccole segue anche la condizione che il campo gravitazionale deve essere debole; in caso contrario, la particella che in esso si trova acquisterebbe una grande velocità.

Vediamo come in questo caso limite, è legato il tensore metrico $g^i{}_k$ al potenziale non relativistico φ del campo gravitazionale.

In meccanica non relativistica, il moto di una particella in un campo gravitazionale è determinato dalla lagrangiana (81,1). Scriviamola ora nella forma

$$L = -mc^2 + \frac{mv^2}{2} - m\varphi, \tag{87,10}$$

aggiungendo la costante $-mc^2$[2]). Ciò assicura che la lagrangiana non relativistica in assenza di un campo, $L = -mc^2 + mv^2/2$, sia esattamente quella alla quale si riduce la lagrangiana ralativistica $L = -mc^2\sqrt{1 - v^2/c^2}$ nel caso limite $v/c \to 0$.

L'azione non relativistica S per una particella in un campo gravitazionale assume quindi la forma

$$S = \int L\,dt = -mc \int \left(c - \frac{v^2}{2c} + \frac{\varphi}{c}\right) dt.$$

---

[1]) Le geodetiche, lungo le quali $ds \equiv 0$, sono dette nulle o isotrope.

[2]) Il potenziale φ è naturalmente definito a meno di una costante arbitraria additiva. Faremo sempre la scelta di questa costante in mode che il potenziale si annulli in regioni lontane dai corpi che generano il campo.

Confrontando questa espressione con $S = -mc \int ds$, si vede che, nel caso limite considerato,

$$ds = \left(c - \frac{v^2}{2c} + \frac{\varphi}{c}\right) dt.$$

Elevando al quadrato e trascurando i termini che si annullano per $c \to \infty$, troviamo:

$$ds^2 = (c^2 + 2\varphi)\, dt^2 - d\mathbf{r}^2, \tag{87,11}$$

dove abbiamo tenuto conto che $\mathbf{v}\, dt = d\mathbf{r}$.

Dunque, la componente g_{00} del tensore metrico nel caso limite è

$$g_{00} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2}. \tag{87,12}$$

Per quanto riguarda le altre componenti, dalla (87,11) risulterebbe che $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$, $g_{0\alpha} = 0$. In realtà, però, le correzioni da fare a queste componenti sono in generale dello stesso ordine della correzione di g_{00} (vedi a questo proposito piú dettagliatamente nel § 106). L'impossibilità di determinare queste correzioni con il procedimento indicato è dovuta al fatto che la correzione in $g_{\alpha\beta}$, che è dello stesso ordine di grandezza che in g_{00}, condurebbe nella funzione di Lagrange a termini infinitesimi di ordine superiore (poiché nell'espressione di ds^2 le componenti $g_{\alpha\beta}$ non sono moltiplicate per c^2, come ciò avviene per g_{00}).

PROBLEMA

Ricavare l'equazione del moto (87,3) a partire dal principio di minima azione (87,1).

Soluzione. Si ha

$$\delta\, ds^2 = 2\, ds \delta\, ds = \delta\,(g_{ik}\, dx^i\, dx^k) = dx^i\, dx^k \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}\, \delta x^l + 2 g_{ik}\, dx^i\, d\delta x^k.$$

Perciò

$$\delta S = -mc \int \left\{ \frac{1}{2} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}\, \delta x^l + g_{ik} \frac{dx^i}{ds} \frac{d\delta x^k}{ds} \right\} ds =$$

$$= -mc \int \left\{ \frac{1}{2} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}\, \delta x^l - \frac{d}{ds}\left(g_{ik} \frac{dx^i}{ds} \right) \delta x^k \right\} ds$$

(nell'integrazione per parti si è tenuto presente che agli estremi $\delta x^k = 0$). Sostituiamo nel secondo termine l'indice k sotto il segno d'integrazione con l'indice l. Troviamo allora, annulando il coefficiente della variazione arbitraria δx^l:

$$\frac{1}{2} u^i u^k \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - \frac{d}{ds}(g_{il} u^i) = \frac{1}{2} u^i u^k \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - g_{il} \frac{du^i}{ds} - u^i u^k \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} = 0.$$

Notando che si può scrivere il terzo termine nella forma

$$-\frac{1}{2}u^i u^k\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}\right),$$

ed introducendo i simboli di Christoffel $\Gamma_{l,ik}$, ricavati dalla (86,2), otteniamo:

$$g_{il}\frac{du^i}{ds}+\Gamma_{l,\,ik}u^i u^k=0.$$

Di qui, l'equazione (87,3) si deduce elevando l'indice l.

§ 88. *Campo gravitazionale costante*

Un campo gravitazionale è detto *costante* se è possibile scegliere un sistema di riferimento tale che tutte le componenti del tensore metrico non dipendano dalla coordinata temporale x^0; quest'ultima si chiama allora *tempo universale*.

La scelta del tempo universale non è del tutto univoca. Per esempio, quando si aggiunge ad x^0 una funzione arbitraria delle coordinate spaziali, tutte le g_{ik}, come prima, non contengono la x^0; questa trasformazione corrisponde all'arbitrio nella scelta dell'origine del tempo in ogni punto dello spazio[1]). È inoltre evidente che il tempo universale può essere moltiplicato per una costante arbitraria, cioè, ammette una scelta arbitraria della sua unità di misura.

Parlando rigorosamente, può essere costante soltanto un campo creato da un corpo solo. In un sistema di piú corpi, la loro mutua attrazione gravitazionale genera un moto, in conseguenza del quale il campo creato da questi corpi non può essere costante.

Se il corpo che crea il campo è immobile (nel sistema di riferimento dove le g_{ik} non dipendono da x^0), le due direzioni del tempo sono equivalenti. Con una scelta adeguata dell'origine del tempo si può fare che in ogni punto l'intervallo ds non cambi cambiando segno a x^0, e, di conseguenza, tutte le componenti $g_{0\alpha}$ del tensore metrico debbono essere identicamente nulle. Tali campi gravitazionali costanti si chiamano *statici*.

---

[1]) È facile vedere che in questa trasformazione la metrica spaziale non varia, come era da aspettarsi. Infatti, facendo la sostituzione:

$$x^0 \to x^0 + f\,(x^1,\ x^2,\ x^3)$$

dove $f\,(x^1,\ x^2,\ x^3)$ è una funzione arbitraria, le componenti di g_{ik} si trasformano secondo le formule:

$$g_{\alpha\beta}\to g_{\alpha\beta}+g_{00}f_{,\,\alpha}f_{,\,\beta}+g_{0\alpha}f_{,\,\beta}+g_{0\beta}f_{,\,\alpha},$$

$$g_{0\alpha}\to g_{0\alpha}+g_{00}f_{,\,\alpha},\quad g_{00}\to g_{00},$$

dove $f_{,\alpha}\equiv\partial f/\partial x^\alpha$. È evidente, inoltre, che il tensore tridimensionale (84,7) non cambia.

Tuttavia, l'immobilità di un corpo non è una condizione necessaria perché il campo da esso creato sia costante. Per esempio, sarà costante anche il campo creato da un corpo dotato di simmetria assiale, che ruota uniformemente attorno al suo asse. In questo caso, però, i due sensi del tempo non sono piú equivalenti: cambiando di segno li tempo cambia di segno la velocità angolare di rotazione. Di conseguenza, in tali campi gravitazionali costanti (che chiameremo *campi stazionari*) le componenti $g_{0\alpha}$ del tensore metrico sono, in generale, differenti da zero.

Il significato del tempo universale in un campo gravitazionale costanteè che l'intervallo di tale tempo tra due eventi in un punto coincide con quello tra qualsiasi altri due eventi in ogni altro punto dello spazio, rispettivamente simultanei (nel senso indicato nel § 84) con i primi due eventi. Ad intervalli di tempo universale x^0 identici corrispondono in diversi punti dello spazio diversi intervalli di tempo proprio τ. La relazione (84,1) esistente tra essi può essere scritta ora nella forma

$$\tau = \frac{1}{c}\sqrt{g_{00}}\,x^0, \tag{88,1}$$

applicabile a qualsiasi intervallo finito di tempo.

In un campo gravitazionale debole, si può utilizzare l'espressione approssimata (87,12); la formula (88,1) dà allora, con la stessa approssimazione:

$$\tau = \frac{x_0}{c}\left(1 + \frac{\varphi}{c^2}\right). \tag{88,2}$$

In tal modo, il tempo proprio trascorre piú lentamente quanto piú piccolo è il potenziale gravitazionale nel punto dato dello spazio, cioè, quanto piú grande è il suo valore assoluto (piú avanti, nel § 99, verrà dimostrato che il potenziale φ è negativo). Se di due orologi identici uno è stato per un certo tempo in un campo gravitazionale, questo orologio risulterà in ritardo rispetto all'altro.

Come abbiamo già indicato, le componenti $g_{0\alpha}$ del tensore metrico sono nulle in un campo gravitazionale statico. Ciò vuol dire, tenendo conto dei risultati ottenuti nel § 84, che in un tale campo si possono sincronizzare gli orologi in tutto lo spazio.

Notiamo anche che in un campo statico l'elemento di distanza spaziale è

$$dl^2 = -g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta. \tag{88,3}$$

In un campo stazionario, le $g_{0\alpha}$ non sono nulle, e la sincronizzazione simultanea degli orologi in tutto lo spazio è impossibile. Poiché le g_{ik} non dipendono da x^0, la formula (84,14) per la differenza dei tempi universali di due eventi simultanei aventi luogo in differenti punti dello spazio può essere scritta nella

forma

$$\Delta x^0 = -\int \frac{g_{0\alpha}\, dx^\alpha}{g_{00}}, \tag{88,4}$$

applicabile a due punti arbitrari sulla linea lungo la quale si esegue la sincronizzazione degli orologi. Quando la sincronizzazione è fatta su un contorno chiuso, la differenza dei valori del tempo universale che si rivelerebbe ritornando al punto di partenza è data dall'integrale

$$\Delta x^0 = -\oint \frac{g_{0\alpha}\, dx^\alpha}{g_{00}}, \tag{88,5}$$

esteso a questo contorno chiuso[1]).

Consideriamo la propagazione dei raggi di luce in un campo gravitazionale costante. Abbiamo visto nel § 53 che la frequenza della luce è uguale alla derivata dell'iconale ψ rispetto al tempo (con segno contrario). La frequenza misurata secondo il tempo universale x^0/c è quindi uguale a $\omega_0 = -c\partial\psi/\partial x^0$. Poiché l'equazione dell'iconale (87,9) in un campo costante non contiene x^0 esplicitamente, la frequenza ω_0, nella propagazione del raggio di luce, resta costante. Per quanto concerne la frequenza misurata secondo il tempo proprio, essa è uguale a $\omega = -\partial\psi/\partial\tau$; essa è differente nei diversi punti dello spazio.

In forza della relazione

$$\frac{\partial\psi}{\partial\tau} = \frac{\partial\psi}{\partial x^0}\,\frac{\partial x^0}{\partial\tau} = \frac{\partial\psi}{\partial x^0}\,\frac{c}{\sqrt{g_{00}}}$$

si ha

$$\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{g_{00}}}. \tag{88,6}$$

Di qui si deduce, per un campo gravitazionale debole, il valore approssimato:

$$\omega = \omega_0\left(1 - \frac{\varphi}{c^2}\right). \tag{88,7}$$

Si vede che la frequenza della luce aumenta con il crescere del valore assoluto del potenziale del campo viceversa, cioè all'avvicinarsi ai corpi che creano il campo; inversamente, quando un raggio si allontana da questi corpi, la frequenza della luce diminuisce. Se un raggio di luce, emesso in un punto dove il potenziale gravitazionale è φ_1, ha in questo punto la frequenza ω, allora, arrivato al punto

---

[1]) L'integrale (88,5) è identicamente nullo quando la somma $g_{\alpha 0}dx^\alpha/g_{00}$ è il differenziale totale di una certa funzione delle coordinate spaziali. Un tale caso significherebbe però che abbiamo a che fare in effetti con un campo statico e che, con una trasformazione tipo $x^0 \to x^0 + f(x^\alpha)$, tutte le $g_{\alpha 0}$ si possono annullare.

del potenziale φ_2, esso avrà la frequenza (misurata secondo il tempo proprio in questo punto)

$$\frac{\omega}{1-\frac{\varphi_1}{c^2}}\left(1-\frac{\varphi_2}{c^2}\right)=\omega\left(1+\frac{\varphi_1-\varphi_2}{c^2}\right).$$

Lo spettro di righe, emesso da qualsiasi atomo che si trovi, per esempio, sul Sole, ha lo stesso aspetto dello spettro emesso da atomi identici sulla Terra. Se si osserva dalla Terra lo spettro emesso da atomi sul Sole, allora, secondo quanto detto sopra, le sue righe risulteranno spostate rispetto alle righe dello stesso spettro emesso sulla Terra. Ciascuna riga di frequenza ω sarà appunto spostata del valore $\Delta\omega$ definito dalla formula

$$\Delta\omega=\frac{\varphi_1-\varphi_2}{c^2}\omega, \tag{88,8}$$

dove φ_1 e φ_2 sono i potenziali del campo gravitazionale rispettivamente nel punto d'emissione e nel punto d'osservazione dello spettro. Se si osserva sulla Terra uno spettro emesso dal Sole o dalle stelle, allora $|\varphi_1| > |\varphi_2|$, e dalla (88,8) risulta che $\Delta\omega < 0$, cioè avviene uno spostamento verso le piccole frequenze. Il fenomeno descritto si chiama *spostamento verso il rosso*.

L'origine di questo fenomeno si può spiegare partendo direttamente da quanto è stato detto a proposito del tempo universale. Poiché il campo è costante, l'intervallo di tempo universale, nel corso del quale un'oscillazione dell'onda luminosa si propaga da un punto dato dello spazio ad un altro, non dipende da x^0. È chiaro dunque che il numero di oscillazioni aventi luogo nell'unità di tempo universale sarà lo stesso in tutti i punti del raggio. Un intervallo uguale di tempo universale corrisponde però ad un intervallo di tempo proprio tanto piú grande quanto maggiore è la distanza che ci separa dai corpi che creano il campo. Di conseguenza, la frequenza, cioè il numero di oscillazioni nell'unità di tempo proprio, diminuirà con l'allontanarsi della luce da queste masse.

Quando una particella si muove in un campo costante, la sua energia definita come la derivata $(-c\,\partial S/\partial x^0)$ dell'azione rispetto al tempo universale si conserva, ciò risulta, per esempio, dal fatto che x^0 non entra esplicitamente nell'equazione di Hamilton-Jacobi. L'energia cosí definita è la componente temporale del quadrivettore impulso $p_k = mcu_k = mcg_{ki}u^i$. In un campo statico, $ds^2 = g_{00}(dx^0)^2 - dl^2$, e per l'energia, che indichiamo qui con $\mathscr{E}_0$, si ha:

$$\mathscr{E}_0 = mc^2 g_{00}\frac{dx^0}{ds} = mc^2 g_{00}\frac{dx^0}{\sqrt{g_{00}(dx^0)^2-dl^2}}.$$

Introduciamo la velocità della particella:

$$v = \frac{dl}{d\tau} = \frac{c\,dl}{\sqrt{g_{00}}\,dx^0},$$

misurata in tempo proprio, cioè dall'osservatore che si trova nel punto dato. Per l'energia avremo allora:

$$\mathscr{E}_0 = \frac{mc^2\sqrt{g_{00}}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{88,9}$$

Questa è la grandezza che resta costante durante il moto della particella.

È facile dimostrare che l'espressione (88,9) dell'energia resta valida anche in un campo stazionario, se però la velocità v è misurata in tempo proprio, indicato dall'orologio sincronizzato lungo la traiettoria della particella. Se la particella parte dal punto A nell'istante di tempo universale x^0 ed arriva al punto infinitamente vicino B nell'istante $x^0 + dx^0$, per determinare la velocità si dovrà prendere non l'intervallo di tempo $(x^0 + dx^0) - x^0 = dx^0$, ma la differenza tra $x^0 + dx^0$ e l'istante $x^0 - \frac{g_{0\alpha}}{g_{00}}\,dx^\alpha$ che è simultaneo nel punto B con l'istante x^0 nel punto A:

$$(x^0 + dx^0) - \left(x^0 - \frac{g_{0\alpha}}{g_{00}}\,dx^\alpha\right) = dx^0 + \frac{g_{0\alpha}}{g_{00}}\,dx^\alpha.$$

Moltiplicando quest'ultimo per $\sqrt{g_{00}}/c$, si ottiene l'intervallo corrispondente di tempo proprio, e quindi la velocità si scrive

$$v^\alpha = \frac{c\,dx^\alpha}{\sqrt{h}\,(dx^0 - g_\alpha\,dx^\alpha)}, \tag{88,10}$$

dove abbiamo introdotto le notazioni

$$g_\alpha = -\frac{g_{0\alpha}}{g_{00}}, \quad h = g_{00} \tag{88,11}$$

per il vettore tridimensionale $\mathbf{g}$ (già definito nel § 84) e per lo scalare tridimensionale g_{00}. Le componenti covarianti della velocità $\mathbf{v}$ quale vettore tridimensionale nello spazio di metrica $\gamma_{\alpha\beta}$ e il rispettivo quadrato di questo vettore sono interpretati come segue[1]):

$$v_\alpha = \gamma_{\alpha\beta} v^\beta, \quad v^2 = v_\alpha v^\alpha. \tag{88,12}$$

---

[1]) In seguito, spesso considereremo, accanto a 4-vettori e 4-tensori, anche vettori e tensori tridimensionali, determinati nello spazio di metrica $\gamma_{\alpha\beta}$; tali sono, in particolare, i vettori $\mathbf{g}$ e $\mathbf{v}$ già introdotti. Mentre nel primo caso le operazioni tensoriali (compresi l'innalzamento e l'abbassamento degli indici) si fanno con l'aiuto del tensore metrico g_{ik}, nel secondo caso si ricorre al tensore $\gamma_{\alpha\beta}$. A scanso di eventuali malintesi, indicheremo le grandezze tridimensionali con simboli che non si usano per le grandezze quadridimensionali.

Notiamo che con una tale definizione, l'intervallo ds si esprime in funzione della velocità con una formula analoga a quella ordinaria:

$$ds^2 = g_{00}(dx^0)^2 + 2g_{0\alpha}\,dx^0\,dx^\alpha + g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta =$$
$$= h\,(dx^0 - g_\alpha\,dx^\alpha)^2 - dl^2 = h\,(dx^0 - g_\alpha\,dx^\alpha)^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right). \qquad (88,13)$$

Le componenti della quadrivelocità $u^i = dx^i/ds$ sono:

$$u^\alpha = \frac{v^\alpha}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad u^0 = \frac{1}{\sqrt{h}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{g_\alpha v^\alpha}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (88,14)$$

Quanto all'energia

$$\mathscr{E}_0 = mc^2 g_{0i}u^i = mc^2 h\,(u^0 - g_\alpha u^\alpha)$$

essa assume la forma (88,9) dopo la sostituzione (88,14).

Nel caso limite di un campo gravitazionale debole e di piccole velocità, sostituendo nella (88,9) $g_{00} = 1 + 2\varphi/c^2$, si ottiene approssimativamente

$$\mathscr{E}_0 = mc^2 + \frac{mv^2}{2} + m\varphi, \qquad (88,15)$$

dove $m\varphi$ è l'energia potenziale della particella nel campo gravitazionale, risultato che è in accordo con la lagrangiana (87,10).

PROBLEMI

1. Determinare la forza agente su una particella in un campo gravitazionale costante.

Soluzione. Le componenti utili di Γ^i_{kl} sono date dalle seguenti espressioni:

$$\Gamma^\alpha_{00} = \frac{1}{2}h^{;\alpha},$$
$$\Gamma^\alpha_{0\beta} = \frac{h}{2}(g^\alpha_{;\beta} - g^{;\alpha}_\beta) - \frac{1}{2}g_\beta h^{;\alpha}, \qquad (1)$$
$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \lambda^\alpha_{\beta\gamma} + \frac{h}{2}[g_\beta(g^{;\alpha}_\gamma - g^\alpha_{;\gamma}) + g_\gamma(g^{;\alpha}_\beta - g^\alpha_{;\beta})] + \frac{1}{2}g_\beta g_\gamma h^{;\alpha}.$$

In queste espressioni, tutte le operazioni tensoriali (derivazione covariante, innalzamento ed abbassamento degli indici) sono fatte nello spazio a tre dimensioni di metrica $\gamma_{\alpha\beta}$ e riguardano il vettore tridimensionale g^α e lo scalare tridimensionale h (88,11); $\lambda^\alpha_{\beta\gamma}$ è il simbolo di Christoffel tridimensionale formato con le componenti del tensore $\gamma_{\alpha\beta}$ allo stesso modo come le Γ^i_{kl} sono formate mediante le componenti di g_{ik}; nei calcoli, sono state utilizzate le formule dalla (84,9) alla (84,12).

Sostituendo la (1) nell'equazione del moto

$$\frac{du^\alpha}{ds} = -\Gamma^\alpha_{00}(u^0)^2 - 2\Gamma^\alpha_{0\beta}u^0u^\beta - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}u^\beta u^\gamma$$

ed utilizzando le espressioni (88,14) per le componenti della quadrivelocità, dopo semplici trasformazioni otteniamo:

$$\frac{d}{ds}\frac{v^\alpha}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=-\frac{h^{;\alpha}}{2h\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}-\frac{\sqrt{h}\,(g^\alpha_{;\beta}-g^{;\alpha}_\beta)\,v^\beta}{c\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}-\frac{\lambda^\alpha_{\beta\gamma}v^\beta v^\gamma}{c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}. \tag{2}$$

La forza **f** agente sulla particella è la derivata del suo impulso **p** rispetto al tempo proprio (sincronizzato), definita tramite il differenziale covariante tridimensionale:

$$f^\alpha=c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\frac{Dp^\alpha}{ds}=c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\frac{d}{ds}\frac{mv^\alpha}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}+\lambda^\alpha_{\beta\gamma}\frac{mv^\beta v^\gamma}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Dalla (2) ricaviamo quindi (abbassando per comodità l'indice α):

$$f_\alpha=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left\{-\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\ln\sqrt{h}+\sqrt{h}\left(\frac{\partial g_\beta}{\partial x^\alpha}-\frac{\partial g_\alpha}{\partial x^\beta}\right)\frac{v^\beta}{c}\right\},$$

oppure, con le notazioni vettoriali tridimensionali ordinarie[1]),

$$\mathbf{f}=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left\{-\operatorname{grad}\ln\sqrt{h}+\sqrt{h}\left[\frac{\mathbf{v}}{c}\operatorname{rot}\mathbf{g}\right]\right\}. \tag{3}$$

---

[1]) In coordinate curvilinee tridimensionali, un tensore unitario antisimmetrico è definito da

$$\eta_{\alpha\beta\gamma}=\sqrt{\gamma}\,e_{\alpha\beta\gamma},\qquad \eta^{\alpha\beta\gamma}=\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\,e^{\alpha\beta\gamma},$$

dove $e_{123}=e^{123}=1$, e per permutazione di due indici cambia di segno [cfr. la (83,13) e la (83,14)]. Ne risulta che il vettore $\mathbf{c}=[\mathbf{ab}]$, definito come un vettore duale del tensore antisimmetrico $c_{\beta\gamma}=a_\beta b_\gamma-a_\gamma b_\beta$, ha per componenti:

$$c_\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{\gamma}\,e_{\alpha\beta\gamma}c^{\beta\gamma}=\sqrt{\gamma}\,e_{\alpha\beta\gamma}a^\beta b^\gamma,\qquad c^\alpha=\frac{1}{2\sqrt{\gamma}}\,e^{\alpha\beta\gamma}c_{\beta\gamma}=\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\,e^{\alpha\beta\gamma}a_\beta b_\gamma.$$

Al contrario:

$$c_{\alpha\beta}=\sqrt{\gamma}\,e_{\alpha\beta\gamma}c^\gamma,\qquad c^{\alpha\beta}=\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\,e^{\alpha\beta\gamma}c_\gamma.$$

In particolare, rot **a** va inteso nello stesso senso come vettore duale del tensore $a_{\beta;\alpha}-a_{\alpha;\beta}=\frac{\partial a_\beta}{\partial x^\alpha}-\frac{\partial a_\alpha}{\partial x_\beta}$, in modo che le sue componenti controvarianti sono:

$$(\operatorname{rot}\mathbf{a})^\alpha=\frac{1}{2\sqrt{\gamma}}\,e^{\alpha\beta\gamma}\left(\frac{\partial a_\gamma}{\partial x^\beta}-\frac{\partial a_\beta}{\partial x^\gamma}\right).$$

A questo proposito, ricordiamo anche che la divergenza tridimensionale del vettore è

$$\operatorname{div}\mathbf{a}=\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\sqrt{\gamma}\,a^\alpha\right)$$

[cfr. la (86,9)].

Notiamo che se il corpo è immobile, la forza che agisce su di esso (il primo termine nelle (3)) ha allora un potenziale. Per velocità del moto piccole, il secondo termine nella (3) è della forma $mc\sqrt{h}\,[\mathbf{v}\ \mathrm{rot}\ \mathbf{g}]$ analoga alla forza di Coriolis che sarebbe generata (se non ci fosse il campo) in un sistema di coordinate rotante con la velocità angolare

$$\mathbf{\Omega} = \frac{c}{2}\sqrt{h}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{g}.$$

2. Stabilire il principio di Fermat per la propagazione di raggi in un campo gravitazionale costante.

Soluzione. Il principio di Fermat (vedi § 53) postula:

$$\delta \int k_\alpha dx^\alpha = 0,$$

dove l'integrale è esteso al raggio, e l'espressione integranda deve essere scritta in funzione della frequenza ω_0, costante lungo il raggio, e dei i differenziali delle coordinate. Notando che $k_0 = -\partial\psi/\partial x^0 = \omega_0/c$, scriviamo:

$$\frac{\omega_0}{c} = k_0 = g_{0i}k^l = g_{00}k^0 + g_{0\alpha}k^\alpha = h\,(k^0 - g_\alpha k^\alpha).$$

Sostituendo questa espressione nella relazione $k_i k^i = g_{ik}k^i k^k = 0$, scritta nella forma

$$h\,(k^0 - g_\alpha k^\alpha)^2 - \gamma_{\alpha\beta}k^\alpha k^\beta = 0,$$

si ottiene:

$$\frac{1}{h}\left(\frac{\omega_0}{c}\right)^2 - \gamma_{\alpha\beta}k^\alpha k^\beta = 0.$$

Poiché il vettore k^α deve essere diretto lungo il vettore dx^α, ne segue che

$$k^\alpha = \frac{\omega_0}{c\sqrt{h}}\frac{dx^\alpha}{dl},$$

dove dl (84,6) è l'elemento di distanza spaziale lungo il raggio. Per ottenere l'espressione di k_α, scriviamo:

$$k^\alpha = g^{\alpha i}k_i = g^{\alpha 0}k_0 + g^{\alpha\beta}k_\beta = -g^\alpha\frac{\omega_0}{c} - \gamma^{\alpha\beta}k_\beta,$$

donde

$$k_\alpha = -\gamma_{\alpha\beta}\left(k^\beta + \frac{\omega_0}{c}g^\beta\right) = -\frac{\omega_0}{c}\left(\frac{\gamma_{\alpha\beta}}{\sqrt{h}}\frac{dx^\beta}{dl} + g_\alpha\right).$$

Infine, moltiplicando per dx^α, otteniamo il principio di Fermat nella forma (omettendo il fattore costante ω_0/c)

$$\delta \int \left(\frac{dl}{\sqrt{h}} + g_\alpha\,dx^\alpha\right) = 0.$$

A scanso di equivoci, per un confronto con le formule che sono applicate sovente alle operazioni vettoriali tridimensionali in coordinate curvilinee ortogonali (vedi, per esempio, vol. VIII, *Elettrodinamica dei mezzi continui*, appendice), ricordiamo che in queste formule con componenti del vettore s'intendono le grandezze $\sqrt{g_{11}}A^1$ $(=\sqrt{A_1A^1})$, $\sqrt{g_{22}}A^2$, $\sqrt{g_{33}}A^3$.

In un campo statico si ha semplicemente:

$$\delta \int \frac{dl}{\sqrt{h}} = 0.$$

Sottolineiamo che in un campo gravitazionale un raggio non si propaga lungo la linea piú breve nello spazio, perché quest'ultima sarebbe definita dall'equazione $\delta \int dl = 0$.

§ 89. *Rotazione*

Un caso particolare di campi gravitazionali stazionari è rappresentato dal campo che si crea passando ad un sistema di riferimento in rotazione uniforme.

Per determinare l'intervallo ds, passiamo dal sistema immobile (inerziale) al sistema uniformemente rotante. Nel sistema immobile di coordinate r', φ', z', t (utilizziamo le coordinate cilindriche spaziali) l'intervallo ha la forma

$$ds^2 = c^2\, dt^2 - dr'^2 - r'^2\, d\varphi'^2 - dz'^2. \qquad (89,1)$$

Siano r, φ, z le coordinate cilindriche nel sistema rotante. Se l'asse di rotazione coincide con gli assi delle z e delle z', abbiamo allora $r' = r$, $z' = z$, $\varphi' = \varphi + \Omega t$, dove Ω è la velocità angolare di rotazione. Sostituendo nella (89,1), troviamo l'espressione cercata dell'intervallo nel sistema di riferimento rotante:

$$ds^2 = (c^2 - \Omega^2 r^2)\, dt^2 - 2\Omega r^2\, d\varphi\, dt - dz^2 - r^2\, d\varphi^2 - dr^2. \qquad (89,2)$$

È necessario notare che l'uso del sistema di riferimento rotante è possibile soltanto per distanze uguali a c/Ω. Dalla (89,2) si vede infatti che per $r > c/\Omega$ la grandezza g_{00} diventa negativa, cosa che non è ammissibile. L'impossibilità di utilizzare il sistema di riferimento rotante per grandi distanze è dovuta al fatto che la velocità di rotazione diventerebbe a tali distanze maggiore della velocità della luce; un tale sistema non può essere perciò realizzato da corpi reali.

Come in ogni campo stazionario, gli orologi non si possono sincronizzare univocamente in tutti i punti di un corpo rotante. Sincronizzando lungo un certo contorno chiuso, si ottiene, ritornando al punto di partenza, un tempo che differisce dal tempo iniziale per la grandezza (vedi la (88,5))

$$\Delta t = -\frac{1}{c} \oint \frac{g_{0\alpha}}{g_{00}}\, dx^\alpha = \frac{1}{c^2} \oint \frac{\Omega r^2\, d\varphi}{1 - \frac{\Omega^2 r^2}{c^2}}$$

oppure, supponendo $\Omega r/c \ll 1$ (cioè la velocità di rotazione piccola rispetto alla velocità della luce),

$$\Delta t = \frac{\Omega}{c^2} \int r^2 \, d\varphi = \pm \frac{2\Omega}{c^2} S, \tag{89,3}$$

dove S è l'area della proiezione del contorno su un piano perpendicolare all'asse di rotazione (il segno $+$ o $-$ si sceglie a seconda che il contorno sia descritto nel senso orario o antiorario).

Supponiamo che un raggio di luce descriva un contorno chiuso. Calcoliamo, limitandoci ai termini dell'ordine di v/c, il tempo t trascorso tra la partenza del raggio e il suo ritorno al punto iniziale. La velocità della luce è, per definizione, sempre uguale a c, se il tempo è sincronizzato lungo la linea chiusa e se si usa in ogni punto il tempo proprio. Poiché la differenza tra il tempo proprio e il tempo universale è dell'ordine di v^2/c^2, si può allora trascurare questa differenza calcolando l'intervallo di tempo t a meno delle grandezze dell'ordine di v/c. Si ha dunque:

$$t = \frac{L}{c} \pm \frac{2\Omega}{c^2} S,$$

dove L è la lunghezza del contorno. Ne risulta che la velocità della luce, misurata come il rapporto L/t, è

$$c \pm 2\Omega \frac{S}{L}. \tag{89,4}$$

Questa formula, come pure la formula dell'effetto Doppler in prima approssimazione, si deduce facilmente per via puramente classica.

PROBLEMA

Determinare l'elemento di distanza spaziale in un sistema di coordinate rotante.

Soluzione. Le formule (84,6) e (84,7) ci permettono di trovare:

$$dl^2 = dr^2 + dz^2 + \frac{r^2 \, d\varphi^2}{1 - \Omega^2 \frac{r^2}{c^2}},$$

espressione che determina la geometria spaziale nel sistema di riferimento rotante. Notiamo che il rapporto fra la lunghezza della circonferenza nel piano $z =$ costante (di centro sull'asse di rotazione) e il suo raggio r è

$$\frac{2\pi}{\sqrt{1 - \frac{\Omega^2 r^2}{c^2}}} > 2\pi.$$

§ 90. *Equazioni dell'elettrodinamica in presenza di un campo gravitazionale*

Le equazioni del campo elettromagnetico della relatività ristretta si possono facilmente generalizzare in modo tale che esse siano applicabili a qualsiasi sistema quadridimensionale di coordinate curvilinee, cioè al caso in cui esista un campo gravitazionale.

Il tensore del campo elettromagnetico in relatività ristretta era definito come $F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}$. È evidente che esso deve essere ora definito rispettivamente come $F_{ik} = A_{k;\,i} - A_{i;\,k}$. In forza della (86,12), si ha:

$$F_{ik} = A_{k;\,i} - A_{i;\,k} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}, \tag{90,1}$$

e, di conseguenza, la relazione tra F_{ik} e il potenziale A_i non cambia. Ne risulta che le equazioni di Maxwell (26,5)

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} = 0 \tag{90,2}$$

conservano la loro forma[1]).

Per poter scrivere le equazioni di Maxwell non omogeneo, bisogna preliminarmente definire la quadricorrente in coordinate curvilinee. A questo scopo, procederemo esattamente come nel § 28. L'elemento spaziale di volume, costruito con gli elementi di coordinate dx^1, dx^2, dx^3, è $\sqrt{\gamma}\, dV$, dove γ è il determinante del tensore metrico (84,7) e $dV = dx^1 dx^2 dx^3$ (vedi la nota alla pag.306). Introduciamo la densità di carica ρ secondo la definizione $de = \rho\sqrt{\gamma}\, dV$, dove de è la carica contenuta nell'elemento di volume $\sqrt{\gamma}\, dV$. Moltiplicando quest'ultima uguaglianza, da una parte e dall'altra, per dx^i, otteniamo:

$$de\, dx^i = \rho\, dx^i \sqrt{\gamma}\, dx^1\, dx^2\, dx^3 = \frac{\rho}{\sqrt{g_{00}}} \sqrt{-g}\, d\Omega\, \frac{dx^i}{dx^0}$$

(abbiamo utilizzato la formula $-g = \gamma g_{00}$ (84,10)). Il prodotto $\sqrt{-g}\, d\Omega$ è l'elemento di 4-volume invariante, cosicché la quadricorrente sarà definita dall'espressione

$$j^i = \frac{\rho c}{\sqrt{g_{00}}} \frac{dx^i}{dx^0} \tag{90,3}$$

---

[1]) È facile vedere che questa equazione può essere anche scritta nella forma

$$F_{ik;\,l} + F_{li;\,k} + F_{kl;\,i} = 0,$$

donde risulta la sua covarianza.

(le dx^i/dx^0 sono le velocità di variazione delle coordinate con il «tempo» x^0, ma queste grandezze non formano da sole un quadrivettore!). La componente j^0 della quadricorrente, moltiplicata per $\sqrt{g_{00}}/c$, è la densità di carica spaziale.

Per le cariche puntiformi, la densità ρ si esprime mediante la somma di funzioni δ, analogamente alla formula (28,1). È evidente che si dovrà inoltre determinare queste funzioni nel caso di coordinate curvilinee. Intenderemo, come prima, $\delta(\mathbf{r})$ come il prodotto $\delta(x^1)\,\delta(x^2)\,\delta(x^3)$; qualunque sia il significato geometrico delle coordinate x^1, x^2, x^3 l'integrale si prende allora in dV (e non in $\sqrt{\gamma}\,dV$) ed è uguale all'unità: $\int \delta(\mathbf{r})\,dV = 1$.

Per una tale definizione delle funzioni δ, la densità di carica è

$$\rho = \sum_a \frac{e_a}{\sqrt{\gamma}}\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a),$$

e la quadricorrente

$$j^i = \sum_a \frac{e_a c}{\sqrt{-g}}\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a)\,\frac{dx^i}{dx^0}. \tag{90,4}$$

La conservazione della carica è espressa dall'equazione di continuità che differisce dalla (29,4) soltanto per sostituzione delle derivate ordinarie con quelle covarianti:

$$j^i{}_{;i} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\,\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{-g}\,j^i\right) = 0 \tag{90,5}$$

(abbiamo utilizzato la formula (86,9)).

In modo analogo si generalizzano ora le equazioni di Maxwell (30,2); sostituendo in esse le derivate ordinarie con quelle covarianti, otteniamo:

$$F^{ik}{}_{;k} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\,\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{-g}\,F^{ik}\right) = -\frac{4\pi}{c}\,j^i \tag{90,6}$$

(abbiamo utilizzato la formula (86,10)).

Infine, le equazioni del moto di una particella carica in campi gravitazionale ed elettromagnetico si ottengono sostituendo il quadrivettore accelerazione du^i/ds nella (23,4) con Du^i/ds:

$$mc\,\frac{Du^i}{ds} = mc\left(\frac{du^i}{ds} + \Gamma^i_{kl}u^k u^l\right) = \frac{e}{c}\,F^{ik}u_k. \tag{90,7}$$

PROBLEMA

Scrivere le equazioni di Maxwell in un campo gravitazionale dato in forma tridimensionale (nello spazio a tre dimensioni di metrica $\gamma_{\alpha\beta}$), introducendo i vettori tridimensionali **E**, **D** ed i tensori antisimmetrici tridimensionali $B_{\alpha\beta}$

ed $H_{\alpha\beta}$ definiti da:

$$E_\alpha = F_{0\alpha}, \qquad B_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta},$$
$$D^\alpha = -\sqrt{g_{00}}\, F^{0\alpha}, \qquad H^{\alpha\beta} = \sqrt{g_{00}}\, F^{\alpha\beta}. \tag{1}$$

Soluzione. Le grandezze introdotte nel modo indicato non sono indipendenti. Sviluppando le uguaglianze

$$F_{0\alpha} = g_{0l} g_{\alpha m} F^{lm}, \qquad F^{\alpha\beta} = g^{\alpha l} g^{\beta m} F_{lm},$$

introducendo inoltre il tensore metrico tridimensionale $\gamma_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} + h g_\alpha g_\beta$ (g ed h sono ricavate dalla (88,11)) ed applicando le formule (84,9) e (84,12), otteniamo:

$$D_\alpha = \frac{E_\alpha}{\sqrt{h}} + g^\beta H_{\alpha\beta}, \qquad B^{\alpha\beta} = \frac{H^{\alpha\beta}}{\sqrt{h}} + g^\beta E^\alpha - g^\alpha E^\beta. \tag{2}$$

Introduciamo i vettori **B**, **H**, duali dei tensori $B_{\alpha\beta}$ ed $H_{\alpha\beta}$ secondo la definizione

$$B^\alpha = -\frac{1}{2\sqrt{\gamma}}\, e^{\alpha\beta\gamma} B_{\beta\gamma}, \qquad H_\alpha = -\frac{1}{2}\sqrt{\gamma}\, e_{\alpha\beta\gamma} H^{\beta\gamma} \tag{3}$$

(cfr. la nota alla pag. 331; il segno meno è stato introdotto perche i vettori **H** e **B** coincidano in coordinate galileiane con l'ordinario vettore campo magnetico). Si può allora scrivere la (2) nella forma

$$\mathbf{D} = \frac{\mathbf{E}}{\sqrt{h}} + [\mathbf{Hg}], \qquad \mathbf{B} = \frac{\mathbf{H}}{\sqrt{h}} + [\mathbf{gE}]. \tag{4}$$

Introducendo le definizioni (1) nella (90,2), abbiamo le equazioni:

$$\frac{\partial B_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial B_{\gamma\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial B_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} = 0,$$
$$\frac{\partial B_{\alpha\beta}}{\partial x^0} + \frac{\partial E_\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{\partial E_\beta}{\partial x^\alpha} = 0$$

oppure, passando alle grandezze duali (3):

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \qquad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{\gamma}\, \mathbf{B}) \tag{5}$$

$x^0 = ct$; le operazioni rot e div sono definite nella nota alla pag. 331). Dalla 90,6) in modo analogo ricaviamo le equazioni:

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\sqrt{\gamma}\, D^\alpha) = 4\pi\rho,$$

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial x^\beta} (\sqrt{\gamma}\, H^{\alpha\beta}) + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial x^0} (\sqrt{\gamma}\, D^\alpha) = -4\pi\rho \frac{dx^\alpha}{dx^0},$$

oppure, in notazioni vettoriali tridimensionali:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho, \qquad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{\gamma}\, \mathbf{D}) + \frac{4\pi}{c}\, \mathbf{s}, \tag{6}$$

dove **s** è il vettore di componenti $s^\alpha = \rho\, dx^\alpha/dt$.

Per completare il quadro, scriviamo anche l'equazione di continuità (90,5) nella forma tridimensionale:

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial}{\partial t}(\sqrt{\gamma}\,\rho)+\operatorname{div}\mathbf{s}=0. \tag{7}$$

Notiamo l'analogia (puramente formale) delle equazioni (5), (6) con le equazioni di Maxwell per il campo elettromagnetico nei mezzi materiali. In particolare, in un campo gravitazionale statico, i termini contenenti le derivate rispetto al tempo perdono $\sqrt{\gamma}$, e la (4) si riduce a $\mathbf{D}=\mathbf{E}/\sqrt{h}$, $\mathbf{B}=\mathbf{H}/\sqrt{h}$. Si può dire che il campo gravitazionale statico agente sul campo elettromagnetico funge da un mezzo di permeabilità elettrica e magnetica $\varepsilon=\mu=1/\sqrt{h}$.

Capitolo XI

EQUAZIONI DEL CAMPO GRAVITAZIONALE

§ 91. *Tensore di curvatura*

Torniamo ora di nuovo al problema del trasporto parallelo dei vettori. Come già è stato indicato nel § 85, nel caso generale di uno spazio quadridimensionale curvo, il trasporto parallelo infinitesimo di un vettore è definito come uno spostamento per il quale le componenti del vettore non variano in un sistema di coordinate che sia galileiano nell'elemento di volume infinitesimo dato.

Se $x^i = x^i(s)$ è l'equazione parametrica di una curva (dove s è la lunghezza d'arco misurata a partire da un punto dato), allora $u^i = dx^i/ds$ è il vettore unitario, tangente alla curva. Se la curva considerata è una geodetica, allora lungo questa curva si ha $Du^i = 0$. Ciò vuol dire che il vettore u^i, trasportato parallelamente da un punto x^i sulla geodetica ad un punto $x^i + dx^i$ sulla stessa geodetica, coincide con il vettore $u^i + du^i$, tangente a questa curva nel punto $x^i + dx^i$. Quindi nel trasporto parallelo lungo una geodetica la tangente non varia.

D'altra parte, nel trasporto parallelo di due vettori l'« angolo », da loro formato, resta evidentemente invariato. Si può dunque affermare che nel trasporto parallelo di qualsiasi vettore lungo una geodetica l'angolo tra questo vettore e la tangente alla curva resta invariato. In altri termini, le componenti di un vettore lungo la tangente alle geodetiche, nel trasporto parallelo, restano invariate in tutti i punti.

Un fatto fondamentale è che, in uno spazio curvo, traspnrto parallelo di un vettore da un punto dato ad un altro porta a risultati differenti se viene effettuato lungo percorsi differenti. In particolare, risulta che se si trasporta un vettore parallelamente a se stesso lungo un contorno chiuso, il vettore finale non coinciderà con quello iniziale.

Per spiegare questo fatto, consideriamo uno spazio curvo bidimensionale, cioè una qualsiasi superficie curva. La figura 19 rappresenta una parte di tale superficie, delimitata da tre linee geodetiche. Trasportiamo parallelamente il vettore 1 lungo il contorno formato da queste curve. Dopo il trasporto sulla curva AB il vettore 1, mantenendo sempre costante l'angolo con questa curva, diventerà in B il vettore 2. Dopo il trasporto lungo BC analogamente esso

diventerà il vettore 3. Infine, partendo da C verso A lungo la curva CA e conservando costante l'angolo con questa curva, il vettore considerato diventerà il vettore 1′, che non coinciderà con il vettore 1.

Stabiliamo la formula generale che determini la variazione di un vettore nel suo trasporto parallelo lungo una curva infinitesima

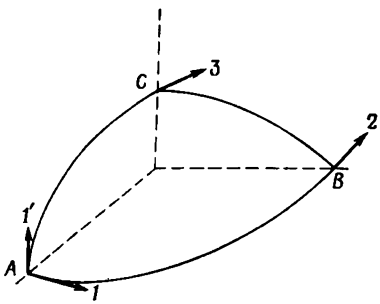

Fig. 19

chiusa. Questa variazione ΔA_k può essere scritta nella forma $\oint \delta A_k$, dove l'integrale è preso su tutta la curva data. Sostituendo a δA_k l'espressione (85,5), abbiamo:

$$\Delta A_k = \oint \Gamma^i_{kl} A_i \, dx^l; \tag{91,1}$$

il vettore A_i scritto sotto il segno d'integrazione varia lungo il cammino d'integrazione.

Per trasformare questo integrale, è necessario fare la seguente osservazione. I valori del vettore A_i nei punti all'interno del contorno non sono univoci: essi dipendono dal cammino percorso per arrivare al punto dato. Tuttavia, come si vedrà dai risultati ottenuti piú avanti, questa non univocità è del secondo ordine. Perciò, non tenendo conto dei termini del secondo ordine — il che è un'approssimazione sufficiente — si può considerare che le componenti del vettore A_i nei punti all'interno del contorno infinitesimo sono determinate univocamente dai loro valori sul contorno stesso secondo le formule $\delta A_i = \Gamma^n_{il} A_n dx^l$, cioè dalle derivate

$$\frac{\partial A_i}{\partial x^l} = \Gamma^n_{il} A_n. \tag{91,2}$$

Applicando ora il teorema di Stokes (6,19) all'integrale (91,1) e tenendo presente che la superficie delimitata dalla linea

chiusa considerata è una grandezza infinitesima Δf^{lm}, otteniamo:

$$\Delta A_k = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial(\Gamma^i_{km}A_i)}{\partial x^l} - \frac{\partial(\Gamma^i_{kl}A_i)}{\partial x^m}\right]\Delta f^{lm} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial\Gamma^i_{km}}{\partial x^l}A_i - \frac{\partial\Gamma^i_{kl}}{\partial x^m}A_i + \Gamma^i_{km}\frac{\partial A_i}{\partial x^l} - \Gamma^i_{kl}\frac{\partial A_i}{\partial x^m}\right]\Delta f^{lm}.$$

Sostituendo in quest'ultima espressione i valori delle derivate, dedotti dalla (91,2) troviamo infine:

$$\Delta A_k = \frac{1}{2}R^i{}_{klm}A_i\Delta f^{lm}, \tag{91,3}$$

dove R^i_{klm} è un tensore del quarto ordine:

$$R^i{}_{klm} = \frac{\partial\Gamma^i_{km}}{\partial x^l} - \frac{\partial\Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} + \Gamma^i_{nl}\Gamma^n_{km} - \Gamma^i_{nm}\Gamma^n_{kl}. \tag{91,4}$$

Il carattere tensoriale di R^i_{klm} risulta dal fatto che nella (91,3) si ha a primo membro un vettore, cioè la differenza ΔA_k dei valori di un vettore in uno stesso punto. Il tensore R^i_{klm} si chiama *tensore di curvatura* o *tensore di Riemann*.

È facile ottenere una formula analoga per un vettore controvariante A^k. Notiamo a questo scopo che si ha $\Delta(A^kB_k) = 0$ (poiché gli scalari non variano per trasporto parallelo), dove B_k è un vettore covariante arbitrario. Tenendo conto della (91,3), abbiamo:

$$\Delta(A^kB_k) = A^k\Delta B_k + B_k\Delta A^k = \frac{1}{2}A^kB_iR^i{}_{klm}\Delta f^{lm} + B_k\Delta A^k =$$

$$= B_k\left(\Delta A^k + \frac{1}{2}A^iR^k{}_{ilm}\Delta f^{lm}\right) = 0,$$

oppure, essendo il vettore B_k arbitrario:

$$\Delta A^k = -\frac{1}{2}R^k{}_{ilm}A^i\Delta f^{lm}. \tag{91,5}$$

Se si prende la derivata covariante seconda del vettore A_i rispetto a x^k ed a x^l, il risultato dipende, in generale, dall'ordine di derivazione, contrariamente a quello che avviene per le derivate ordinarie. Risulta che la differenza $A_{i;k;} - A_{i;l;lk}$ è determinata dallo stesso tensore di curvatura che abbiamo introdotto sopra. Si ha la formula

$$A_{i;k;l} - A_{i;l;k} = A_mR^m{}_{ikl}, \tag{91,6}$$

che può essere facilmente ricavata con un calcolo diretto in coordinate localmente geodetiche. Analogamente, per un vettore controva-

riante[1]) si ha

$$A^i{}_{;k;l} - A^i{}_{;l;k} = -A^m R^i{}_{mkl}. \tag{91,7}$$

Infine, è facile ottenere formule analoghe per le derivate seconde dei tensori (il modo piú facile è di considerare, per esempio, un tensore della forma $A_i B_k$ e di ricorrere quindi alle formule (91,6), (91,7); in virtú della loro linearità, le formule ottenute sono ugualmente applicabili ad ogni tensore A_{ik}). Per i tensori si ottiene:

$$A_{ik;l;m} - A_{ik;m;l} = A_{in} R^n{}_{klm} + A_{nk} R^n{}_{ilm}. \tag{91,8}$$

È evidente che nello spazio quadridimensionale piatto il tensore di curvatura è nullo. Infatti, nello spazio piatto si può scegliere un sistema di coordinate dove $\Gamma^i_{kl} = 0$ ovunque e, di conseguenza, anche $R^i_{klm} = 0$. In virtú del carattere tensoriale di R^i_{klm}, queste grandezze sono nulle anche in qualsiasi altro sistema di coordinate. Ciò è dovuto al fatto che nello spazio piatto il trasporto parallelo di un vettore da un punto ad un altro è un'operazione univoca, e il vettore non varia quando si trasporta lungo una linea chiusa.

Esiste anche il teorema inverso: se $R^i_{klm} = 0$, lo spazio quadridimensionale è piatto. Infatti in ogni spazio si può scegliere un sistema di coordinate galileiane in una regione infinitesima data. Se $R^i_{klm} = 0$, allora il trasporto parallelo è un'operazione univoca, e trasportando in questo modo il sistema galileiano dalla regione infinitesima data in tutte le altre regioni, si può costruire un sistema galileiano in tutto lo spazio, il che dimostra l'asserzione fatta.

L'annullarsi del tensore di curvatura o meno è quindi un criterio sufficiente per stabilire se uno spazio quadridimensionale sia piatto o curvo.

Facciamo la seguente osservazione: sebbene sia possibile in uno spazio curvo scegliere un sistema di coordinate localmente geodetiche (per un punto dato), il tensore di curvatura non si annulla affatto in questo punto (poiché le Γ^i_{kl} si annullano, ma non le derivate).

PROBLEMA

Determinare la 4-accelerazione relativa di due particelle che descrivono due geodetiche d'universo infinitamente vicine.

Soluzione. Esaminiamo una famiglia di linee geodetiche che si distinguono per i valori di un parametro v; in altri termini, le coordinate di un punto d'universo si esprimono sotto forma di funzioni $x^i = x^i(s, v)$ tali che per ogni $v =$ costante sono l'equazione di una geodetica (dove s è la lunghezza dell'intervallo misurato lungo la linea a partire dal suo punto d'intersezione con una ipersu-

[1]) La formula (91,7) si deduce pure direttamente dalla (91,6) innalzando l'indice i ed utilizzando le proprietà di simmetria del tensore R_{iklm} (§ 92).

perficie data). Introduciamo il quadrivettore

$$\eta^i = \frac{\partial x^i}{\partial v}\,\delta v \equiv v^i \delta v,$$

che congiunge sulle geodetiche infinitamente vicine (che corrispondono rispettivamente ai valori del parametro v e $v + \delta v$) i punti aventi valori identici di s.

Dalla definizione di derivata covariante e dall'uguaglianza $\partial u^i/\partial v = \partial v^i/\partial s$ (dove $u^i = \partial x^i/\partial s$) risulta che:

$$u^i{}_{;k} v^k = v^i{}_{;k} u^k. \tag{1}$$

Consideriamo la derivata seconda:

$$\frac{D^2 v^i}{ds^2} \equiv (v^i{}_{;k} u^k)_{;l}\, u^l = (u^i{}_{;k} v^k)_{;l}\, u^l = u^i{}_{;k;l} v^k u^l + u^i{}_{;k} v^k{}_{;l} u^l.$$

Applichiamo di nuovo la (1) al secondo termine, e nel primo termine cambiamo l'ordine delle derivazioni covarianti con l'aiuto della (91,7); troviamo infine:

$$\frac{D^2 v^i}{ds^2} = (u^i{}_{;l} u^l)_{;k}\, v^k + u^m R^i{}_{mkl} u^k v^l.$$

Il primo termine è nullo, poichè lungo le linee geodetiche $u^i{}_{;l} u^l = 0$. Introducendo il fattore costante δv, troviamo infine l'equazione:

$$\frac{D^2 \eta^i}{ds^2} = R^i{}_{klm} u^k u^l \eta^m \tag{2}$$

(detta equazione di deviazione geodetica).

§ 92. *Proprietà del tensore di curvatura*

Il tensore di curvatura possiede delle proprietà di simmetria, ma per determinarle tutte conviene passare dalle componenti miste di R^i_{klm} a quelle covarianti:

$$R_{iklm} = g_{in} R^n{}_{klm}.$$

Per esse, con semplici trasformazioni, è facile ottenere la seguente espressione:

$$R_{iklm} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^i \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^k \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{km}}{\partial x^i \partial x^l}\right) + \\ + g_{np}\left(\Gamma^n_{kl}\Gamma^p_{im} - \Gamma^n_{km}\Gamma^p_{il}\right). \tag{92,1}$$

Da questa espressione si deducono immediatamente le proprietà di simmetria seguenti:

$$R_{iklm} = -R_{kilm} = -R_{ikml}, \tag{92,2}$$

$$R_{iklm} = R_{lmik}, \tag{92,3}$$

cioè il tensore è antisimmetrico rispetto a ciascuna coppia degli indici ik ed lm, e simmetrico rispetto alla permutazione di queste

due coppie tra di loro. In particolare, tutte le componenti di R_{iklm}, diagonali per ogni coppia degli indici ik o lm, sono nulle.

È facile provare inoltre che la somma ciclica delle componenti di R_{iklm}, costituita da qualsiasi terna di indici, è nulla; per esempio,

$$R_{iklm} + R_{lmkl} + R_{ilmk} = 0 \tag{92,4}$$

(le altre relazioni di questo genere si ottengono automaticamente dalla (92,4), in virtú delle proprietà (92,2) e (92,3)).

Infine, dimostriamo la *identità di Bianchi*:

$$R^n{}_{ikl;\,m} + R^n{}_{imk;\,l} + R^n{}_{ilm;\,k} = 0. \tag{92,5}$$

È comodo verificare questa relazione in un sistema di coordinate localmente geodetiche. In virtú del carattere tensoriale della relazione (92,5), essa sarà quindi valida in qualsiasi altro sistema. Derivando l'espressione (91,4) e ponendo quindi $\Gamma^i_{kl} = 0$, troviamo nel punto considerato:

$$R^n{}_{ikl;\,m} = \frac{\partial R^n{}_{ikl}}{\partial x^m} = \frac{\partial^2 \Gamma^n_{il}}{\partial x^m\, \partial x^k} - \frac{\partial^2 \Gamma^n_{ik}}{\partial x^m\, \partial x^l}.$$

Questa espressione permette di vedere che la (92,5) è veramente valida.

Per contrazione del tensore di curvatura si può formare un tensore di rango due. Tale contrazione può essere fatta in un solo modo: la contrazione del tensore R_{iklm} degli indici i e k oppure l ed m dà zero, in virtú dell'antisimmetria rispetto a questi indici, e la contrazione di ogni altra coppia dà sempre, a meno del segno, lo stesso risultato. Definiremo il *tensore di Ricci* R_{ik} come segue[1]):

$$R_{ik} = g^{lm} R_{ilmk} = R^l{}_{ilk}. \tag{92,6}$$

In base alla (91,4) si ha:

$$R_{ik} = \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^l_{il}}{\partial x^k} + \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm} - \Gamma^m_{il}\Gamma^l{}_{km} \tag{92,7}$$

La simmetria di questo tensore è evidente:

$$R_{ik} = R_{ki}. \tag{92,8}$$

Infine, con una contrazione di R_{ik} otteniamo l'invariante

$$R = g^{ik} R_{ik} = g^{il} g^{km} R_{iklm}, \tag{92,9}$$

detto *curvatura scalare* dello spazio.

Le componenti del tensore R_{ik} soddisfano l'identità differenziale

---

[1]) In alcuni testi di matematica si usa anche un'altra definizione del tensore R_{ik}: la contrazione di R_{iklm} tra il primo e l'ultimo indice. Questa definizione si distingue dalla nostra per il segno.

che si ottiene per contrazione nella identità di Bianchi (92,5) delle coppie di indici *ik* ed *lm*:

$$R^l{}_{m;\,l} = \frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial x^m}. \tag{92,10}$$

In virtú delle relazioni (92,2-4), non tutte le componenti del tensore di curvatura sono indipendenti. Determiniamo quindi il numero di componenti indipendenti.

La definizione del tensore di curvatura, data dalle formule riportate, si riferisce ad uno spazio di un numero qualsiasi di dimensioni. Esaminiamo innanzitutto uno spazio a due dimensioni, cioè una superficie ordinaria; indichiamo allora (a differenza delle grandezze quadridimensionali) il tensore di curvatura con P_{abc} e il tensore metrico con γ_{ab}, dove gli indici a, b, ... prendono i valori 1, 2. Poiché in ogni coppia ab e cd i due indici debbono avere valori differenti, è evidente che tutte le componenti del tensore di curvatura differenti da zero o coincidono tra di loro, o si distinguono per il segno. Si ha quindi una sola componente indipendente, per esempio P_{1212}. È facile trovare che la curvatura scalare è quindi uguale a

$$P = \frac{2P_{1212}}{\gamma}, \quad \gamma \equiv |\gamma_{ab}| = \gamma_{11}\gamma_{22} - (\gamma_{12})^2. \tag{92,11}$$

La grandezza $P/2$ coincide con la *curvatura di Gauss* della superficie K:

$$\frac{P}{2} = K = \frac{1}{\rho_1\rho_2}, \tag{92,12}$$

dove ρ_1 e ρ_2 sono i raggi principali di curvatura della superficie nel suo punto dato (ricordiamo che ρ_1 e ρ_2 sono considerati di segno identico se i corrispondenti centri di curvatura giacciono da una stessa parte rispetto alla superficie, e di segno differente se i centri di curvatura giacciono da parti opposte della superficie; nel primo caso $K > 0$, nel secondo $K < 0$)[1]).

Passiamo al tensore di curvatura di uno spazio a tre dimensioni; indichiamo questo tensore con $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ e il tensore metrico con $\gamma_{\alpha\beta}$, dove gli indici α, β, . . . assumono i valori 1, 2, 3. Le coppie di indici $\alpha\beta$ e $\gamma\delta$ figurano soltanto in tre combinazioni differenti: 23, 31, 12 (la permutazione degli indici nella coppia cambia soltanto

---

[1]) È facile ottenere la formula (92,12) scrivendo l'equazione della superficie in prossimità del punto dato ($x = y = 0$) nella forma $z = \frac{x^2}{2\rho_1} + \frac{y^2}{2\rho_2}$. Allora il quadrato dell'elemento di lunghezza è:

$$dl^2 = \left(1 + \frac{x^2}{\rho_1^2}\right) dx^2 + \left(1 + \frac{y^2}{\rho_2^2}\right) dy^2 + 2\frac{xy}{\rho_1\rho_2}\, dx\, dy.$$

Calcolando P_{1212} nel punto $x = y = 0$ secondo la formula (92,1) (nella quale sono necessari soltanto i termini contenenti le derivate seconde di $\gamma_{\alpha\beta}$), si ottiene la formula (92,12).

il segno della componente del tensore). Poiché il tensore $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ è simmetrico rispetto alla permutazione di queste coppie, si hanno soltanto $3 \cdot 2/2 = 3$ componenti indipendenti con differenti coppie di indici, nonché 3 componenti con coppie identiche. L'identità (92,4) non aggiunge niente di nuovo a queste restrizioni. In tal modo, in uno spazio tridimensionale il tensore di curvatura ha sei componenti indipendenti. Lo stesso numero di componenti ha il tensore simmetrico $P_{\alpha\beta}$. Di conseguenza, a partire dalle relazioni lineari $P_{\alpha\beta} = g^{\gamma\delta} P_{\gamma\alpha\delta\beta}$, tutte le componenti del tesnore $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ si possono esprimere mediante $P_{\alpha\beta}$ e il tensore metrico $\gamma_{\alpha\beta}$ (vedi il problema 1). Se si prende un sistema di coordinate localmente cartesiano, si può allora, con una rotazione appropriata, ridurre il tensore $P_{\alpha\beta}$ ai suoi assi principali[1]). Ne risulta che la curvatura di uno spazio tridimensionale è determinata in ogni punto da tre grandezze[2]).

Passiamo infine allo spazio quadridimensionale. In questo caso, le coppie di indici *ik* ed *lm* costituiscono le seguenti combinazioni: 01, 02, 03, 23, 31, 12. Ci sono quindi 6 componenti di R_{iklm} con coppie di indici identiche e $6 \cdot 5/2 = 15$ componenti con coppie di indici diverse.Queste ultime, però, non sono ancora tutte indipendenti: le tre componenti, aventi i quattro indici diversi, sono legate, in base alla (92,4) dall'identità

$$R_{0123} + R_{0312} + R_{0231} = 0. \qquad (92,13)$$

Dunque, nello spazio quadridimensionale il tensore di curvatura ha in tutto 20 componenti indipendenti.

Se si prende un sistema di coordinate, galileiano in un punto dato e si considerano le rotazioni di questo sistema (in modo tale che i valori di g_{ik} non cambino nel punto considerato), si può allora ottenere che sei componenti del tensore di curvatura si annullino (sei è il numero delle rotazioni indipendenti di un sistema di quattro coordinate). Ne risulta che, nel caso generale, la curvatura dello spazio quadridimensionale è determinata in ogni punto da 14 grandezze.

---

[1]) Notiamo che per calcolare effettivamente gli autovalori del tensore $P_{\alpha\beta}$, non c'è bisogno di passare ad un sistema di coordinate, localmente cartesiano. Questi valori si possono determinare come radici λ dell'equazione $| P_{\alpha\beta} - \lambda\gamma_{\alpha\beta} | = 0$.

[2]) Conoscendo il tensore $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$, si può determinare la curvatura di Gauss K di qualsiasi superficie nello spazio. Si ha che se x^1, x^2, x^3 è un sistema di coordinate ortogonali, allora

$$K = \frac{P_{1212}}{\gamma_{11}\gamma_{22} - (\gamma_{12})^2}$$

e la curvatura di Gauss di un « piano » perpendicolare (in un punto dato) all'asse x^3; per « piano » s'intende una superficie formata dalle linee geodetiche.

Se $R_{ik} = 0$[1]), allora, in un sistema di coordinate arbitrarie, il tensore di curvatura ha in tutto 10 componenti indipendenti. Si può allora, con una trasformazione appropriata delle coordinate, ridurre il tensore R_{iklm} (nel punto dato dello spazio quadridimensionale) ad una forma « canonica » nella quale tutte le sue componenti sono espresse, nel caso generale, da 4 grandezze indipendenti; in casi particolari, questo numero può essere persino minore.

Se invece $R_{ik} \neq 0$, quanto detto si riferirà al tensore di curvatura diminuito di un termine che si esprime mediante le componenti di R_{ik}. Consideriamo il tensore[2])

$$C_{iklm} = R_{iklm} - \frac{1}{2} R_{il} g_{km} + \frac{1}{2} R_{im} g_{kl} + \\ + \frac{1}{2} R_{kl} g_{im} - \frac{1}{2} R_{km} g_{il} + \frac{1}{6} R (g_{il} g_{km} - g_{im} g_{kl}). \quad (92,14)$$

È facile vedere che questo tensore possiede tutte le proprietà di simmetria del tensore R_{iklm}, e per contrazione di una coppia di indici (*il* o *km*) dà zero.

Mostriamo in che modo è costruita la classificazione dei vari tipi possibili della forma canonica del tensore di curvatura se $R_{ik} = 0$ (*A. Z. Petrov*, 1950).

Supponiamo che la metrica nel punto dato dello spazio quadridimensionale sia in coordinate galileiane. Rappresentiamo l'insieme delle 20 componenti indipendenti del tensore R_{iklm} come un insieme di tre tensori tridimensionali definiti nel modo seguente:

$$A_{\alpha\beta} = R_{0\alpha 0\beta}, \quad C_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} e_{\alpha\gamma\delta} e_{\beta\lambda\mu} R_{\gamma\delta\lambda\mu}, \quad B_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} e_{\alpha\gamma\delta} R_{0\beta\gamma\delta} \quad (92,15)$$

($e_{\alpha\beta\gamma}$ è il tensore unitario antisimmetrico; poiché la metrica tridimensionale è cartesiana, non c'è bisogno di fare distinzione tra gli indici superiori ed inferiori nella sommatoria). I tensori $A_{\alpha\beta}$ e $C_{\alpha\beta}$ sono simmetrici per definizione; il tensore $B_{\alpha\beta}$ è asimmetrico, e la sua traccia è nulla in base alla (92,13). Per esempio, secondo le definizioni (92,15) abbiamo:

$$B_{11} = R_{0123}, \quad B_{21} = R_{0131}, \quad B_{31} = R_{0112}, \quad C_{11} = R_{2323}, \ \ldots$$

---

[1]) Vedremo piú avanti (§ 95) che di questa proprietà gode il tensore di curvatura di un campo gravitazionale nel vuoto.

[2]) Questa espressione complicata può essere scritta in modo piú conciso:

$$C_{iklm} = R_{iklm} - R_{l[i} g_{k]m} + R_{m[i} g_{k]l} + \frac{1}{3} R g_{l[i} g_{k]m},$$

dove le parentesi quadre esprimono l'antisimmetrizzazione rispetto agli indici in esse compresi:

$$A_{[ik]} = \frac{1}{2} (A_{ik} - A_{ki}).$$

Il tensore (92,14) è detto *tensore di Weyl*.

Si vede facilmente che le condizioni $R_{km} = g^{il}R_{ikl\,m} = 0$ sono equivalenti alle seguenti relazioni tra le componenti dei tensori (92,15):

$$A_{\alpha\alpha} = 0, \quad B_{\alpha\beta} = B_{\beta\alpha}, \quad A_{\alpha\beta} = -C_{\alpha\beta}. \tag{92,16}$$

Introduciamo in seguito il tensore simmetrico complesso

$$D_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(A_{\alpha\beta} + 2iB_{\alpha\beta} - C_{\alpha\beta}) = A_{\alpha\beta} + iB_{\alpha\beta}. \tag{92,17}$$

Una tale unificazione di due tensori reali tridimensionali $A_{\alpha\beta}$ e $B_{\alpha\beta}$ in un tensore complesso corrisponde esattamente all'unificazione (vista nel § 25) dei due vettori **E** ed **H** in un vettore complesso **F**, mentre la relazione che ne segue tra $D_{\alpha\beta}$ e il 4-tensore $R_{ikl\,m}$ corrisponde alla relazione tra **F** e il 4-tensore F_{ik}. Ne segue che le trasformazioni quadridimensionali del tensore $R_{ikl\,m}$ sono equivalenti alle rotazioni complesse tridimensionali del tensore $D_{\alpha\beta}$.

Rispetto a queste rotazioni si possono determinare gli autovalori di $\lambda = \lambda' + i\lambda''$ e gli autovettori n_α (in generale, complessi) come soluzioni del sistema di equazioni

$$D_{\alpha\beta}n_\beta = \lambda n_\alpha. \tag{92,18}$$

Le λ sono invarianti caratteristici del tensore di curvatura. Poiché la traccia $D_{\alpha\alpha} = 0$, è nulla anche la somma delle radici dell'equazione (92,18):

$$\lambda^{(1)} + \lambda^{(2)} + \lambda^{(3)} = 0.$$

A seconda del numero di autovettori indipendenti n_α si ottiene la seguente classificazione di casi possibili della riduzione del tensore di curvatura ai *tipi canonici* I, II, III *di Petrov*.

I) Ci sono tre autovettori indipendenti. I loro quadrati $n_\alpha n^\alpha$ sono differenti da zero, e il tensore $D_{\alpha\beta}$ e con esso $A_{\alpha\beta}$, $B_{\alpha\beta}$ si riducono, con una rotazione appropriata, alla forma diagonale:

$$\begin{aligned} A_{\alpha\beta} &= \begin{pmatrix} \lambda^{(1)\prime} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{(2)\prime} & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^{(1)\prime} - \lambda^{(2)\prime} \end{pmatrix}, \\ B_{\alpha\beta} &= \begin{pmatrix} \lambda^{(1)\prime\prime} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{(2)\prime\prime} & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^{(1)\prime\prime} - \lambda^{(2)\prime\prime} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{92,19}$$

Il tensore di curvatura ha allora 4 invarianti indipendenti[1]).

---

[1]) Il caso degenere, in cui $\lambda^{(1)\prime} = \lambda^{(2)\prime}$, $\lambda^{(1)\prime\prime} = \lambda^{(2)\prime\prime}$, è detto di tipo D.

Gli invarianti complessi $\lambda^{(1)}$ e $\lambda^{(2)}$ si esprimono algebricamente mediante gli scalari complessi

$$I_1 = \frac{1}{48}\left(R_{iklm}R^{iklm} - iR_{iklm}\overset{*}{R}{}^{iklm}\right),$$

$$I_2 = \frac{1}{96}\left(R_{iklm}R^{lmpr}R_{pr}{}^{ik} + iR_{iklm}R^{lmpr}\overset{*}{R}{}_{pr}{}^{ik}\right), \qquad (92,20)$$

dove con l'asterisco è segnato il tensore duale:

$$\overset{*}{R}_{iklm} = \frac{1}{2}E_{ikpr}R^{pr}{}_{lm}.$$

Calcolando I_1 ed I_2 con l'aiuto della (92,19), otteniamo:

$$I_1 = \frac{1}{3}\left(\lambda^{(1)2} + \lambda^{(2)2} + \lambda^{(1)}\lambda^{(2)}\right), \quad I_2 = \frac{1}{2}\lambda^{(1)}\lambda^{(2)}\left(\lambda^{(1)} + \lambda^{(2)}\right). \qquad (92,21)$$

Queste formule permettono di calcolare $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$ a partire dai valori di R_{iklm} in qualsiasi sistema di riferimento.

II) Ci sono due autovettori indipendenti. Il quadrato di uno di essi è nullo, e, di conseguenza, esso non può essere preso come direzione di un asse coordinato. Tuttavia, si può supporre che esso giaccia nel piano x^1, x^2; si ha allora $n_2 = in_1$, $n_3 = 0$. Le equazioni (92,18) danno rispettivamente:

$$D_{11} + iD_{12} = \lambda, \quad D_{22} - iD_{12} = \lambda,$$

da cui

$$D_{11} = \lambda - i\mu, \quad D_{22} = \lambda + i\mu, \quad D_{12} = \mu.$$

La grandezza complessa $\lambda = \lambda' + i\lambda''$ è uno scalare e non può essere cambiata. Per quanto concerne μ, si può attribuire a questa grandezza, mediante rotazioni complesse, un valore qualsiasi (differente da zero); non sarà quindi restrittivo considerarla reale. Otteniamo allora la seguente forma canonica dei tensori $A_{\alpha\beta}$ e $B_{\alpha\beta}$:

$$A_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \lambda' & \mu & 0 \\ \mu & \lambda' & 0 \\ 0 & 0 & -2\lambda' \end{pmatrix}, \quad B_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \lambda'' - \mu & 0 & 0 \\ 0 & \lambda'' + \mu & 0 \\ 0 & 0 & -2\lambda'' \end{pmatrix}. \qquad (92,22)$$

In questo caso ci sono in tutto i due invarianti λ' e λ''. In base alla (92,21), si ha allora $I_1 = \lambda^2$, $I_2 = \lambda^3$, cosicché $I_1^3 = I_2^2$.

III) C'è un solo autovettore il cui quadrato è nullo. Tutti gli autovalori di λ sono uguali e, di conseguenza, nulli. Le soluzioni dell'equazione (92,18) si possono ridurre alla forma $D_{11} = D_{22} =$

$= D_{12} = 0, D_{13} = \mu,\ D_{23} = i\mu$, in modo che

$$A_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu \\ 0 & 0 & 0 \\ \mu & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu \\ 0 & \mu & 0 \end{pmatrix}. \tag{92,23}$$

In questo caso, il tensore di curvatura non ha nessun invariante, e si ha una situazione singolare: lo spazio quadridimensionale è curvo ma non esistono invarianti in grado di misurarne la curvatura[1]).

PROBLEMI

1. Esprimere il tensore di curvatura $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ dello spazio tridimensionale mediante il tensore di rango due $P_{\alpha\beta}$.

Soluzione. Cerchiamo $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ nella forma

$$P_{\alpha\beta\gamma\delta} = A_{\alpha\gamma}\gamma_{\beta\delta} - A_{\alpha\delta}\gamma_{\beta\gamma} + A_{\beta\delta}\gamma_{\alpha\gamma} - A_{\beta\gamma}\gamma_{\alpha\delta},$$

che soddisfa le condizioni di simmetria; $A_{\alpha\beta}$ è qui un tensore simmetrico il cui legame con $P_{\alpha\beta}$ viene determinato contraendo rispetto agli indici α e γ nell'espressione scritta. Procedendo in questo modo troviamo:

$$P_{\alpha\beta} = A\gamma_{\alpha\beta} + A_{\alpha\beta}, \qquad A_{\alpha\beta} = P_{\alpha\beta} - \frac{1}{4} P\gamma_{\alpha\beta},$$

e infine:

$$P_{\alpha\beta\gamma\delta} = P_{\alpha\gamma}\gamma_{\beta\delta} - P_{\alpha\delta}\gamma_{\beta\gamma} + P_{\beta\delta}\gamma_{\alpha\gamma} - P_{\beta\gamma}\gamma_{\alpha\delta} + \frac{P}{2}(\gamma_{\alpha\delta}\gamma_{\beta\gamma} - \gamma_{\alpha\gamma}\gamma_{\beta\delta}).$$

2. Calcolare le componenti dei tensori R_{iklm} ed R_{ik} in una metrica in cui il tensore g_{ik} è diagonale.

Soluzione. Scriviamo le componenti non nulle del tensore metrico nella forma

$$g_{ii} = e_i e^{2F_i}, \qquad e_0 = 1, \qquad e_\alpha = -1.$$

Calcolando secondo le formule (92,1), si ottengono le seguenti espressioni per le componenti non nulle del tensore di curvatura:

$$R_{lilk} = e_l e^{2F_l}(F_{l,k}F_{k,i} + F_{i,k}F_{l,i} - F_{l,i}F_{l,k} - F_{l,i,k}), \quad i \neq k \neq l,$$

$$R_{lili} = e_l e^{2F_l}(F_{i,i}F_{l,i} - F^2_{l,i} - F_{l,i,i}) + e_i e^{2F_i}(F_{l,l}F_{i,l} - F^2_{i,l} -$$

$$- F_{i,l,l}) - e_l e^{2F_l} \sum_{m \neq i,\ l} e_i e_m e^{2(F_i - F_m)} F_{i,m} F_{l,m}, \quad i \neq l$$

(non c'è sommatoria rispetto agli indici ripetuti!). Gli indici preceduti da una virgola significano la derivazione ordinaria rispetto alla coordinata corrispondente.

---

[1]) La stessa situazione si verifica nel caso degenere II per $\lambda' = \lambda'' = 0$ (detto di tipo N).

Contraendo una coppia di indici del tensore, otteniamo:

$$R_{ik}=\sum_{l\neq i,\,k}(F_{l,\,k}F_{k,\,i}+F_{i,\,k}F_{l,\,i}-F_{l,\,i}F_{l,\,k}-F_{l,\,i,\,k}),\qquad i\neq k,$$

$$R_{ii}=\sum_{l\neq i}\Big[F_{i,\,i}F_{l,\,i}-F^2_{l,\,i}-F_{l,\,i,\,i}+$$

$$+e_ie_le^{2(F_i-F_l)}\Big(F_{l,\,l}F_{i,\,l}-F^2_{i,\,l}-F_{i,\,l,\,l}-F_{i,\,l}\sum_{m\neq i,\,l}F_{m,\,l}\Big)\Big].$$

§ 93. *L'azione per un campo gravitazionale*

Per trovare le equazioni che determinano il campo gravitazionale, è necessario determinare preliminarmente l'azione S_g per questo campo. Si ottengono allora le equazioni cercate facendo variare la somma delle azioni del campo e delle particelle materiali.

L'azione S_g, analogamente all'azione per un campo elettromagnetico, deve essere espressa sotto forma di un integrale scalare $\int G\sqrt{-g}\,d\Omega$ esteso a tutto lo spazio rispetto alle coordinate spaziali e collocato tra due valori dati rispetto alla coordinata temporale x^0. Partiremo dal fatto che le equazioni del campo gravitazionale devono contenere derivate dei « potenziali » del campo di ordine non superiore a due (analogamente alle equazioni del campo elettromagnetico). Poiché le equazioni del campo si ottengono facendo variare l'azione, è necessario allora che l'espressione integranda G contenga derivate di g_{ik} di ordine non superiore ad uno; quindi, G non deve contenere che il tensore g_{ik} e le grandezze Γ^i_{kl}.

Tuttavia, non si può costruire uno scalare con le sole grandezze g_{ik} e Γ^i_{kl}. Ciò è evidente già dal fatto che tutte le grandezze Γ^i_{kl} in un punto dato si possono annullare con una scelta opportuna del sistema di coordinate. Esiste nondimeno uno scalare R — la curvatura dello spazio quadridimensionale — in cui compaiono il tensore g_{ik} con le sue derivate prime e seconde; queste ultime però entrano in R soltanto linearmente. In virtú di questa linearità, si può trasformare l'integrale invariante $\int R\sqrt{-g}d\Omega$, applicando il teorema di Gauss, nell'integrale di un'espressione che non contenga piú derivate seconde. Si può cioè rappresentare l'integrale nella forma

$$\int R\sqrt{-g}\,d\Omega=\int G\sqrt{-g}\,d\Omega+\int\frac{\partial(\sqrt{-g}\,w^i)}{\partial x^i}d\Omega,$$

dove G contiene solamente il tensore g_{ik} e le sue derivate prime, e dove l'espressione integranda del secondo termine si presenta come divergenza di una grandezza w^i (il calcolo è fatto piú dettagliatamente alla fine del paragrafo). In virtú del teorema di Gauss, si

può trasformare questo secondo integrale in un integrale esteso alla ipersuperficie che delimita il volume quadridimensionale all'interno del quale sono calcolati i due altri integrali. Quando si fa variare l'azione, la variazione del secondo integrale è nulla, perché, in base al principio di minima azione, la variazione del campo è nulla sulla frontiera della regione d'integrazione. Possiamo dunque scrivere:

$$\delta \int R\sqrt{-g}d\Omega = \delta \int G\sqrt{-g}d\Omega.$$

Abbiamo a primo membro uno scalare; l'espressione a secondo membro è perciò pure uno scalare (la grandezza G di per sé non è, naturalmente, uno scalare).

La grandezza G soddisfa la condizione posta sopra, poiché contiene solamente g_{ik} e le sue derivate prime. Possiamo dunque scrivere:

$$\delta S_g = -\frac{c^3}{16\pi k}\,\delta \int G\sqrt{-g}\,d\Omega = -\frac{c^3}{16\pi k}\,\delta \int R\sqrt{-g}\,d\Omega, \qquad (93,1)$$

dove k è una nuova costante universale. Analogamente a quanto è stato fatto nel § 27 per l'azione del campo elettromagnetico, si può vedere che la costante k deve essere positiva (vedi la fine di questo paragrafo).

La costante k è detta *costante gravitazionale*. Le dimensioni di k si determinano dalla (93,1). L'azione ha le dimensioni $g\cdot cm^2\cdot s^{-1}$ [1]); ponendo che tutte le coordinate abbiano la dimensione cm e che le g_{ik} siano adimensionali e, di conseguenza, R abbia la dimensione cm^{-2}, troviamo che k ha dimensioni $cm^3\cdot g^{-1}\cdot c^{-2}$. Il suo valore numerico è

$$k = 6{,}67\cdot 10^{-8}\ cm^3\cdot g^{-1}\cdot s^{-2}. \qquad (93,2)$$

Notiamo che avremmo potuto porre k uguale all'unità (o ad un altro numero adimensionale). In questo caso, però, avremmo definito l'unità di massa [2]).

Calcoliamo infine la grandezza G nella (93,1). Dall'espressione (92,7) per R_{ik} si ottiene:

$$\sqrt{-g}R = \sqrt{-g}\,g^{ik}R_{ik} =$$
$$= \sqrt{-g}\left\{g^{ik}\frac{\partial\Gamma^l_{ik}}{\partial x^l} - g^{ik}\frac{\partial\Gamma^l_{il}}{\partial x^k} + g^{ik}\Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm} - g^{ik}\Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km}\right\}$$

---

[1]) Con la lettera g si indica qui l'unità di massa equivalente al grammo; la lettera s significa secondi.

[2]) Se si pone $k = c^2$, la massa è misurata allora in cm, e si ha 1 cm = $= 1{,}35\cdot 10^{28}$ g.

In luogo della grandezza k, si usa talvolta

$$\varkappa = \frac{8\pi k}{c^2} = 1{,}86\cdot 10^{-27}\ cm\cdot g^{-1},$$

che si chiama costante gravitazionale di Einstein.

Per i primi due termini a secondo membro abbiamo:

$$\sqrt{-g}\, g^{ik} \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^l} = \frac{\partial}{\partial x^l} (\sqrt{-g}\, g^{ik} \Gamma^l_{ik}) - \Gamma^l_{ik} \frac{\partial}{\partial x^l} (\sqrt{-g}\, g^{ik}),$$

$$\sqrt{-g}\, g^{ik} \frac{\partial \Gamma^l_{il}}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{-g}\, g^{ik} \Gamma^l_{il}) - \Gamma^l_{il} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{-g}\, g^{ik}).$$

Trascurando le derivate totali, troviamo:

$$\sqrt{-g}\, G = \Gamma^m_{im} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{-g}\, g^{ik}) - \Gamma^l_{ik} \frac{\partial}{\partial x^l} (\sqrt{-g}\, g^{ik}) - \\ - (\Gamma^m_{il} \Gamma^l_{km} - \Gamma^l_{ik} \Gamma^m_{lm})\, g^{ik} \sqrt{-g}.$$

Le formule (86,5-8) ci permettono di stabilire che i primi due termini a secondo membro sono uguali al prodotto di $\sqrt{-g}$ per

$$2\Gamma^l_{ik} \Gamma^i_{lm} g^{mk} - \Gamma^m_{im} \Gamma^i_{kl} g^{kl} - \Gamma^l_{ik} \Gamma^m_{lm} g^{ik} = \\ = g^{ik} (2\Gamma^l_{mk} \Gamma^m_{li} - \Gamma^m_{lm} \Gamma^l_{ik} - \Gamma^l_{ik} \Gamma^m_{lm}) = 2g^{ik} (\Gamma^m_{il} \Gamma^l_{km} - \Gamma^l_{ik} \Gamma^m_{lm}).$$

Abbiamo infine:

$$G = g^{ik} (\Gamma^m_{il} \Gamma^l_{km} - \Gamma^l_{ik} \Gamma^m_{lm}). \tag{93,3}$$

Le grandezze che determinano il campo gravitazionale sono le componenti del tensore metrico. Perciò, nel principio di minima azione per un campo gravitazionale sono appunto le grandezze g_{ik} da far variare. Ma è necessario fare qui la seguente osservazione importante. Non possiamo piú affermare che in un campo reale l'integrale dell'azione abbia un minimo (e non semplicemente un estremo) rispetto a tutte le variazioni possibili di g_{ik}. Ciò è dovuto al fatto che non tutte le variazioni di g_{ik} corrispondono alla variazione della metrica dello spazio-tempo, cioè alla variazione reale del campo gravitazionale. Le componenti di g_{ik} cambiano già per una semplice trasformazione delle coordinate relativa al passaggio da un sistema di riferimento ad un altro in uno stesso spazio-tempo. Ogni trasformazione delle coordinate di questo genere rappresenta, in generale, un insieme di quattro (il numero delle coordinate) trasformazioni indipendenti. Per escludere tali cambiamenti delle g_{ik}, non legati alla variazione della metrica, si possono imporre quattro nuove condizioni ed esigere che queste condizioni restino soddisfatte nella variazione. Di conseguenza, nella sua applicazione al campo gravitazionale il principio di minima azione afferma solo che le g_{ik} si possono vincolare a condizioni restrittive tali che l'azione abbia un minimo quando si fanno variare le g_{ik}[1]).

[1]) Sottolineiamo, però, che quanto detto non influisce sulla deduzione delle equazioni del campo a partire dal principio di minima azione (§ 95). Queste equazioni si ottengono già solo esigendo che l'azione abbia un estremo (annullando cioè la sua variazione prima), e non necessariamente un minimo. Ne risulta che per stabilire queste equazioni si possono far variare tutte le componenti di g_{ik} indipendentemente.

Tenendo conto di queste osservazioni, dimostriamo ora che la costante gravitazionale deve essere positiva. Partendo dalle quattro condizioni restrittive indicate, esigiamo che le tre componenti $g_{0\alpha}$ si annullino e che il determinante $|g_{\alpha\beta}|$, costituito con le componenti $g_{\alpha\beta}$, sia costante:

$$g_{0\alpha}=0, \quad |g_{\alpha\beta}|=\text{costante},$$

in virtú dell'ultima di queste condizioni, avremo:

$$g^{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^0}=\frac{\partial}{\partial x^0}|g_{\alpha\beta}|=0.$$

Ci interessano qui soltanto i termini nell'espressione dell'integrale dell'azione che contengono le derivate delle g_{ik} rispetto ad x^0 (vedi pag. 98). Un semplice calcolo fatto con la (93,3) mostra che tali termini in G sono

$$-\frac{1}{4}g^{00}g^{\alpha\beta}g^{\gamma\delta}\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^0}\frac{\partial g_{\beta\delta}}{\partial x^0}.$$

È facile vedere che questa grandezza è definita negativa. Infatti, scegliendo un sistema di coordinate spaziali che siano cartesiane nel punto dato dello spazio e nell'istante dato di tempo (in modo che $g_{\alpha\beta}=g^{\alpha\beta}=-\delta_{\alpha\beta}$), otteniamo:

$$-\frac{1}{4}g^{00}\left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^0}\right)^2,$$

e poiché $g^{00}=1/g_{00}>0$, il segno di questa grandezza risulta evidente.

Facendo variare abbastanza rapidamente le costanti $g_{\alpha\beta}$ con il tempo x^0 (tra i due estremi d'integrazione rispetto a dx^0), si può rendere la grandezza $-G$ arbitrariamente grande. Se la costante k fosse negativa, l'azione diminuirebbe all'infinito (prendendo valori negativi arbitrariamente grandi) e quindi non potrebbe avere un minimo.

§ 94. *Tensore energia-impulso*

Nel § 32 abbiamo ottenuto una regola generale per il calcolo del tensore energia-impulso di ogni sistema fisico la cui azione abbia la forma dell'integrale (32,1) nello spazio quadridimensionale. In coordinate curvilinee questo integrale deve essere scritto nella forma

$$S=\frac{1}{c}\int \Lambda\sqrt{-g}\,d\Omega \tag{94,1}$$

(in coordinate galileiane $g=-1$ ed S diventa $\int \Lambda\, dV\, dt$). L'integrazione è fatta in tutto lo spazio (tridimensionale) e tra due istanti

dati, cioè nella regione infinita dello spazio quadridimensionale compresa tra due ipersuperfici.

Come abbiamo già indicato nel § 32, il tensore energia-impulso definito dalla formula (32,5) non è, in generale, simmetrico come dovrebbe esserlo. Per renderlo simmetrico, bisogna aggiungere all'espressione (32,5) un termine opportunamente scelto della forma $\frac{\partial}{\partial x^l}\psi_{ikl}$, dove $\psi_{ikl} = -\psi_{ikl}$.

Indicheremo ora un altro procedimento per calcolare il tensore energia-impulso che presenta il vantaggio di fornire immediatamente un'espressione simmetrica.

Passiamo nella (94,1) dalle coordinate x^i alle coordinate $x'^i = x^i + \xi^i$, dove ξ^i sono piccole. In questa sostituzione, le componenti g^{ik} si trasformano secondo la legge

$$g'^{ik}(x'^l) = g^{lm}(x^l)\frac{\partial x'^i}{\partial x^l}\frac{\partial x'^k}{\partial x^m} = g^{lm}\left(\delta_l^i + \frac{\partial \xi^i}{\partial x^l}\right)\left(\delta_m^k + \frac{\partial \xi^k}{\partial x^m}\right) \approx$$

$$\approx g^{ik}(x^l) + g^{im}\frac{\partial \xi^k}{\partial x^m} + g^{kl}\frac{\partial \xi^i}{\partial x^l}.$$

Il tensore g'^{ik} è qui funzione di x'^l, e il tensore g^{ik} funzione delle vecchie coordinate x^l. Perché tutti i termini si esprimano come funzioni delle stesse variabili, sviluppiamo le $g'^{ik}(x^l + \xi^l)$ in serie di potenze di ξ^l. Inoltre, trascurando i termini di ordine superiore in ξ^l, nei termini contenenti ξ^l, in luogo di g'^{ik}, possiamo scrivere g^{ik}. Troviamo dunque:

$$g'^{ik}(x^l) = g^{ik}(x^l) - \xi^l\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} + g^{il}\frac{\partial \xi^k}{\partial x^l} + g^{kl}\frac{\partial \xi^i}{\partial x^l}.$$

È facile vedere, con una verifica diretta, che gli ultimi tre termini del secondo membro si possono scrivere come la somma $\xi^{i;k} + \xi^{k;i}$ delle derivate controvarianti di ξ^i. Cosí, troviamo infine la legge di trasformazione di g^{ik} nella forma

$$g'^{ik} = g^{ik} + \delta g^{ik}, \quad \delta g^{ik} = \xi^{i;k} + \xi^{k;i}. \tag{94,2}$$

Abbiamo allora per le componenti covarianti:

$$g'_{ik} = g_{ik} + \delta g_{ik}, \quad \delta g_{ik} = -\xi_{i;k} - \xi_{k;i} \tag{94,3}$$

(in modo che la condizione $g_{il}g'^{kl} = \delta_i^k$ sia rispettata sino al primo ordine)[1]).

Poiché l'azione S è uno scalare, essa non varia per una trasformazione delle coordinate. D'altra parte, la variazione δS dell'azione

[1]) Notiamo che le equazioni

$$\xi^{i;k} + \xi^{k;i} = 0$$

definiscono le trasformazioni infinitesime delle coordinate che non cambiano la metrica. Esse sono dette *equazioni di Killing*.

per trasformazione delle coordinate può essere scritta nella forma seguente. Supponiamo che, come nel § 32, le q esprimano le grandezze che determinano un sistema fisico la cui azione è S. Per trasformazione delle coordinate le grandezze q variano di δq. Calcolando δS, si può però fare a meno dei termini legati alle variazioni delle q. Tutti questi termini si eliminano infatti reciprocamente in virtú delle « equazioni del moto » del sistema fisico, perché queste equazioni si ottengono appunto annullando la variazione di S rispetto alle grandezze q. È sufficiente dunque scrivere soltanto i termini legati alla variazione delle g_{ik}. Utilizzando, come al solito, il teorema di Gauss e ponendo sulla frontiera d'integrazione $\delta g^{ik} = 0$, troviamo δS nella forma[1])

$$\delta S = \frac{1}{c} \int \left\{ \frac{\partial \sqrt{-g}\,\Lambda}{\partial g^{ik}} \delta g^{ik} + \frac{\partial \sqrt{-g}\,\Lambda}{\partial \dfrac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}} \delta \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} \right\} d\Omega =$$

$$= \frac{1}{c} \int \left\{ \frac{\partial \sqrt{-g}\,\Lambda}{\partial g^{ik}} - \frac{\partial}{\partial x^l} \frac{\partial \sqrt{-g}\,\Lambda}{\partial \dfrac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}} \right\} \delta g^{ik}\, d\Omega.$$

Ponendo

$$\frac{1}{2} \sqrt{-g}\, T_{ik} = \frac{\partial \sqrt{-g}\,\Lambda}{\partial g^{ik}} - \frac{\partial}{\partial x^l} \frac{\partial \sqrt{-g}\,\Lambda}{\partial \dfrac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}}, \qquad (94,4)$$

δS assume la forma[2])

$$\delta S = \frac{1}{2c} \int T_{ik} \delta g^{ik} \sqrt{-g}\, d\Omega = -\frac{1}{2c} \int T^{ik} \delta g_{ik} \sqrt{-g}\, d\Omega \qquad (94,5)$$

(notiamo che $g^{ik}\delta g_{ik} = - g_{ik}\delta g^{ik}$ e, di conseguenza, $T^{ik}\delta g_{ik} = - T_{ik}\delta g^{ik}$). Sostituendo qui a δg^{ik} l'espressione (94,2), otteniamo,

---

[1]) È necessario sottolineare che la notazione introdotta qui per le derivate rispetto alle componenti del tensore simmetrico g_{ik} ha, in un certo senso, un carattere simbolico. Piú precisamente, le derivate $\partial F/\partial g_{ik}$ (F è funzione di g_{ik}) hanno senso nella misura in cui esprimono il fatto che $dF = \dfrac{\partial F}{\partial g_{ik}} dg_{ik}$. Tuttavia, nella somma $\dfrac{\partial F}{\partial g_{ik}} dg_{ik}$ i termini contenenti i differenziali dg_{ik} di ciascuna componente con $i \neq k$ entrano due volte. Di conseguenza, se avessimo derivato un'espressione concreta F rispetto ad una componente determinata g_{ik} con $i \neq k$, avremmo ottenuto due volte ciò che indichiamo con $\partial F/\partial g_{ik}$. È necessario tener conto di questa osservazione quando si attribuiscono valori determinati agli indici i, k nelle formule contenenti le derivate rispetto alle g_{ik}.

[2]) Nel caso considerato, le dieci grandezze δg_{ik} non sono indipendenti in quanto derivano da una trasformazione delle coordinate, che sono in tutto quattro. Perciò, l'uguaglianza $\delta S = 0$ non significa affatto che $T_{ik} = 0$!

tenendo conto della simmetria del tensore T_{ik}:

$$\delta S = \frac{1}{2c} \int T_{ik} (\xi^{i;\,k} + \xi^{k;\,i}) \sqrt{-g}\, d\Omega = \frac{1}{c} \int T_{ik} \xi^{i;\,k} \sqrt{-g}\, d\Omega.$$

Trasformiamo ora questa espressione nel seguente modo:

$$\delta S = \frac{1}{c} \int (T^k_i \xi^i)_{;\,k} \sqrt{-g}\, d\Omega - \frac{1}{c} T^k_{i;\,k} \xi^i \sqrt{-g}\, d\Omega. \qquad (94,6)$$

Il primo integrale può essere scritto con l'aiuto della (86,9) nella forma

$$\frac{1}{c} \int \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{-g}\, T^k_i \xi^i)\, d\Omega$$

e trasformato in integrale di ipersuperficie. Poiché sulle frontiere d'integrazione le ξ^i sono nulle, questo integrale è nullo.

Troviamo dunque, annullando δS:

$$\delta S = -\frac{1}{c} \int T^k_{i;\,k} \xi^i \sqrt{-g}\, d\Omega = 0.$$

Poiché le ξ^i sono arbitrarie, ne segue che

$$T^k_{i;\,k} = 0. \qquad (94,7)$$

Confrontando questa equazione con l'equazione (32,4) $\partial T_{ik}/\partial x^k = 0$ ottenuta in coordinate galileiane, vediamo che il tensore T_{ik}, definito dalla formula (94,4), deve essere identificato con il tensore energia-impulso, a meno di un fattore costante. È facile verificare, applicando, per esempio, la formula (94,4) al campo elettromagnetico dove

$$\Lambda = -\frac{1}{16\pi} F_{ik} F^{ik} = -\frac{1}{16\pi} F_{ik} F_{lm} g^{il} g^{km},$$

che questo fattore è uguale all'unità.

La formula (94,4) permette quindi di calcolare il tensore energia-impulso derivando Λ rispetto alle componenti del tensore metrico (ed alle loro derivate). Inoltre, il tensore T_{ik} si ottiene direttamente in forma esplicitamente simmetrica. La formula (94,4) è comoda per il calcolo del tensore energia-impulso non soltanto in presenza di un campo gravitazionale, ma anche in assenza di tale campo, allorché il tensore metrico non ha un senso intrinseco e il passaggio a coordinate curvilinee è fatto formalmente, come una tappa intermedia per il calcolo di T_{ik}.

L'espressione (33,1) del tensore energia-impulso del campo elettromagnetico deve essere scritta in coordinate curvilinee nella forma

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi} \left(-F_{il} F_k^{\ l} + \frac{1}{4} F_{lm} F^{lm} g_{ik} \right). \qquad (94,8)$$

Per quanto concerne i corpi macroscopici, il tensore energia-impulso è [cfr. la (35,2)]:

$$T_{ik} = (p + \varepsilon) u_i u_k - p g_{ik}. \tag{94,9}$$

Notiamo che la componente T_{00} è sempre positiva[1]):

$$T_{00} \geqslant 0 \tag{94,10}$$

(la componente mista T_0^0 non ha, in generale, un segno determinato).

PROBLEMA

Studiare casi possibili di riduzione a forma canonica di un tensore simmetrico di rango due.

Soluzione. Ridurre un tensore simmetrico A_{ik} agli assi principali vuol dire trovare gli « autovettori » n^i per i quali si ha

$$A_{ik} n^k = \lambda n_i. \tag{1}$$

I corrispondenti valori principali λ si ottengono rispettivamente come radici dell'equazione di quarto grado:

$$| A_{ik} - \lambda g_{ik} | = 0 \tag{2}$$

e sono gli invarianti del tensore. Sia le grandezze λ, sia i loro autovettori possono essere complessi. (È sottinteso che le componenti del tensore A_{ik} sono reali).

Partendo dalle equazioni (1) è facile mostrare che i due vettori $n_i^{(1)}$ ed $n_i^{(2)}$, corrispondenti a due differenti valori $\lambda^{(1)}$ e $\lambda^{(2)}$, sono ortogonali:

$$n_i^{(1)} n^{(2)i} = 0. \tag{3}$$

In particolare, se l'equazione (2) ha radici complesse coniugate λ e λ^* alle quali corrispondono i vettori complessi coniugati n_i ed n_i^*, si deve avere allora

$$n_i n^{i*} = 0. \tag{4}$$

Il tensore A_{ik} si esprime mediante i suoi autovalori e gli autovettori mediante la formula

$$A_{ik} = \sum \lambda \frac{n_i n_k}{n_l n^l} \tag{5}$$

(a condizione che almeno una delle grandezze $n_l n^l$ non sia nulla; vedi in seguito).

A seconda del carattere delle radici dell'equazione (2) possono aver luogo tre casi:

I) Tutti i quattro valori principali λ sono reali. Sono reali anche i vettori n^i. Poiché quest'ultimi sono mutuamente ortogonali, tre di essi debbono avere una direzione spaziale ed uno quella temporale (possiamo normalizzarle

---

[1]) Abbiamo infatti $T_{00} = \varepsilon u_0^2 + p\,(u_0^2 - g_{00})$. Il primo termine è evidentemente positivo. Nel secondo termine scriviamo invece:

$$u_0 = g_{00} u^0 + g_{0\alpha} u^\alpha = \frac{g_{00}\, dx^0 + g_{0\alpha}\, dx^\alpha}{ds}$$

e dopo una semplice trasformazione otteniamo $g_{00} p\,(dl/ds)^2$, dove dl è l'elemento di distanza spaziale (84,6); ne risulta che il secondo termine in T_{00} è pure positivo. È facile verificare questo anche per il tensore (94,8).

rispettivamente con le condizioni $n_l n^l = -1$ ed $n_l n^l = 1$). Prendendo per direzioni degli assi coordinati le direzioni di questi vettori, il tensore si riduce alla forma

$$A_{ik} = \begin{pmatrix} \lambda^{(0)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda^{(3)} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

II) L'equazione (2) ha due radici reali ($\lambda^{(2)}$, $\lambda^{(3)}$) e due radici complesse coniugate ($\lambda' \pm i\lambda''$). Scriviamo i vettori complessi coniugati n_i ed n_i^*, corrispondenti alle due ultime radici, nella forma $a_i \pm ib_i$; poiché essi sono determinati soltanto a meno di un fattore complesso arbitrario, si possono normalizzare con la condizione $n_i n^i = n_i^* n^{i*} = 1$. Tenendo conto anche della (4), troviamo per i vettori reali a_i, b_i le condizioni:

$$a_i a^i + b_i b^i = 0, \quad a_i b^i = 0, \quad a_i a^i - b_i b^i = 1,$$

da cui $a_i a^i = 1/2$, $b_i b^i = -1/2$, cioè uno di questi vettori è temporale e l'altro spaziale [1]). Orientando gli assi coordinati lungo i vettori a^i, b^i, $n^{(2)i}$, $n^{(3)i}$, riduciamo il tensore [in base alla (5)] alla forma

$$A_{ik} = \begin{pmatrix} \lambda' & \lambda'' & 0 & 0 \\ \lambda'' & -\lambda' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda^{(3)} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

III) Se il quadrato di uno dei vettori n^i è nullo ($n_l n^l = 0$), questo vettore non può essere scelto come direzione di un asse coordinato. Si può, tuttavia, scegliere uno dei piani $x^0 x^\alpha$ in maniera tale che in esso giaccia il vettore n^i. Supponiamo che tale piano sia $x^0 x^1$. Risulta allora dalla condizione $n_l n^l = 0$ che $n^0 = n^1$, e dalle equazioni (1) si ha:

$$A_{00} + A_{01} = \lambda, \quad A_{10} + A_{11} = -\lambda,$$

donde

$$A_{00} = \lambda + \mu, \quad A_{11} = -\lambda + \mu, \quad A_{01} = -\mu,$$

dove μ è una grandezza non invariante che cambia per rotazioni nel piano $x^0 x^1$; si può sempre renderla reale con una rotazione opportuna. Orientando gli assi x^2, x^3 lungo gli altri due vettori (spaziali) $n^{(2)i}$, $n^{(3)i}$, riduciamo il tensore alla forma

$$A_{ik} = \begin{pmatrix} \lambda+\mu & -\mu & 0 & 0 \\ -\mu & -\lambda+\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda^{(3)} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Questo caso corrisponde all'uguaglianza di due radici ($\lambda^{(0)}$, $\lambda^{(1)}$) dell'equazione (2).

Notiamo che per il tensore fisico energia-impulso T_{ik} di un sistema materiale che si muove a velocità minori della velocità della luce può verificarsi solo il primo caso; ciò è dovuto al fatto che ci deve essere un tale sistema di riferimento

[1]) Poiche soltanto uno dei vettori può essere temporale, ne risulta che l'equazione (2) non può avere due coppie di radici complesse coniugate.

dove il flusso di energia del sistema, cioè le componenti $T_{\alpha 0}$, è nullo. Per quanto concerne il tensore energia-impulso delle onde elettromagnetiche, ha luogo il terzo caso con $\lambda = \lambda^{(2)} = \lambda^{(3)} = 0$ (vedi pag. 115); si può dimostrare che se cosí non fosse ci sarebbe un sistema di riferimento dove il flusso di energia sarebbe maggiore del prodotto della densità di energia per c.

§ 95. *Equazioni di Einstein*

Possiamo passare ora alla deduzione delle equazioni del campo gravitazionale. Queste equazioni si ricavano dal principio di minima azione $\delta(S_m + S_g = 0)$, dove S_g ed S_m rappresentano rispettivamente l'azione del campo gravitazionale e della materia. Facciamo variare il campo gravitazionale, cioè le grandezze g_{ik}.

La variazione di δS_g è data da:

$$\delta \int R \sqrt{-g}\, d\Omega = \delta \int g^{ik} R_{ik} \sqrt{-g}\, d\Omega =$$
$$= \int (R_{ik} \sqrt{-g}\, \delta g^{ik} + R_{ik} g^{ik} \delta \sqrt{-g} + g^{ik} \sqrt{-g}\, \delta R_{ik})\, d\Omega.$$

Sostituendovi, tenendo conto della (86,4),

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\, \delta g = -\frac{1}{2} \sqrt{-g}\, g_{ik} \delta g^{ik},$$

troviamo:

$$\delta \int R \sqrt{-g}\, d\Omega =$$
$$= \int \left(R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R\right) \delta g^{ik} \sqrt{-g}\, d\Omega + \int g^{ik} \delta R_{ik} \sqrt{-g}\, d\Omega. \qquad (95,1)$$

Per calcolare δR_{ik}, notiamo che, sebbene le grandezze Γ^i_{kl} non costituiscano un tensore, le loro variazioni $\delta\Gamma^i_{kl}$ sono un tensore. Infatti, $\Gamma^k_{il} A_k dx^l$ è la variazione di un vettore per trasporto parallelo [vedi la (85,5)] da un punto P in un altro punto infinitamente vicino P'. Ne risulta che $\delta\Gamma^k_{il} A_k dx^l$ è la differenza tra due vettori ottenuti per trasporto parallelo (rispettivamente alle Γ^i_{kl} non variate e variate) dal punto P nello stesso punto P'. Poiché la differenza di due vettori nello stesso punto è un vettore, segue che $\delta\Gamma^i_{kl}$ è un tensore.

Ricorriamo ad un sistema di coordinate localmente geodetiche. Allora, in questo punto tutte le Γ^i_{kl} sono nulle. Servendoci dell'espressione (92,7) di R_{ik}, otteniamo (tenendo presente che ora le derivate prime di g_{ik} sono nulle):

$$g^{ik} \delta R_{ik} = g^{ik} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^l} \delta\Gamma^l_{ik} - \frac{\partial}{\partial x^k} \delta\Gamma^l_{il} \right\} =$$

dove

$$w^l = g^{ik}\delta\Gamma^l_{ik} - g^{il}\delta\Gamma^k_{lk}.$$

Poiché w^l è un vettore, possiamo scrivere la relazione ottenuta in un sistema arbitrario di coordinate nella forma

$$g^{ik}\delta R_{ik} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^l}(\sqrt{-g}\,w^l)$$

[sostituendo $\partial w^l/\partial x^l$ con $w^l_{;l}$ ed utilizzando la (86,9)]. Di conseguenza, il secondo integrale del secondo membro nella (95,1) è

$$\int g^{ik}\delta R_{ik}\sqrt{-g}\,d\Omega = \int \frac{\partial\sqrt{-g}\,w^l}{\partial x^l}\,d\Omega$$

e, secondo il teorema di Gauss, può essere trasformato in un integrale di w^l sulla ipersuperficie che racchiude tutto il 4-volume. Questo termine però scompare, perché la variazione del campo agli estremi d'integrazione è nulla. La variazione δS_g è dunque[1])

$$\delta S_g = -\frac{c^3}{16\pi k}\int\left(R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R\right)\delta g^{ik}\sqrt{-g}\,d\Omega. \qquad (95,2)$$

Notiamo che se avessimo assunto come azione del campo l'espressione

$$S_g = -\frac{c^3}{16\pi k}\int G\sqrt{-g}\,d\Omega$$

avremmo ottenuto, come è facile vedere,

$$\delta S_g = -\frac{c^3}{16\pi k}\int\left\{\frac{\partial(G\sqrt{-g})}{\partial g^{ik}} - \frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial(G\sqrt{-g})}{\partial\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}}\right\}\delta g^{ik}\,d\Omega.$$

Confrontando questa espressione con la (95,2), troviamo la seguente relazione:

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = \frac{1}{\sqrt{-g}}\left\{\frac{\partial(G\sqrt{-g})}{\partial g^{ik}} - \frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial(G\sqrt{-g})}{\partial\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}}\right\}. \qquad (95,3)$$

---

[1]) Notiamo qui la seguente circostanza curiosa. Se si calcolasse la variazione $\delta\int R\sqrt{-g}\,d\Omega$ [con R_{ik} ricavato dalla (92,7)], considerando le Γ^i_{kl} come variabili indipendenti e le g_{ik} come costanti e se si applicassero in seguito le espressioni (86,3) delle Γ^i_{kl}, si otterrebbe, come è facile vedere, identicamente zero. Viceversa, si potrebbe determinare il legame tra le Γ^i_{kl} e il tensore metrico, chiedendo l'annullamento di questa variazione.

La variazione dell'azione della materia, in base alla (94,5), si può scrivere

$$\delta S_m = \frac{1}{2c} \int T_{ik} \delta g^{ik} \sqrt{-g}\, d\Omega, \tag{95,4}$$

dove T_{ik} è il tensore di energia-impulso della materia (compreso il campo elettromagnetico). L'interazione gravitazionale entra in gioco solamente per corpi di massa sufficientemente grande (per il fatto che la costante gravitazionale è piccola). Per questo nello studio del campo gravitazionale si ha a che fare in generale con corpi macroscopici. Ne risulta che per T_{ik} bisogna usare di solito l'espressione (94,9).

Dal principio di minima azione $\delta S_m + \delta S_g = 0$ deduciamo quindi:

$$-\frac{c^3}{16\pi k} \int \left(R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R - \frac{8\pi k}{c^4} T_{ik} \right) \delta g^{ik} \sqrt{-g}\, d\Omega = 0,$$

donde, tenendo conto che le δg^{ik} sono arbitrarie,

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \frac{8\pi k}{c^4} T_{ik}, \tag{95,5}$$

oppure, per le componenti miste,

$$R_i^k - \frac{1}{2} \delta_i^k R = \frac{8\pi k}{c^4} T_i^k. \tag{95,6}$$

Queste sono le *equazioni del campo gravitazionale*, equazioni fondamentali della relatività generale. dette anche *equazioni di Einstein.*

Contraendo gli indici i e k nella (95,6), troviamo:

$$R = -\frac{8\pi k}{c^4} T \tag{95,7}$$

($T = T_i^i$). Ne risulta che le equazioni del campo si possono scrivere anche nella forma

$$R_{ik} = \frac{8\pi k}{c^4} \left(T_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} T \right). \tag{95,8}$$

Le equazioni di Einstein non sono lineari. Perciò il principio di sovrapposizione non è valido per i campi gravitazionali. Questo principio è valido soltanto in modo approssimato per campi gravitazionali deboli dove le equazioni di Einstein possono essere lineari (tali sono, in particolare, i campi gravitazionali nel limite classico, newtoniano; vedi § 99);

In uno spazio vuoto si ha $T_{ik} = 0$, e le equazioni del campo gravitazionale si riducono alle equazioni

$$R_{ik} = 0. \tag{95,9}$$

Ricordiamo che ciò non significa affatto che uno spazio-tempo vuoto sia piatto: per affermare questo è necessaria una condizione piú forte e cioè $R_{iklm} = 0$.

Il tensore energia-impulso del campo elettromagnetico possiede la proprietà che $T_i^i = 0$ [vedi (33,2)]. Ne risulta, tenendo conto della (95,7) che in presenza del solo campo elettromagnetico, senza massa alcuna, la curvatura scalare dello spazio-tempo è nulla.

Come sappiamo, la divergenza del tensore di energia-impulso è nulla:

$$T^k_{i;\,k} = 0. \tag{95,10}$$

Di conseguenza, deve essere nulla anche la divergenza del primo membro dell'equazione (95,6). Ciò segue direttamente dall'identità (92,10).

In tal modo, le equazioni (95,10) sono contenute, di fatto, nelle equazioni di campo (95,6). D'altra parte, le equazioni (95,10), esprimendo le leggi di conservazione dell'energia e dell'impulso, contengono in sé le equazioni del moto del sistema fisico al quale si riferisce il tensore energia-impulso considerato (cioè le equazioni del moto delle particelle materiali o la seconda coppia di equazioni di Maxwell). Quindi, le equazioni del campo gravitazionale contengono in sé anche le equazioni della materia stessa che genera questo campo. Ne risulta che la distribuzione e il moto della materia che genera il campo gravitazionale non possono essere dati arbitrariamente. Al contrario, essi debbono essere determinati (risolvendo le equazioni del campo per condizioni iniziali date) contemporaneamente al campo stesso creato da questa materia.

Sottolineiamo la differenza di fondo tra questa situazione e quella che abbiamo avuto per il campo elettromagnetico. Le equazioni di questo campo (equazioni di Maxwell) contengono solamente l'equazione di conservazione della carica totale (equazione di continuità), ma non le equazioni del moto delle cariche stesse. Di conseguenza, la distribuzione e il moto delle cariche possono essere dati arbitrariamente, purché la carica totale resti costante. Questa distribuzione data delle cariche determina allora, mediante le equazioni di Maxwell, il campo elettromagnetico da esse creato.

Bisogna tuttavia precisare che, per determinare completamente la distribuzione e il moto della materia in un campo gravitazionale, si deve aggiungere alle equazioni di Einstein l'equazione di stato della materia (non contenuta nelle equazioni del campo), cioè un'equazione che lega la pressione e la densità. Questa

equazione deve essere data contemporaneamente alle equazioni del campo [1]).

Sulle quattro coordinate x^i si può operare una trasformazione arbitraria. Questa trasformazione permette di scegliere arbitrariamente quattro tra le dieci componenti del tensore g_{ik}. Sono perciò indipendenti soltanto sei grandezze g_{ik}. Inoltre, le quattro componenti del quadrivettore velocità u^i, che entrano nel tensore energia-impulso, sono legate dalla relazione $u_i u^i = 1$, in modo che solo tre di esse sono indipendenti. Di conseguenza, ci sono, come era logico da aspettarsi, dieci equazioni del campo (95,5) per dieci grandezze incognite: sei componenti di g_{ik}, tre componenti di u^i e la densità della materia ε/c^2 (o la sua pressione p). Per un campo gravitazionale nel vuoto restano solamente sei grandezze incognite (le componenti di g_{ik}), e diminuisce rispettivamente il numero delle equazioni indipendenti del campo: le dieci equazioni $R_{ik} = 0$ sono legate dalle quattro identità (92,10).

Notiamo qualche particolarità strutturale delle equazioni di Einstein. Esse rappresentano un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali del secondo ordine. Tuttavia, delle equazioni non fanno parte le derivate rispetto al tempo di tutte e 10 le componenti di g_{ik}. Infatti, dall'espressione (92,1) risulta che le derivate seconde rispetto al tempo sono contenute soltanto nelle componenti $R_{0\alpha 0\beta}$ del tensore di curvatura mediante il termine $-\frac{1}{2}\ddot{g}_{\alpha\beta}$ (il punto significa derivazione rispetto ad x^0); quanto alle derivate seconde delle componenti $g_{0\alpha}$ e g_{00} del tensore metrico, esse sono completamente assenti. È chiaro dunque che il tensore R_{ik}, ottenuto per contrazione dal tensore di curvatura, e con esso anche le equazioni (95,5) contengono le derivate seconde rispetto al tempo soltanto di sei componenti spaziali $g_{\alpha\beta}$.

È facile anche vedere che queste derivate entrano soltanto nelle equazioni

$$R_\alpha^\beta - \frac{1}{2}\delta_\alpha^\beta R = \frac{8\pi k}{c^4} T_\alpha^\beta. \tag{95,11}$$

Per quanto concerne le equazioni per le componenti $^0_0$ e $^0_\alpha$, cioè

$$R_0^0 - \frac{1}{2} R = \frac{8\pi k}{c^4} T_0^0, \quad R_\alpha^0 = \frac{8\pi k}{c^4} T_\alpha^0, \tag{95,12}$$

esse contengono soltanto le derivate prime rispetto al tempo. È

[1]) L'equazione di stato lega infatti non due, ma tre grandezze termodinamiche, per esempio la pressione, la densità e la temperatura della materia. Nelle applicazioni alla teoria della gravitazione, questa circostanza però non ha, di solito, un'importanza sostanziale, perché le equazioni di stato approssimate utilizzate qui non dipendono dalla temperatura (tali sono, per esempio, le equazioni $p = 0$ per una materia rarefatta, l'equazione ultrarelativistica $p = \varepsilon/3$ per una materia fortemente compressa, ecc.).

facile verificarlo osseruando che nella costruzione delle grandezze R^0_α ed $R^0_0 - \frac{1}{2} R = \frac{1}{2} (R^0_0 - R^\alpha_\alpha)$, dedotte da R_{iklm} per contrazione, le componenti tipo $R_{0\alpha 0\beta}$ non figurano. Ciò risulta piú chiaramente dall'identità (92,10), scritta nella forma

$$\left(R^0_i - \frac{1}{2} \delta^0_i R\right)_{;\,0} = -\left(R^\alpha_i - \frac{1}{2} \delta^\alpha_i R\right)_{;\,\alpha} \qquad (95,13)$$

($i = 0, 1, 2, 3$). Le derivate di ordine piú elevato rispetto al tempo, contenute nel secondo membro di questa uguaglianza, sono le derivate seconde (che entrano nelle grandezze R^α_i, R). Poiché la (95,13) è un'identità, ne segue che il primo membro deve pure contenere le derivate rispetto al tempo non superiori al secondo ordine. Una derivazione rispetto al tempo è però già presente in esso in modo esplicito; di conseguenza, le espressioni stesse $R^0_i - \frac{1}{2} \delta^0_i R$ possono contenere le derivate rispetto al tempo non superiori al primo ordine.

Inoltre, i primi membri delle equazioni (95,12) non contengono neppure le derivate prime $\dot{g}_{0\alpha}$ e $\dot{g}_{00}$ (bensí solo le $\dot{g}_{\alpha\beta}$). Infatti, tra tutte le $\Gamma_{i,\ kl}$ queste derivate contengono soltanto le $\Gamma_{\alpha,00}$ e $\Gamma_{0,00}$, e quest'ultime grandezze entrano, a loro volta, soltanto nelle componenti del tensore di curvatura tipo $R_{0\alpha 0\beta}$, le quali, come già sappiamo, non sono presendi nei primi membri delle equazioni (95,12).

Se ci interessa la soluzione delle equazioni di Einstein per condizioni iniziali date (rispetto al tempo), sorge naturale la domanda: per quante grandezze si possono dare arbitrariamente le distribuzioni spaziali iniziali?

Le condizioni iniziali delle equazioni del secondo ordine debbono comprendere le distribuzioni iniziali sia delle grandezze stesse da derivare che delle loro derivate prime rispetto al tempo. Tuttavia, poiché nel dato caso le equazioni contengono le derivate seconde soltanto di sei $g_{\alpha\beta}$, ne segue che non si possono dare arbitrariamente tutte le g_{ik} e $\dot{g}_{ik}$ nelle condizioni iniziali. Dunque, si possono dare (oltre alla velocità e la densità della materia) i valori iniziali delle funzioni $\dot{g}_{\alpha\beta}$ e $g_{\alpha\beta}$, e quindi, a partire dalle 4 equazioni (95,12) si determinano i valori iniziali ammissibili $g_{0\alpha}$ e g_{00}; nelle equazioni (95,11) rimangono ancora i valori iniziali arbitrari $g_{0\alpha}$.

Il numero delle condizioni iniziali cosí date contiene però anche funzioni il cui carattere arbitrario è dovuto semplicemente alla scelta arbitraria del 4-sistema di coordinate. Tuttavia, ha un significato reale fisico solo il numero di funzioni arbitrarie « fisicamente differenti » che non può ormai essere ridotto mediante la scelta del sistema di riferimento. Da considerazioni fisiche si vede facilmente

che questo numero è uguale a 8: le condizioni iniziali debbono dare la distribuzione della densità della materia e di tre componenti della sua velocità, nonché ancora di quattro grandezze che definiscono il campo gravitazionale libero (non legato alla materia) (vedi piú avanti § 107); le condizioni iniziali di un campo gravitazionale libero nel vuoto debbono dare soltanto le ultime quattro grandezze.

PROBLEMA

Scrivere le equazioni di un campo gravitazionale costante esprimendo tutte le operazioni di derivazione rispetto alle coordinate spaziali sotto forma di derivate covarianti nello spazio di metrica $\gamma_{\alpha\beta}$ (84,7).

Soluzione. Introduciamo le notazioni $g_{00} = h$, $g_{0\alpha} = -hg_\alpha$ (88,11) e la velocità tridimensionale v^α (88,10). In seguito, tutte le operazioni di innalzamento e di abbassamento degli indici e di derivazione covariante sono relative allo spazio tridimensionale di metrica $\gamma_{\alpha\beta}$ sui vettori tridimensionali g_α, v^α e sullo scalare tridimensionale h.

Le equazioni cercate debbono essere invarianti nella trasformazione

$$x^\alpha \to x^\alpha, \qquad x^0 \to x^0 + f(x^\alpha), \tag{1}$$

la quale conserva la proprietà del campo di essere stazionario. Data una tale trasformazione, è facile vedere che (vedi la nota alla pag. 325) $g_\alpha \to g_\alpha - \partial f/\partial x^\alpha$ e che lo scalare h e il tensore $\gamma_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} + hg_\alpha g_\beta$ non variano. È dunque chiaro che le equazioni cercate, una volta espresse mediante $\gamma_{\alpha\beta}$, h e g_α, possono contenere g_α soltanto in forma di combinazione delle derivate che dia un tensore antisimmetrico tridimensionale:

$$f_{\alpha\beta} = g_{\beta;\alpha} - g_{\alpha;\beta} = \frac{\partial g_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_\alpha}{\partial x^\beta}, \tag{2}$$

invariante rispetto alla trasformazione indicata. Tenendo presente questa circostanza, si possono semplificare essenzialmente i calcoli ponendo (dopo aver calcolate tutte le derivate che entrano in R_{ik}) $g_\alpha = 0$ e $g_{\alpha;\beta} + g_{\beta;\alpha} = 0$ [1].

I simboli di Christoffel sono:

$$\Gamma^0_{00} = \frac{1}{2} g^\alpha h_{;\alpha}, \quad \Gamma^\alpha_{00} = \frac{1}{2} h^{;\alpha},$$

$$\Gamma^\alpha_{\alpha 0} = \frac{1}{2h} h_{;\alpha} + \frac{h}{2} g^\beta f_{\alpha\beta} + \ldots, \quad \Gamma^\alpha_{0\beta} = \frac{h}{2} f_\beta{}^\alpha - \frac{1}{2} g_\beta h^{;\alpha},$$

$$\Gamma^0_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_\beta}{\partial x^\alpha}\right) - \frac{1}{2h}(g_\alpha h_{;\beta} + g_\beta h_{;\alpha}) + g_\gamma \lambda^\gamma_{\alpha\beta} + \ldots,$$

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \lambda^\alpha_{\beta\gamma} - \frac{h}{2}(g_\beta f_\gamma{}^\alpha + g_\gamma f_\beta{}^\alpha) + \ldots$$

---

[1]) Per evitare possibili ambiguità, sottolineiamo che il procedimento esposto per semplificare i calcoli, pur fornendo le giuste equazioni del campo, sarebbe inadeguato per il calcolo delle componenti del tensore R_{ik} come tali, perché esse non sono invarianti rispetto alla trasformazione (1). I primi membri delle equazioni (3), (4), (5) contengono le componenti del tensore di Ricci alle quali sono effettivamente uguali le espressioni scritte. Queste componenti sono invarianti rispetto alla trasformazione (1).

I termini omessi (sostituiti qui con puntini di sospensione) sono quadratici rispetto alle componenti del vettore g_α; questi termini si annullano allorché poniamo, fatte derivazioni in R_{ik} (92,7), $g_\alpha = 0$. I calcoli sono fatti utilizzando le formule (84,9), (84,12) e (84,13); $\lambda^\alpha_{\beta\gamma}$ sono i simboli di Christoffel tridimensionali costruiti con la metrica $\gamma_{\alpha\beta}$.

Il tensore T_{ik} è calcolato secondo la formula (94,9) con u^i ricavate dalla (88,14) (ponendo sempre $g_\alpha = 0$).

Dopo tutti i calcoli necessari dalla (95,8) si deducono le seguenti equazioni:

$$\frac{1}{h} R_{00} = \frac{1}{\sqrt{h}} (\sqrt{h})^{;\alpha}_{;\alpha} + \frac{h}{4} f_{\alpha\beta} f^{\alpha\beta} = \frac{8\pi k}{c^4} \left(\frac{\varepsilon + p}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{\varepsilon - p}{2} \right), \tag{3}$$

$$\frac{1}{\sqrt{h}} R^\alpha_0 = -\frac{\sqrt{h}}{2} f^{\alpha\beta}{}_{;\beta} - \frac{3}{2} f^{\alpha\beta} (\sqrt{h})_{;\beta} = \frac{8\pi k}{c^4} \frac{p + \varepsilon}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{v^\alpha}{c}, \tag{4}$$

$$R^{\alpha\beta} = P^{\alpha\beta} + \frac{h}{2} f^{\alpha\gamma} f^\beta{}_\gamma - \frac{1}{\sqrt{h}} (\sqrt{h})^{;\alpha;\beta} =$$

$$= \frac{8\pi k}{c^4} \left[\frac{(p + \varepsilon) v^\alpha v^\beta}{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} + \frac{\varepsilon - p}{2} \gamma^{\alpha\beta} \right]. \tag{5}$$

Qui $P^{\alpha\beta}$ è un tensore tridimensionale costruito con le $\gamma_{\alpha\beta}$, esattamente come R^{ik} è formato con le g_{ik}[1]).

§ 96. *Pseudotensore energia-impulso del campo gravitazionale*

In assenza di un campo gravitazionale la legge di conservazione dell'energia e dell'impulso della materia (e del campo elettromagnetico) è espressa dall'equazione

$$\partial T^{ik} / \partial x^k = 0.$$

La generalizzazione di questa equazione al caso in cui è presente un campo gravitazionale è rappresentata dall'equazione (94,7)

$$T^k_{i;k} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial (T^k_i \sqrt{-g})}{\partial x^k} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} T^{kl} = 0. \tag{96,1}$$

---

[1]) Analogamente, le equazioni di Einstein possono essere scritte anche nel caso generale di una metrica che dipende dal tempo. Esse avranno allora, accanto alle derivate spaziali, anche le derivate rispetto al tempo delle grandezze γ_α, g_α, h. Vedi *A. L. Zelmanov* Atti (Doklady) dell'Accademia delle Scienze dell'URSS **107**, 815 (1956).

Tuttavia questa equazione non esprime nessuna legge di conservazione di grandezze fisiche[1]). Ciò è dovuto al fatto che in un campo gravitazionale si deve conservare non il 4-impulso della sola materia, ma il 4-impulso della materia e del campo gravitazionale; quest'ultimo non è contenuto nell'espressione di T_i^k.

Per determinare il 4-impulso conservativo totale del campo gravitazionale e della materia che in esso si trova, procederemo come segue (*L. D. Landau, E. M. Lifšic*, 1947)[2]). Scegliamo un sistema di coordinate in maniera tale da annullare, in un punto dato dello spazio-tempo, tutte le derivate prime di g_{ik} rispetto alle coordinate (le g_{ik} non debbono avere necessariamente valori galileiani). Allora, in questo punto, il secondo termine dell'equazione (96,1) si annulla, e nel primo termine si può quindi portare $\sqrt{-g}$ fuori dal segno di derivazione, in modo che alla fine resta

$$\frac{\partial}{\partial x^k} T_i^k = 0,$$

o, in componenti controvarianti,

$$\frac{\partial}{\partial x^k} T^{ik} = 0.$$

Le grandezze T^{ik}, che soddisfano identicamente questa equazione, si possono scrivere nella forma

$$T^{ik} = \frac{\partial}{\partial x^l} \eta^{ikl},$$

dove η^{ikl} sono grandezze antisimmetriche rispetto agli indici k, l:

$$\eta^{ikl} = -\eta^{ilk}.$$

Il procedimento per ridurre di fatto T^{ik} a questa forma non è difficile. A questo scopo, partiamo dalle equazioni di campo

$$T^{ik} = \frac{c^4}{8\pi k}\left(R^{ik} - \frac{1}{2} g^{ik} R\right),$$

---

[1]) In effetti, l'integrale $\int T_i^k \sqrt{-g}\, dS_k$ si conserva soltanto se è valida la condizione $\frac{\partial \sqrt{-g}\, T_i^k}{\partial x^k} = 0$, e non la (96,1). È facile verificare questo facendo in coordinate curvilinee gli stessi calcoli, che sono stati fatti in coordinate galileiane nel § 29. È comunque sufficiente notare che questi calcoli hanno un carattere puramente formale, non legato alle proprietà tensoriali delle rispettive grandezze, cosí come la dimostrazione del teorema di Gauss ha in coordinate curvilinee la stessa forma (83,17) che in coordinate cartesiane.

[2]) Si potrebbe pensare di applicare al campo gravitazionale la formula (94,4), sostituendo in essa $\Lambda = -c^4 G/16\pi k$. Sottolineiamo, però, che questa formula si riferisce solamente ai sistemi fisici descritti dalle grandezze q, differenti dalle g_{ik}; essa non è dunque applicabile al campo gravitazionale definito dalle grandezze g_{ik} come tali. Notiamo, a questo proposito, che sostituendo nella (94,4) G con Λ, si otterrebbe semplicemente zero, come ciò risulta direttamente dalla relazione (95,3) e dalle equazioni del campo nel vuoto.

mentre per R^{ik} secondo la (92,1) abbiamo:

$$R^{ik}=\frac{1}{2}g^{im}g^{kp}g^{ln}\left\{\frac{\partial^2 g_{lp}}{\partial x^m\,\partial x^n}+\frac{\partial^2 g_{mn}}{\partial x^l\,\partial x^p}-\frac{\partial^2 g_{ln}}{\partial x^m\,\partial x^p}-\frac{\partial^2 g_{mp}}{\partial x^l\,\partial x^n}\right\}$$

(ricordiamo che tutte le Γ^i_{lk} nel punto considerato sono nulle. Dopo semplici trasformazioni, il tensore T^{ik} può essere ridotto alla forma

$$T^{ik}=\frac{\partial}{\partial x^l}\left\{\frac{c^4}{16\pi k}\frac{1}{(-g)}\frac{\partial}{\partial x^m}[(-g)(g^{ik}g^{lm}-g^{il}g^{km})]\right\}.$$

L'espressione compresa tra parentesi graffe, antisimmetrica rispetto agli indici k, l, rappresenta ciò che abbiamo indicato con η^{ikl}. Poiché le derivate prime di g_{ik} sono nulle nel punto considerato, il fattore $1/(-g)$ può essere portato fuori dal segno di derivazione $\partial/\partial x^l$. Introduciamo le notazioni

$$h^{ikl}=\frac{\partial}{\partial x^m}\lambda^{iklm} \tag{96,2}$$

$$\lambda^{iklm}=\frac{c^4}{16\pi k}(-g)(g^{ik}g^{lm}-g^{il}g^{km}); \tag{96,3}$$

dove le grandezze h^{ikl} sono antisimmetriche rispetto agli indici k, l:

$$h^{ikl}=-h^{ilk}. \tag{96,4}$$

Si può allora scrivere

$$\frac{\partial h^{ikl}}{\partial x^l}=(-g)\,T^{ik}.$$

Questa relazione, dedotta supponendo $\partial g_{ik}/\partial x^l=0$, non ha piú luogo quando si passa ad un sistema di coordinate arbitrario. Indichiamo la differenza $\frac{\partial h^{ikl}}{\partial x^l}-(-g)\,T^{ik}$, che nel caso generale non è nulla, con $(-g)\,t^{ik}$. Si avrà allora, per definizione:

$$(-g)(T^{ik}+t^{ik})=\frac{\partial h^{ikl}}{\partial x^l}. \tag{96,5}$$

Le grandezze t^{ik} sono simmetriche rispetto agli indici i, k:

$$t^{ik}=t^{ki}. \tag{96,6}$$

Questo segue direttamente dalla loro definizione, poiché sia il tensore T^{ik} che le derivate $\partial h^{ikl}/\partial x^l$ sono grandezze simmetriche[1]). Esprimendo T^{ik} mediante R^{ik} secondo le equazioni di Einstein, otteniamo l'identità

$$(-g)\left\{\frac{c^4}{8\pi k}\left(R^{ik}-\frac{1}{2}g^{ik}R\right)+t^{ik}\right\}=\frac{\partial h^{ikl}}{\partial x^l}, \tag{96,7}$$

[1]) È state per questo che nell'espressione di T^{ik} abbiamo portato $(-g)$ fuori dal segno di derivazione rispetto ad x^l. Viceversa, le $\partial h^{ikl}/\partial x^l$ e, di conseguenza, t^{ik} non sarebbero simmetriche rispetto ad i, k.

dalla quale si possono ricavare, dopo un calcolo assai laborioso, le seguenti espressioni di t^{ik}:

$$t^{ik} = \frac{c^4}{16\pi k} \{(2\Gamma^n_{lm}\Gamma^p_{np} - \Gamma^n_{lp}\Gamma^p_{mn} - \Gamma^n_{ln}\Gamma^p_{mp})(g^{il}g^{km} - g^{ik}g^{lm}) + \\ + g^{il}g^{mn}(\Gamma^k_{lp}\Gamma^p_{mn} + \Gamma^k_{mn}\Gamma^p_{lp} - \Gamma^k_{np}\Gamma^p_{lm} - \Gamma^k_{lm}\Gamma^p_{np}) + \\ + g^{kl}g^{mn}(\Gamma^i_{lp}\Gamma^p_{mn} + \Gamma^i_{mn}\Gamma^p_{lp} - \Gamma^i_{np}\Gamma^p_{lm} - \Gamma^i_{lm}\Gamma^p_{np}) + \\ + g^{lm}g^{np}(\Gamma^i_{ln}\Gamma^k_{mp} - \Gamma^i_{lm}\Gamma^k_{np})\}, \qquad (96,8)$$

oppure, mediante le derivate delle componenti del tensore metrico:

$$(-g)\, t^{ik} = \frac{c^4}{16\pi k} \Big\{ \mathfrak{g}^{ik}{}_{,l}\mathfrak{g}^{lm}{}_{,m} - \mathfrak{g}^{il}{}_{,l}\mathfrak{g}^{km}{}_{,m} + \frac{1}{2} g^{ik} g_{lm} \mathfrak{g}^{ln}{}_{,p}\mathfrak{g}^{pm}{}_{,n} - \\ - (g^{il} g_{mn} \mathfrak{g}^{kn}{}_{,p}\mathfrak{g}^{mp}{}_{,l} + g^{kl} g_{mn} \mathfrak{g}^{in}{}_{,p}\mathfrak{g}^{mp}{}_{,l}) + g_{lm} g^{np} \mathfrak{g}^{il}{}_{,n}\mathfrak{g}^{km}{}_{,p} + \\ + \frac{1}{8}(2g^{il}g^{km} - g^{ik}g^{lm})(2g_{np}g_{qr} - g_{pq}g_{nr})\, \mathfrak{g}^{nr}{}_{,l}\mathfrak{g}^{pq}{}_{,m} \Big\}, \qquad (96,9)$$

dove $\mathfrak{g}^{ik} = \sqrt{-g}\, g^{ik}$, e la notazione « , i » indica la derivazione ordinaria rispetto ad x^i.

La proprietà essenziale delle grandezze t^{ik} è che esse non costituiscono un tensore; ciò è evidente già dal fatto che le $\partial h^{ikl}/\partial x^l$ sono derivate ordinarie e non covarianti. Tuttavia, le t^{ik} si esprimono mediante le grandezze Γ^i_{kl}, e quest'ultime si comportano come un tensore per trasformazioni lineari delle coordinate (vedi § 85); lo stesso si può quindi dire anche delle t^{ik}. Dalla definizione (96,5) segue che la somma $T^{ik} + t^{ik}$ soddisfa identicamente le equazioni

$$\frac{\partial}{\partial x^k}(-g)(T^{ik} + t^{ik}) = 0. \qquad (96,10)$$

Ciò vuol dire che vale la legge di conservazione delle grandezze

$$P^i = \frac{1}{c}\int (-g)(T^{ik} + t^{ik})\, dS_k. \qquad (96,11)$$

In assenza di un campo gravitazionale, in coordinate galileiane si ha $t^{ik} = 0$, e l'integrale scritto sopra diventa $\frac{1}{c}\int T^{ik} dS_k$, cioè il 4-impulso della materia. Di conseguenza, le grandezze (96,11) debbono essere identificate con il 4-impulso totale della materia e con il campo gravitazionale. L'insieme delle grandezze t^{ik} è detto *pseudotensore energia-impulso* del campo gravitazionale.

L'integrazione nella (96,11) può essere estesa ad ogni ipersuperficie infinita che racchiude l'intero spazio tridimensionale. Se si prende per tale ipersuperficie x^0 = costante, si può scrivere P^i

nella forma di un integrale spaziale triplo:

$$P^i = \frac{1}{c} \int (-g)\,(T^{i0} + t^{i0})\,dV. \tag{96,12}$$

Ha un'importanza essenziale il fatto che il 4-impulso totale della materia e del campo si esprima in forma di integrali delle grandezze $(-g)\,(T^{ik} + t^{ik})$ simmetriche rispetto agli indici i, k. Ciò significa che si conserva il 4-momento angolare definito come segue (vedi § 32)[1]):

$$M^{ik} = \int (x^i\,dP^k - x^k\,dP^i) =$$

$$= \frac{1}{c} \int [x^i\,(T^{kl} + t^{kl}) - x^k\,(T^{il} + t^{il})]\,(-g)\,dS_l. \tag{96,13}$$

In tal modo, in relatività generale si conserva anche il momento angolare totale di un sistema isolato di gravi ed, inoltre, come prima, si può dare la definizione di centro di massa in moto uniforme. Quest'ultimo fatto è dovuto alla conservazione delle componenti $M^{0\alpha}$ (cfr. § 14) espressa dall'equazione

$$x^0 \int (T^{\alpha 0} + t^{\alpha 0})\,(-g)\,dV - \int x^\alpha\,(T^{00} + t^{00})\,(-g)\,dV = \text{costante},$$

in modo che le coordinate del centro di massa sono date dalla formula

$$X^\alpha = \frac{\int x^\alpha\,(T^{00} + t^{00})\,(-g)\,dV}{\int (T^{00} + t^{00})\,(-g)\,dV}. \tag{96,14}$$

Scegliendo un sistema di coordinate che sia inerziale nell'elemento di volume dato, si possono annullare tutte le t^{ik} in qualsiasi punto dello spazio-tempo (perché si annullano contemporaneamente tutte le grandezze Γ^i_{kl}). D'altra parte, si possono avere t^{ik} differenti da zero anche in uno spazio piatto, cioè in assenza di un campo gravitazionale, ricorrendo semplicemente a coordinate curvilinee in luogo di quelle cartesiane. In ogni caso, non ha

---

[1]) Bisogna notare che l'espressione ottenuta per il 4-impulso della materia e del campo non è affatto l'unica possibile. Al contrario, si possono scegliere con infiniti modi (vedi, per esempio, il problema alla fine di questo paragrafo) espressioni tali che, in assenza di un campo, si riducono a T^{ik} e danno grandezze conservate se integrate in dS_k. Tuttavia la nostra scelta è l'unica per cui lo pseudotensore energia-impulso del campo contenga soltanto le derivate prime delle g_{ik} (condizione assai naturale dal punto di vista fisico) ed è l'unica per cui esso sia simmetrico, il che permette di formulare la legge di conservazione del momento angolare.

senso parlare di una localizzazione determinata dell'energia del campo gravitazionale nello spazio. Se il tensore T_{ik} è nullo in un certo punto d'universo, questa proprietà si rivela in ogni sistema di coordinate, e si può allora dire che in questo punto non c'è né materia, né campo elettromagnetico. Al contrario, dal fatto che lo pseudotensore sia nullo in un sistema di riferimento non segue affatto che esso sia nullo in un altro sistema di riferimento, e perciò non ha senso parlare di energia gravitazionale localizzata in una certa regione. Ciò è in pieno accordo con il fatto che si può, con una scelta adeguata delle coordinate, « annullare » il campo gravitazionale nell'elemento di volume dato, ed inoltre, in forza di quanto è stato detto sopra, anche lo pseudotensore t^{ik} in questo elemento.

Quanto alle grandezze P^i — quadrivettore impulso della materia e del campo — esse hanno un significato ben determinato: risulta infatti che esse non dipendono dalla scelta del sistema di riferimento proprio nel senso richiesto dalle considerazioni d'ordine fisico.

Delimitiamo attorno alle masse considerate una regione dello spazio sufficientemente grande perché si possa trascurare, fuori di essa, il campo gravitazionale. Nello spazio-tempo quadridimensionale, questa regione descrive un « canale » nel corso del tempo. Il campo non esiste al di fuori di questo « canale », cosicché lo spazio quadridimensionale è ivi piatto. Ne risulta che nel calcolo dell'energia e dell'impulso del campo bisogna scegliere il sistema quadridimensionale di coordinate in modo tale che esso sia galileiano al di fuori del « canale » e che tutte le t^{ik} siano nulle.

Naturalmente, il sistema di riferimento non è definito univocamente da questa condizione: esso può essere scelto arbitrariamente all'interno del « canale ». In accordo con il significato fisico delle grandezze P^i risulta però, che quest'ultime non dipendono assolutamente dalla scelta del sistema di coordinate all'interno del « canale ». Consideriamo infatti due sistemi di coordinate che siano differenti all'interno del « canale » e coincidenti fuori di esso con uno stesso sistema galileiano, e confrontiamo i valori P^i e P'^i del quadrivettore impulso in questi due sistemi in determinati istanti di « tempo » x^0 ed x'^0. Introduciamo il terzo sistema di coordinate che coincida all'interno del « canale » con il primo sistema all'istante x^0, con il secondo sistema all'istante x'^0 e con lo stesso sistema galileiano fuori del « canale » . In base alla legge di conservazione dell'energia e dell'impulso, le grandezze P^i sono costanti ($dP^i/dx^0 = 0$). Ciò si verifica nel terzo sistema di coordinate, come pure nei primi due. Ne risulta che $P^i = P'^i$, come dovevasi dimostrare.

Abbiamo accennato prima che le grandezze t^{ik} sono dotate di proprietà tensoriali per trasformazioni lineari delle coordinate. Di conseguenza, le grandezze P^i costituiscono un quadrivettore per tali trasformazioni, e in particolare, per le trasformazioni di Lorentz

che trasformano un sistema di riferimento galileiano all'infinito in un altro[1]).

Il 4-impulso P^i può essere anche espresso sotto forma di un integrale esteso ad una superficie tridimensionale all'infinito che racchiuda « tutto lo spazio ». Sostituendo la (96,5) nella (96,11), troviamo:

$$P^i = \frac{1}{c} \int \frac{\partial h^{ikl}}{\partial x^l} dS_k.$$

Si può trasformare questo integrale in un integrale esteso a una superficie ordinaria con l'aiuto della (6,17):

$$P^i = \frac{1}{2c} \oint h^{ikl} df^*_{kl}. \tag{96,15}$$

Se nella (96,11) si prende per regione d'integrazione la ipersuperficie x^0 = costante, la superficie d'integrazione nella (96,15) è una superficie puramente spaziale[1]):

$$P^i = \frac{1}{c} \oint h^{i0\alpha} df_\alpha. \tag{96,16}$$

Per dedurre una formula analoga per il momento angolare, sostituiamo la (96,5) nella (96,13) e rappresentiamo h^{ikl} nella forma (96,2). Integrando poi « per parti », troviamo:

$$\begin{aligned} M^{ik} &= \frac{1}{c} \int \left(x^i \frac{\partial^2 \lambda^{klmn}}{\partial x^m \partial x^n} - x^k \frac{\partial^2 \lambda^{ilmn}}{\partial x^m \partial x^n} \right) dS_l = \\ &= \frac{1}{2c} \int \left(x^i \frac{\partial \lambda^{klmn}}{\partial x^n} - x^k \frac{\partial \lambda^{ilmn}}{\partial x^n} \right) df^*_{lm} - \\ &- \frac{1}{c} \int \left(\delta^i_m \frac{\partial \lambda^{klmn}}{\partial x^n} - \delta^k_m \frac{\partial \lambda^{ilmn}}{\partial x^n} \right) dS_l = \\ &= \frac{1}{2c} \int (x^i h^{klm} - x^k h^{ilm}) df^*_{lm} - \frac{1}{c} \int \frac{\partial}{\partial x^n} (\lambda^{klin} - \lambda^{ilkn}) dS_l. \end{aligned}$$

Dalla definizione delle grandezze λ^{iklm} si vede facilmente che

$$\lambda^{ilkn} - \lambda^{klin} = \lambda^{ilnk}.$$

---

[1]) Piú rigorosamente parlando, secondo la definizione (96,11), P^i è un quadrivettore soltanto per trasformazioni lineari e con determinante uguale a 1; tali sonoanche le trasformazioni di Lorentz, le sole a presentare un interesse fisico. Se si ammettono anche trasformazioni con determinante differente dall'unità, bisogna allora introdurre nella definizione di P^i il valore di g all'infinito, scrivendo nel primo membro della (96,11) $\sqrt{-g_\infty} P^i$ in luogo di P^i.

[2]) df^*_{kl} è l'elemento « normale » della superficie, legato all'elemento « tangenziale » df^{ik} mediante la (6,11): $df^*_{ik} = \frac{1}{2} e_{iklm} df^{lm}$. Sulla superficie che delimita la ipersuperficie perpendicolare all'asse x^0 sono differenti da zero solo le componenti df^{lm} con $l, m = 1, 2, 3$; di conseguenza, df^*_{ik} ha solo le componenti per cui uno dei due indici i e k è nullo. Le componenti $df^*_{0\alpha}$ sono le componenti dell'elemento tridimensionale di una superficie ordinaria, che indicheremo semplicemente con df_α.

Dunque l'ultimo integrale avente per elemento d'integrazione dS_l è uguale a

$$\frac{1}{c}\int \frac{\partial \lambda^{iln k}}{\partial x^n}\, dS_l = \frac{1}{2c}\int \lambda^{iln k}\, df^*_{ln}.$$

Infine, scegliendo di nuovo una superficie d'integrazione puramente spaziale, otteniamo

$$M^{ik} = \frac{1}{c}\int (x^i h^{k0\alpha} - x^k h^{i0\alpha} + \lambda^{i0\alpha k})\, df_\alpha. \qquad (96,17)$$

PROBLEMA

Trovare l'espressione per il 4-impulso totale della materia e del campo gravitazionale ricorrendo alla formula (32,5).

Soluzione. In luogo della (32,1) in coordinate curvilinee si ha

$$S = \int \Lambda \sqrt{-g}\, dV\, dt$$

e, di conseguenza, per ottenere una grandezza conservativa bisogna sostituire nella (32,5) Λ con $\Lambda\sqrt{-g}$, il 4-impulso assume allora la forma

$$P_i = \frac{1}{c}\int \left[-\Lambda \sqrt{-g}\, \delta_i^k + \sum \frac{\partial q^{(l)}}{\partial x^i} \frac{\partial (\sqrt{-g}\,\Lambda)}{\partial \dfrac{\partial q^{(l)}}{\partial x^k}} \right] dS_k.$$

Applicando questa formula alla materia per la quale le grandezze $q^{(l)}$ sono differenti da g_{ik}, si può portare $\sqrt{-g}$ fuori dal segno di derivazione, e l'espressione integranda risulta uguale a $\sqrt{-g}\, T_i^k$, dove T_i^k è il tensore energia-impulso della materia. Se invece la formula scritta è applicata ad un campo gravitazionale, è necessario porre $\Lambda = -\frac{c^4}{16\pi k} G$, e la componenti g_{ik} del tensore metrico sono le grandezze $q^{(l)}$. Perciò il 4-impulso totale del campo e della materia è

$$P_i = \frac{1}{c}\int T_i^k \sqrt{-g}\, dS_k + \frac{c^3}{16\pi k}\int \left[G\sqrt{-g}\, \delta_i^k - \frac{\partial g^{lm}}{\partial x^i} \frac{\partial (G\sqrt{-g})}{\partial \dfrac{\partial g^{lm}}{\partial x^k}} \right] dS_k.$$

Utilizzando per G la (93,3), si può ridurre questa espressione alla forma

$$P_i = \frac{1}{c}\int \left\{ T_i^k \sqrt{-g} + \frac{c^4}{16\pi k} \left[G\sqrt{-g}\, \delta_i^k + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \Gamma^k_{lm} \frac{\partial (g^{lm}\sqrt{-g})}{\partial x^i} - \Gamma^l_{ml} \frac{\partial (g^{mk}\sqrt{-g})}{\partial x^i} \right] \right\} dS_k.$$

Il secondo termine tra parentesi graffe è il 4-impulso del campo gravitazionale in assenza di materia. L'espressione integranda non è simmetrica rispetto agli indici i e k, e di conseguenza, non permette di formulare la legge di conservazione del momento angolare.

§ 97. *Sistema di riferimento sincrono*

Come già sappiamo dal § 84, la condizione che permette di sincronizzare gli orologi in differenti punti dello spazio consiste nell'annullarsi delle componenti $g_{0\alpha}$ del tensore metrico. Se inoltre $g_{00} = 1$, la coordinata temporale $x^0 = t$ rappresenta il tempo proprio in ciascun punto dello spazio[1]) . Chiameremo *sincrono* un sistema di riferimento che soddisfa le condizioni

$$g_{00} = 1, \quad g_{0\alpha} = 0, \tag{97,1}$$

L'elemento d'intervallo in un tale sistema è dato dall'espressione

$$ds^2 = dt^2 - \gamma_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta, \tag{97,2}$$

dove le componenti del tensore della metrica spaziale coincidono (a meno del segno) con le componenti $g_{\alpha\beta}$:

$$\gamma_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta}. \tag{97,3}$$

Nel sistema di riferimento sincrono le linee di tempo sono le geodetiche dello spazio quadridimensionale. Infatti, il quadrivettore $u^i = dx^i/ds$, tangente alla linea d'universo x^1, x^2, x^3 = costante, ha per componenti $u^\alpha = 0$, $u^0 = 1$ e soddisfa automaticamente le equazioni delle geodetiche:

$$\frac{du^i}{ds} + \Gamma^i_{kl} u^k u^l = \Gamma^i_{00} = 0,$$

perché, in base alle condizioni (97,1), i simboli di Christoffel Γ^α_{00}, Γ^0_{00} sono identicamente nulli.

È facile vedere anche che queste linee sono normali alle ipersuperfici t = costante. Infatti, il quadrivettore normale ad una tale ipersuperficie $n_i = \partial t/\partial x^i$ ha per componenti covarianti $n_\alpha = 0$, $n_0 = 1$. Le componenti controvarianti, tenendo conto delle condizioni (97,1), sono rispettivamente $n^\alpha = 0$, $n^0 = 1$, cioè coincidono con le componenti del quadrivettore u^i, tangenti alle linee di tempo.

Viceversa, si può ricorrere a queste proprietà per la costruzione geometrica di un sistema di riferimento sincrono in ogni spazio-tempo. A questo scopo, scegliamo per superficie iniziale una ipersuperficie del denere spazio, cioè una ipersuperficie la cui normale in ogni punto abbia la direzione temporale (giaccia cioè all'interno del cono di luce con vertice in questo punto); tutti gli elementi d'intervallo su una tale ipersuperficie sono del genere spazio. Costruiamo quindi la famiglia di linee geodetiche normali a questa ipersuperficie. Assumendo ora queste linee geodetiche come linee coordinate del tempo, prendendo come la coordinata temporale t la lunghezza s della geodetica calcolata a partire dalla ipersuperficie iniziale, si ottiene un sistema di riferimento sincrono.

---

[1]) In questo paragrafo poniamo $c = 1$.

È chiaro che tale costruzione, e quindi la scelta di un sistema di riferimento sincrono, sono sempre possibili. Questa scelta non è ancora univoca. La metrica (97,2) ammette qualsiasi trasformazione delle coordinate spaziali che lasci invariato il tempo, cosa che corrisponde all'arbitrio nella scelta della ipersuperficie iniziale nella costruzione geometrica indicata.

Analiticamente, la trasformazione che permette di passare ad un sistema di riferimento sincrono può essere realizzata, in linea di principio, per mezzo dell'equazione di Hamilton-Jacobi. Questo metodo è basato sul fatto che le traiettorie di una particella in un campo gravitazionale sono esattamente linee geodetiche.

L'equazione di Hamilton-Jacobi per una particella (di massa uguale all'unità) in un campo gravitazionale si scrive

$$g^{ik} \frac{d\tau}{dx^i} \frac{d\tau}{dx^k} = 1 \tag{97,4}$$

(abbiamo indicato qui l'azione con τ). Il suo integrale totale ha la forma

$$\tau = f(\xi^\alpha, x^i) + A(\xi^\alpha), \tag{97,5}$$

dove f è una funzione delle quattro coordinate x^i e di tre parametri ξ^α; consideriamo la quarta costante A come una funzione arbitraria delle tre ξ^α. Da questa rappresentazione di τ si possono ottenere le equazioni della traiettoria della particella annullando le derivate $\partial\tau/\partial\xi^\alpha$, cioè

$$\frac{\partial f}{\partial \xi^\alpha} = -\frac{\partial A}{\partial \xi^\alpha}. \tag{97,6}$$

Per ogni insieme di valori dei parametri ξ^α, i secondi membri delle equazioni (97,6) hanno determinati valori costanti, e la linea d'universo definita da queste equazioni è una delle traiettorie possibili della particella. Prendendo per nuove coordinate spaziali le ξ^α, che restano costanti lungo le traiettorie, e per coordinata temporale τ, otteniamo il sistema di riferimento sincrono; le equazioni (97,5) e (97,6) determinano il passaggio cercato dalle vecchie coordinate alle nuove. In effetti, in una tale trasformazione, le linee del tempo diventano automaticamente geodetiche, ed esse risultano inoltre normali alle ipersuperfici $\tau =$ costante. Quest'ultima circostanza è evidente da una analogia meccanica: il quadrivettore $-\partial\tau/\partial x^i$, normale alla ipersuperficie, coincide in meccanica con il 4-impulso della particella, e la sua direzione coincide quindi con quella della sua 4-velocità u^i, cioè con il quadrivettore tangente alla traiettoria. Infine, la validitá della condizione $g_{00} = 1$ è evidente dal fatto che la derivata $-d\tau/ds$ dell'azione lungo la traiettoria è la massa della particella, che abbiamo supposta uguale all'unità; perciò $|d\tau/ds| = 1$.

Scriviamo le equazioni di Einstein nel sistema di riferimento sincrono, separando in esse le operazioni di derivazione spaziale da quelle di derivazione temporale.

Poniamo

$$\varkappa_{\alpha\beta} = \frac{\partial \gamma_{\alpha\beta}}{\partial t} \tag{97,7}$$

per le derivate rispetto al tempo del tensore metrico tridimensionale; queste grandezze costituiscono un tensore tridimensionale. Tutte le operazioni di spostamento degli indici nel tensore tridimensionale $\varkappa_{\alpha\beta}$ e le sue derivazioni covarianti verranno eseguite nello spazio tridimensionale di metrica $\gamma_{\alpha\beta}$[1]). Notiamo che la somma $\varkappa^{\alpha}_{\alpha}$ è la derivata logaritmica del determinante $\gamma \equiv |\gamma_{\alpha\beta}| = -g$:

$$\varkappa^{\alpha}_{\alpha} = \gamma^{\alpha\beta} \frac{\partial \gamma_{\alpha\beta}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \ln \gamma. \tag{97,8}$$

Per i simboli di Christoffel troviamo le espressioni:

$$\Gamma^{0}_{00} = \Gamma^{\alpha}_{00} = \Gamma^{0}_{0\alpha} = 0, \tag{97,9}$$

$$\Gamma^{0}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varkappa_{\alpha\beta}, \quad \Gamma^{\alpha}_{0\beta} = \frac{1}{2}\varkappa^{\alpha}_{\beta}, \quad \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \lambda^{\alpha}_{\beta\gamma},$$

dove $\lambda^{\alpha}_{\beta\gamma}$ sono i simboli di Christoffel tridimensionali dedotti dal tensore $\gamma_{\alpha\beta}$. I calcoli fatti secondo la formula (92,7) danno le seguenti espressioni per le componenti del tensore di Ricci R_{ik}:

$$\begin{gathered} R_{00} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\varkappa^{\alpha}_{\alpha} - \frac{1}{4}\varkappa^{\beta}_{\alpha}\varkappa^{\alpha}_{\beta}, \quad R_{0\alpha} = \frac{1}{2}(\varkappa^{\beta}_{\alpha;\,\beta} - \varkappa^{\beta}_{\beta;\,\alpha}), \\ R_{\alpha\beta} = P_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\varkappa_{\alpha\beta} + \frac{1}{4}(\varkappa_{\alpha\beta}\varkappa^{\gamma}_{\gamma} - 2\varkappa^{\gamma}_{\alpha}\varkappa_{\beta\gamma}). \end{gathered} \tag{97,10}$$

$P_{\alpha\beta}$ è qui il tensore tridimensionale di Ricci costruito mediante le $\gamma_{\alpha\beta}$, esattamente come R_{ik} è costruito con le g_{ik}; l'innalzameoto dei suoi indici sarà fatto in seguito mediantela metrica tridimensionale $\gamma_{\alpha\beta}$.

Scriviamo le equazioni di Einstein in componenti miste:

$$R^{0}_{0} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\varkappa^{\alpha}_{\alpha} - \frac{1}{4}\varkappa^{\beta}_{\alpha}\varkappa^{\alpha}_{\beta} = 8\pi k\left(T^{0}_{0} - \frac{1}{2}T\right), \tag{97,11}$$

$$R^{0}_{\alpha} = \frac{1}{2}(\varkappa^{\beta}_{\alpha;\,\beta} - \varkappa^{\beta}_{\beta;\,\alpha}) = 8\pi k T^{0}_{\alpha}, \tag{97,12}$$

$$R^{\beta}_{\alpha} = -P^{\beta}_{\alpha} - \frac{1}{2\sqrt{\gamma}}\frac{\partial}{\partial t}(\sqrt{\gamma}\,\varkappa^{\beta}_{\alpha}) = 8\pi k\left(T^{\beta}_{\alpha} - \frac{1}{2}\delta^{\beta}_{\alpha}T\right). \tag{97,13}$$

---

[1]) Ciò non riguarda, naturalmente, le operazioni di spostamento degli indici nelle componenti spaziali dei 4-tensori R_{ik}, T_{ik} (vedi la nota alla pag. 329). Cosí, T^{β}_{α} deve essere considerato sempre come $g^{\beta\gamma}T_{\gamma\alpha} + g^{\beta 0}T_{0\alpha}$, che nel nostro caso si riduce a $g^{\beta\gamma}\ T_{\gamma\alpha}$ e si distingue per il segno da $\gamma^{\beta\gamma}\ T_{\gamma\alpha}$.

La proprietà caratteristica dei sistemi di riferimento sincroni è che essi non sono stazionari: in un tale sistema il campo gravitazionale non può essere costante. Infatti, in un campo costante si avrebbe $\varkappa_{\alpha\beta} = 0$. Tra l'altro, in presenza della materia, l'annullamento di tutte le $\varkappa_{\alpha\beta}$ sarebbe comunque in contraddizione con l'equazione (97,11) (con il secondo membro differente da zero). In uno spazio vuoto, invece, partendo dalla (97,13) avremmo trovato che tutte le $P_{\alpha\beta}$ e, di conseguenza, tutte le componenti del tensore di curvatura tridimensionale $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ si annullano, cioè che il campo non esiste affatto (nel sistema sincrono con una metrica spaziale euclidea lo spazio-tempo è piatto).

Nello stesso tempo la materia che riempie lo spazio non può generalmente trovarsi in quiete rispetto ad un sistema di riferimento sincrono. Ciò è evidente dal fatto che le particelle di materia sottoposta all'azione delle forze di pressione non si muovono generalmente lungo le linee geodetiche d'universo; quanto alla linea d'universo di una particella in quiete, essa è la linea del tempo, geodetica nel sistema sincrono. Un'eccezione è fatta dal caso della materia « incoerente » ($p = 0$). Le particelle, non interagendo tra di loro, si muovono lungo le linee geodetiche d'universo; in questo caso la condizione di sincronismo del sistema di riferimento non è quindi in contraddizione con la proprietà di muoversi solidalmente con la materia[1]). Per altre equazioni di stato una situazione analoga può verificarsi soltanto in casi particolari, cioè quando in tutte o in alcune direzioni è assente il gradiente della pressione.

Dall'equazione (97,11) si può dedurre che il determinante $-g = \gamma$ del tensore metrico nel sistema di riferimento sincrono deve necessariamente annullarsi per un valore finito del temro t.

Notiamo a questo proposito che l'espressione del secondo membro di questa equazione è positiva per qualunque distribuzione di materia. Infatti, per il tensore energia-impulso (94,9) nel sistema di riferimento sincrono abbiamo:

$$T^0_0 - \frac{1}{2} T = \frac{1}{2} (\varepsilon + 3p) + \frac{(p+\varepsilon) v^2}{1 - v^2}$$

---

[1]) Anche in questo caso però, per poter scegliere un sistema di riferimento sinerono in moto solidale con la materia, è necessario ancora che la materia si muova « senza rotazioni ». Nel suddetto sistema di referimento le componenti controvarianti della 4-velocità sono $u^0 = 1$, $u^\alpha = 0$. Se inoltre il sistema è sincrono, anche le componenti covarianti sono $u_0 = 1$, $u_\alpha = 0$, e, di conseguenza, il suo 4-rotore è

$$u_{i;k} - u_{k;i} \equiv \frac{\partial u_i}{\partial x^k} - \frac{\partial u_k}{\partial x^i} = 0.$$

Ma questa uguaglianza tensoriale deve essere allora valida per qualsiasi altro sistema di riferimento. Di qui ricaviamo la condizione rot $\mathbf{v} = 0$ per la velocità tridimensionale $\mathbf{v}$ nel sistema sincrono.

(le componenti della 4-velocità sono ricavate dalla (88,14)); questa grandezza è evidentemente positiva. Lo stesso è valido anche per il tensore energia-impulso del campo elettromagnetico ($T = 0$, T_0^0 è la densità positiva di energia del campo). Dalla (97,11) ricaviamo quindi:

$$-R_0^0 = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\varkappa_\alpha^\alpha + \frac{1}{4}\varkappa_\alpha^\beta\varkappa_\beta^\alpha \leqslant 0 \tag{97,14}$$

(il segno d'uguaglianza si ha nello spazio vuoto).

Partendo dalla disuguaglianza algebrica[1])

$$\varkappa_\beta^\alpha\varkappa_\alpha^\beta \geqslant \frac{1}{3}(\varkappa_\alpha^\alpha)^2$$

si può scrivere la (97,14) nella forma

$$\frac{\partial}{\partial t}\varkappa_\alpha^\alpha + \frac{1}{6}(\varkappa_\alpha^\alpha)^2 \leqslant 0$$

da cui

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\varkappa_\alpha^\alpha} \geqslant \frac{1}{6}. \tag{97,15}$$

Supponiamo, ad esempio, che in un certo istante si abbia $\varkappa_\alpha^\alpha > 0$. Allora, al decrescere di t la grandezza $1/\varkappa_\alpha^\alpha$ decresce, avendo sempre la derivata finita (non nulla); ne segue che essa deve annullarsi partendo da valori positivi) dopo un tempo finito. In altri termini, $\varkappa_\alpha^\alpha$ si riduce a $+\infty$, e poiché $\varkappa_\alpha^\alpha = \partial \ln \gamma/\partial t$, ciò significa che il determinante γ si annulla (ma, come ciò risulta dalla disuguaglianza (97,15), non piú rapidamente di t^6). Se invece si ha $\varkappa_\alpha^\alpha < 0$ in un istante iniziale, si otliene lo stesso risultato considerando tempi t crescenti.

Tuttavia, questo risultato non dimostra affatto che sia presente inevitabilmente una vera singolarità fisica nella metrica. Una singolarità fisica è soltanto quella, di cui è dotato lo spazio-tempo come tale, non legata al carattere del sistema di riferimento scelto (la singolarità deve essere caratterizzata dal fatto che le grandezze scalari: densità di materia, invarianti del tensore di curvatura, diventano infiniti). Quanto alla singolarità del sistema di riferimento sincrono, risulta che in realtà essa è fittizia e può essere eliminata passando ad un altro sistema di riferimento (non sincrono). La sua origine è evidente da semplici considerazioni geometriche.

Abbiamo visto prima che la costruzione di un sistema sincrono si riduce alla costruzione di una famiglia di linee geodetiche, ortogonali ad una ipersuperficie del genere spazio. Le geodetiche di una

---

[1]) È facile verificare questa disuguaglianza riducendo il tensore $\varkappa_\alpha^\beta$ (ad ogni istante) alla forma diagonale.

famiglia arbitraria si intersecano generalmente tra loro sulle ipersuperfici inviluppo, cioè sugli analoghi quadridimensionali delle superfici caustiche dell'ottica geometrica. È l'intersezione delle linee coordinate che fa apparire una singolarità nella metrica in un sistema di coordinate dato. Si ha quindi una ragione geometrica perché compaia una singolarità legata alle proprietà specifiche del sistema sincrono e che quindi non ha un significato fisico. Una metrica arbitraria dello spazio quadridimensionale ammette, in generale, l'esistenza di famiglie di linee geodetiche del genere tempo non intersecantisi tra loro. L'annullarsi del determinante γ nel sistema sincrono significa che le proprietà di curvatura dello spazio-tempo reale (non piatto), ammesse dalle equazioni del campo ed espresse dalla disuguaglianza $R_0^0 \geqslant 0$, escludono la possibilità che esistano tali famiglie, nonostante le linee del tempo si intersechino necessariamente tra loro in qualsiasi sistema di riferimento sincrono[1]).

Come abbiamo già indicato prima, il sistema di riferimento sincrono può nello stesso tempo essere in moto solidale con la materia incoerente. In questo caso, la densità della materia diventerà infinita sulla caustica come conseguenza dell'intersezione delle traiettorie d'universo delle particelle, che coincidono con le linee del tempo. È chiaro, però, che questa singoolarità della densità verrà eliminata con l'introduzione di una pressione della materia arbitrariamente piccola ma differente da zero, e perciò questa singolarità non ha un significato fisico.

PROBLEMI

1. Trovare la forma dello sviluppo delle equazioni del campo gravitazionale nel vuoto in prossimità di un punto non singolare, regolare rispetto al tempo.

---

[1]) Per la costruzione analitica della metrica in prossimità di singolarità fittizia nel sistema di riferimento sincrono vedi *E. M. Lifšic, V. V. Sudakov, I. M. Khalatnikov*, JETF 40, 1847 (1961). Il carattere generale della metrica è evidente da considerazioni geometriche. Poichè l'ipersuperficie caustica contiene gli intervalli del genere tempo (elementi di lunghezza delle geodetiche del tempo nei punti di contatto con la caustica), essa non è del genere spazio. Inoltre, sulla caustica si annulla uno dei valori principali del tensore metrico $\gamma_{\alpha\beta}$ per il fatto che si annulla la distanza (δ) tra due geodetiche vicine intersecantisi nel punto di contatto con la caustica. L'annullarsi di δ è proporzionale alla distanza (l) dal punto d'intersezione. Di conseguenza, il valore principale del tensore metrico ed anche il determinante γ, si annullano come l^2.

Il sistema sincrono può anche essere costruito in modo tale che le linee del tempo si intersechino su una varietà avente un minore numero di dimensioni della ipersuperficie, cioè su una superficie bidimensionale, che si chiama superficie focale di una corrispondente famiglia di geodetiche. La costruzione analitica di una tale metrica è stata dimostrata da *V. A. Belinski, I. M. Khalatnikov*, JETF 49, 1000 (1965).

Soluzione. Prendendo convenzionalmente il punto temporale in questione per origine dei tempi, cercheremo $\gamma_{\alpha\beta}$ sotto forma

$$\gamma_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} + t b_{\alpha\beta} + t^2 c_{\alpha\beta} + \dots, \tag{1}$$

dove $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$, $c_{\alpha\beta}$ sono funzioni delle coordinate spaziali. Il tensore inverso, nella stessa approssimazione, è

$$\gamma^{\alpha\beta} = a^{\alpha\beta} - t b^{\alpha\beta} + t^2 (b^{\alpha\gamma} b^{\beta}_{\gamma} - c^{\alpha\beta}),$$

dove $a^{\alpha\beta}$ è il tensore inverso di $a_{\alpha\beta}$ e dove l'innalzamento degli indici negli altri tensori è fatto mediante $a^{\alpha\beta}$. Abbiamo quindi:

$$\varkappa_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta} + 2t c_{\alpha\beta}, \qquad \varkappa^{\beta}_{\alpha} = b^{\beta}_{\alpha} + t (2c^{\beta}_{\alpha} - b_{\alpha\gamma} b^{\beta\gamma}).$$

Le equazioni di Einstein (97,11), (97,12) e (97,13) ci danno le seguenti relazioni

$$R^0_0 = -c + \frac{1}{4} b^{\beta}_{\alpha} b^{\alpha}_{\beta} = 0, \tag{2}$$

$$R^0_{\alpha} = \frac{1}{2} (b^{\beta}_{\alpha;\,\beta} - b_{;\,\alpha}) +$$

$$+ t \left[-c_{;\,\alpha} + \frac{3}{8} (b^{\gamma}_{\beta} b^{\beta}_{\gamma})_{;\,\alpha} + c^{\beta}_{\alpha;\,\beta} + \frac{1}{4} b^{\beta}_{\alpha} b_{;\,\beta} - \frac{1}{2} (b^{\gamma}_{\alpha} b^{\beta}_{\gamma})_{;\,\beta} \right] = 0, \tag{3}$$

$$R^{\beta}_{\alpha} = -P^{\beta}_{\alpha} - \frac{1}{4} b^{\beta}_{\alpha} b + \frac{1}{2} b^{\gamma}_{\alpha} b^{\beta}_{\gamma} - c^{\beta}_{\alpha} = 0 \tag{4}$$

($b \equiv b^{\alpha}_{\alpha}$, $c \equiv c^{\alpha}_{\alpha}$). Le derivazioni covarianti si fanno qui nello spazio tridimensionale di metrica $a_{\alpha\beta}$; la stessa metrica determina il tensore $P_{\alpha\beta}$.

Tenendo conto della (4), i coefficienti $c_{\alpha\beta}$ sono determinati completamente in funzione dei coefficienti $a_{\alpha\beta}$ e $b_{\alpha\beta}$. La (2) ci dà quindi la relazione

$$P + \frac{1}{4} b^2 - \frac{1}{4} b^{\beta}_{\alpha} b^{\alpha}_{\beta} = 0. \tag{5}$$

Dai termini di ordine zero nella (3) ricaviamo:

$$b^{\beta}_{\alpha;\,\beta} = b_{;\,\alpha}. \tag{6}$$

Per quanto concerne i termini $\sim t$ in questa equazione, essi si annullano identicamente utilizzando le (5) e (6) [e la identità $P^{\beta}_{\alpha;\,\beta} = \frac{1}{2} P_{;\,\alpha}$; cfr. la (92,10)].

Cosí, le 12 grandezze $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$ sono legate tra di loro da una relazione (5) e da tre relazioni (6), in modo che restano otto funzioni arbitrarie delle tre coordinate spaziali. Tre di queste funzioni sono legate alla possibilità di trasformazioni arbitrarie delle tre coordinate spaziali, e una alla scelta arbitraria della ipersuperficie iniziale nella costruzione del sistema di riferimento sincrono. Restano, come era logico, (vedi la fine del § 95), quattro funzioni arbitrarie « fisicamente rilevanti ».

2. Calcolare le componenti del tensore di curvatura R_{iklm} in un sistema di riferimento sincrono.

Soluzione. Con l'aiuto dei simboli di Christoffel (97,9) otteniamo secondo la formula (92,1):

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -P_{\alpha\beta\gamma\delta} + \frac{1}{4} (\varkappa_{\alpha\delta}\varkappa_{\beta\gamma} - \varkappa_{\alpha\gamma}\varkappa_{\beta\delta}),$$

$$R_{0\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2} (\varkappa_{\alpha\gamma;\,\beta} - \varkappa_{\alpha\beta;\,\gamma}),$$

$$R_{0\alpha0\beta} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \varkappa_{\alpha\beta} - \frac{1}{4} \varkappa_{\alpha\gamma}\varkappa^{\gamma}_{\beta},$$

dove $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ è il tensore di curvatura tridimensionale corrispondente alla metrica tridimensionale spaziale $\gamma_{\alpha\beta}$.

3. Trovare la forma generale di una trasformazione infinitesima che non modifichi il carattere sincrono di un riferimento.

Soluzione. La trasformazione si scrive

$$t \to t + \varphi\,(x^1, x^2, x^3),\ x^\alpha \to x^\alpha + \xi^\alpha\,(x^1, x^2, x^3, t),$$

dove φ, ξ^α sono grandezze piccole. La validità della condizione $g_{00} = 1$ è assicurata dall'indipendenza di φ da t, mentre per la validità della condizione $g_{0\alpha} = 0$ debbono essere soddisfatte le equazioni

$$\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial\xi^\beta}{\partial t} = \frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha},$$

donde

$$\xi^\alpha = \frac{\partial\varphi}{\partial x^\beta}\int \gamma^{\alpha\beta}\,dt + f^\alpha\,(x^1\ x^2, x^3), \tag{1}$$

dove f^α sono pure grandezze piccole (che costituiscono il vettore tridimensionale $\mathbf{f}$). Il tensore metrico spaziale $\gamma_{\alpha\beta}$ si trasforma secondo le formule:

$$\gamma_{\alpha\beta} \to \gamma_{\alpha\beta} + \xi_{\alpha;\beta} + \xi_{\beta;\alpha} - \varphi\varkappa_{\alpha\beta} \tag{2}$$

[è facile verificarlo partendo dalla formula (94,3)].

Come c'era da aspettarsi, la trasformazione contiene quattro funzioni arbitrarie (piccole) delle coordinate spaziali φ, f^α.

§ 98. *Rappresentazione quaternaria delle equazioni di Einstein*

La determinazione delle componenti del tensore di Ricci (e quindi la deduzione delle equazioni di Einstein) per una metrica di tipo speciale richiede in generale calcoli assai laboriosi. Per questo assumono importanza vari accorgimenti che permettono in certi casi di semplificare i calcoli e di rappresentarne il risultato in forma piú chiara. Uno di questi accorgimendi è l'espressione *quaternaria* del tensore di curvatura.

Introduciamo l'insieme di quattro quadrivettori *di riferimento* linearmente indipendenti $e^i_{(a)}$ (numerati con l'indice a) e subordinati alla sola condizione

$$e^i_{(a)}e_{(b)i} = \eta_{ab}, \tag{98,1}$$

dove η_{ab} è una matrice simmetrica costante data di segnatura $+---$; indichiamo la matrice inversa di η_{ab} con η^{ab} ($\eta^{ac}\eta_{cb} = \delta^a_b$)[1].

[1]) In questo paragrafo le prime lettere dell'alfabeto a, b, c . . . verranno usate come indici che enumerano i vettori di riferimento; per gli indici tensoriali quadridimensionali verranno usate, come sempre, le lettere i, k, l, . . . Nei testi scientifici si usa scrivere gli indici di riferimento con lettere (o cifre) comprese tra parentesi. Per non appesantire eccessivamente le formule, scriveremo le parentesi soltanto laddove gli indici di riferimento sono presenti contem-

Introduciamo, insieme con la *quaterna* dei vettori $e^i_{(a)}$, la quaterna dei vettori *reciproci* $e^{(a)i}$ (enumerati con gli indici di riferimento superiori) che sono determinati dalle condizioni

$$e^{(a)}_i e^i_{(b)} = \delta^a_b, \tag{98,2}$$

cioè ciascuno dei vettori $e^{(a)}_i$ è ortogonale ai tre vettori $e^i_{(b)}$ se $b \neq a$. Moltiplicando l'uguaglianza (98,2) per $e^k_{(a)}$, otteniamo $(e^k_{(a)}\, e^{(a)}_i) \times \times e^i_{(b)} = e^k_{(b)}$; ne risulta che sono automaticamente soddisfatte, con le (98,2), anche le uguaglianze

$$e^{(a)}_i e^k_{(a)} = \delta^k_i. \tag{98,3}$$

Moltiplicando i due membri dell'uguaglianza $e^i_{(a)} e_{(c)i} = \eta_{ac}$ per η^{bc}, otteniamo:

$$e^i_{(a)} (\eta^{bc} e_{(c)i}) = \delta^b_a;$$

confrontando con la (98,2), troviamo che

$$e^{(b)}_i = \eta^{bc} e_{(c)i}, \quad e_{(b)i} = \eta_{bc} e^{(c)}_i. \tag{98,4}$$

In tal modo, l'imalzamento e l'abbassamento degli indici di riferimento viene effettuato con le matrici η^{bc} e η_{bc}.

l'utilitá dei vettori di riferimento cosí introdotti è nel fatto che essi permettono di esprimere il tensore metrico. Infatti, secondo la definizione del legame tra le componenti covarianti e controvarianti di un quadrivettore, si ha $e^{(a)}_i = g_{il} e^{(a)l}$; moltiplicando questa uguaglianza per $e_{(a)k}$ ed utilizzando le (98,3) e (98,4), troviamo:

$$g_{ik} = e_{(a)i} e^{(a)}_k = \eta_{ab} e^{(a)}_i e^{(b)}_k. \tag{98,5}$$

Il quadrato dell'elemento di intervallo con il tensore metrico (98,5) assume la forma

$$ds^2 = \eta_{ab} (e^{(a)}_i\, dx^i)\, (e^{(b)}_k\, dx^k). \tag{98,6}$$

Quanto alla matrice η_{ab} data arbitrariamente, la sua scelta piú naturale è nella forma « galileiana » (cioè una matrice diagonale di elementi 1, —1, —1, —1); i vettori di riferimento sono ortogonali in base alla (98,1)]; uno di essi è del genere tempo, gli altri tre sono del genere spazio[1]). Sottolineiamo però che una tale

---

poraneamente agli indici tensoriali quadridimensionali, e li ometteremo nelle grandezze che per definizione hanno solamente gli indici di riferimento (per esempio, η_{ab} e piú avanti γ_{abc}, λ_{abc}). Si sottintende ovunque la sommatoria sugli indici di riferimento (come anche su quelli tensoriali) ripetuti due volte.

[1]) Scegliendo le forme lineari $dx^{(a)} = e^{(a)}_i dx^i$ per segmenti degli assi coordinati nell'elemento dato dello spazio quadridimensionale (e prendendo le η_{ab} « galileiane »), riduciamo quindi la metrica in questo elemento alla forma galileiana. Sottolineiamo ancora una volta che le forme $dx^{(a)}$ non sono, in generale. differenziali totali di funzioni delle coordinate.

scelta non è affatto necassaria e che sono possibili delle situazioni in cui, per alcune ragioni (per esempio, per proprietà di simmetria della metrica), è opportuno scegliere una quaterna non ortogonale[1]).

Le componenti quaternarie del quadrivettore A^i (ed analogamente dei 4-tensori di qualsiasi rango) sono determinate come le sue « proiezioni » sui quadrivettori di riferimento:

$$A_{(a)} = e^i_{(a)} A_i, \quad A^{(a)} = e^{(a)}_i A^i = \eta^{ab} A_{(b)}. \tag{98,7}$$

viceversa:

$$A_i = e^{(a)}_i A_{(a)}, \quad A^i = e^i_{(a)} A^{(a)}. \tag{98,8}$$

Introduciamo allo stesso modo l'operazione di derivazione « lungo la direzione a »:

$$\varphi_{,(a)} = e^i_{(a)} \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}.$$

Introduciamo le grandezze di cui avremo bisogno in seguito[2])

$$\gamma_{acb} = e_{(a)i;\,k} e^i_{(b)} e^k_{(c)} \tag{98,9}$$

e le loro combinazioni lineari

$$\lambda_{abc} = \gamma_{abc} - \gamma_{acb} =$$
$$= (e_{(a)i;\,k} - e_{(a)k;\,i})\, e^i_{(b)} e^k_{(c)} = (e_{(a)i,\,k} - e_{(a)k,\,i})\, e^i_{(b)} e^k_{(c)}. \tag{98,10}$$

L'ultima uguaglianza nella (98,10) deriva dalla (86,12); notiamo che le grandezze λ_{abc} si calcolano con una semplice derivazione dei vettori di riferimento. L'espressione inversa γ_{abc} in funzione di λ_{abc} è:

$$\gamma_{abc} = \frac{1}{2} (\lambda_{abc} + \lambda_{bca} - \lambda_{cab}). \tag{98,11}$$

Queste grandezze sono dotate della proprietà di simmetria:

$$\gamma_{abc} = -\gamma_{bac}, \quad \lambda_{abc} = -\lambda_{acb}. \tag{98,12}$$

Il nostro compito è di determinare le componenti quadridimensionali del tensore di curvatura. A questo scopo bisogna partire dalla definizione (91,6) applicata alle derivate covarianti dei vettori di riferimento:

$$e_{(a)i;\,k;\,l} - e_{(a)i;\,l;\,k} = e^m_{(a)} R_{mikl}$$

---

[1]) La scelta opportuna della quaterna può essere suggerita dalla riduzione preliminare di ds^2 alla forma (98,6). Così, all'espressione di ds^2 nella forma (88,13) corrispondono i vettori di riferimento

$$e^{(0)}_i = (\sqrt{h}, -\sqrt{h}\,\mathbf{g}), \quad e^{(a)}_i = (0, \mathbf{e}^{(a)}),$$

dove la scelta di $\mathbf{e}^{(a)}$ dipende dalla forma spaziale dl^2.

[2]) Le grandezze γ_{abc} sono dette *coefficienti di rotazione di Ricci*.

oppure

$$R_{(a)(b)(c)(d)} = \left(e_{(a)i;\,k;\,l} - e_{(a)i;\,l;\,k}\right) e^{i}_{(b)} e^{k}_{(c)} e^{l}_{(d)}.$$

Questa espressione si scrive facilmente mediante le grandezze γ_{abc}. Scriviamo

$$e_{(a)i;\,k} = \gamma_{abc} e^{(b)}_{i} e^{(c)}_{k},$$

e dopo la successiva derivazione covariante le derivate dei vettori di riferimento si esprimono di nuovo nello stesso modo; inoltre, la derivata covariante della grandezza scalare γ_{abc} coincide con la sua derivata ordinaria[1]). Si ottiene infine:

$$R_{(a)(b)(c)(d)} = \gamma_{abc,\,d} - \gamma_{abd,\,c} + \\ + \gamma_{abf}\left(\gamma^{f}{}_{cd} - \gamma^{f}{}_{dc}\right) + \gamma_{afc}\gamma^{f}{}_{bd} - \gamma_{afd}\gamma^{f}{}_{bc}, \qquad (98,13)$$

dove, in base alla regola generale, si ha $\gamma^{a}{}_{bc} = \eta^{ad}\gamma_{dbc}$ ecc.

La contrazione in questo tensore di coppia di indici a, c dà le componenti quaternarie cercate del tensore di Ricci; scriviamole espresse in funzione delle grandezze λ_{abc}:

$$R_{(a)(b)} = -\frac{1}{2}\Big(\lambda_{ab,}{}^{c}{}_{c} + \lambda_{ba}{}^{c}{}_{,\,c} + \lambda^{c}{}_{ca,\,b} + \lambda^{c}{}_{cb,\,a} + \\ + \lambda^{cd}{}_{b}\lambda_{cda} + \lambda^{cd}{}_{b}\lambda_{dca} - \frac{1}{2}\lambda_{b}{}^{cd}\lambda_{acd} + \lambda^{c}{}_{cd}\lambda_{ab}{}^{d} + \lambda^{c}{}_{cd}\lambda_{ba}{}^{d}\Big). \qquad (98,14)$$

Infine, notiamo che le costruzioni esposte non sono di fatto legate in alcun modo al carattere quadridimensionale della metrica. Per questo i risultati ottenuti si possono applicare anche al calcolo dei tensori tridimensionali di Riemann e di Ricci nella metrica a tre dimensioni. È naturale allora che in luogo della quaterna dei quadrivettori di riferimento avremo una terna di vettori tridimensionali, e la matrice η_{ab} dovrà avere la segnatura $+++$ (incontreremo una tale applicazione nel § 116).

---

[1]) A titolo d'informazione riportiamo le espressioni, trasformate in modo analogo, delle derivate covarianti di 4-vettori e 4-tensori arbitrari:

$$A_{i;\,k} e^{i}_{(a)} e^{k}_{(b)} = A_{(a),\,(b)} + A^{(d)}\gamma_{dab},$$

$$A_{ik;\,l} e^{i}_{(a)} e^{k}_{(b)} e^{l}_{(c)} = A_{(a),\,(b),\,(c)} + A_{(b)}{}^{(d)}\gamma_{dac} + A_{(a)}{}^{(d)}\gamma_{dbc}, \text{ ecc.}$$

Capitolo XII

CAMPO DEI GRAVI

§ 99. *Legge di Newton*

Eseguiamo nelle equazioni di Einstein il passaggio al limite della meccanica non relativistica. Come è stato indicato nel § 87, la ipotesi che le velocità di tutte le particelle siano piccole esige nello stesso tempo che il campo gravitazionale stesso sia debole.

L'espressione della componente g_{00} del tensore metrico (l'unica di cui avremo bisogno) nel caso limite considerato è stata trovata nel § 87:

$$g_{00} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2}$$

Possiamo inoltre, utilizzare per le componenti del tensore energia-impulso l'espressione (35,4) $T_i^k = \mu c^2 u_i u^k$, dove μ è la densità di massa del corpo (la somma delle masse a riposo delle particelle nell'unità di volume; per brevità, omettiamo l'indice zero di μ). Nella quadrivelocità u^i si devono trascurare tutte le componenti spaziali, lasciando soltanto quella temporale, poiché anche il moto macroscopico è supposto, naturalmente, lento. In altri termini, dobbiamo porre $u^\alpha = 0$, $u^0 = u_0 = 1$. Di tutte le componenti di T_i^k resta quindi

$$T_0^0 = \mu c^2. \tag{99,1}$$

Lo scalare $T = T_i^i$ sarà uguale alla stessa grandezza μc^2.

Scriviamo le equazioni di Einstein nella forma (95,8):

$$R_i^k = \frac{8\pi k}{c^4}\left(T_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k T\right);$$

per $i = k = 0$ abbiamo:

$$R_0^0 = \frac{4\pi k}{c^2}\mu.$$

Come è facile vedere, tutte le altre equazioni nell'approssimazione considerata sono delle identitá.

Calcolando R_0^0 secondo la formula generale (92,7), si vede che i termini contenenti i prodotti delle grandezze Γ_{kl}^i sono comunque infinitesimi del secondo ordine. Per quanto riguarda i termini contenenti le derivate rispetto ad $x^0 = ct$, essi sono piccoli (rispetto ai

termini contenenti le derivate rispetto alle coordinate x^α), perché contengono potenze ulteriori di $1/c$. Resta in definitiva $R_0^0 = R_{00} = \partial \Gamma_{00}^\alpha / \partial x^\alpha$. Sostituendo

$$\Gamma_{00}^\alpha \approx -\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha},$$

troviamo:

$$R_0^0 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^{\alpha 2}} \equiv \frac{1}{c^2} \Delta\varphi.$$

Cosicché le equazioni di Einstein danno:

$$\Delta\varphi = 4\pi k\mu. \tag{99,2}$$

Questa è l'equazione del campo gravitazionale in meccanica non relativistica. Per la sua forma, essa è completamente analoga all'equazione di Poisson (36,4) per il potenziale elettrico, con la differenza che in luogo della densità di carica c'è ora il prodotto di $-k$ per densità di massa. Possiamo dunque scrivere la soluzione generale dell'equazione (99,2), per analogia con la (36,8), nella forma

$$\varphi = -k \int \frac{\mu\, dV}{R}. \tag{99,3}$$

Questa formula determina, nell'approssimazione non relativistica, il potenziale del campo gravitazionale di qualsiasi distribuzione di massa.

In particolare, per il potenziale del campo di una particella di massa m si ha:

$$\varphi = -\frac{km}{R}, \tag{99,4}$$

e, di conseguenza, la forza $F = -m' \frac{\partial \varphi}{\partial R}$, agente in questo campo su un'altra particella (di massa m') è

$$F = -\frac{kmm'}{R^2}. \tag{99,5}$$

Questa è la nota *legge d'attrazione di Newton.*

L'energia potenziale di una particella in un campo gravitazionale è uguale al prodotto della sua massa per il potenziale del campo, analogamente a come l'energia potenziale in un campo elettrico è uguale al prodotto della carica per il potenziale di questo campo. Per analogia con la (37,1), l'energia potenziale di qualsiasi distribuzione di massa avrà l'espressione

$$U = \frac{1}{2} \int \mu\varphi\, dV. \tag{99,6}$$

Per il potenziale newtoniano di un campo gravitazionale costante, distante dalle masse che creano questo campo, si può scrivere uno

sviluppo in serie analogo a quello che è stato ottenuto nei §§ 40 e 41 per il campo elettrostatico. Prendendo il centro di massa dei gravi come origine delle coordinate, l'integrale $\int \mu \mathbf{r}\, dV$, analogo del momento di dipolo di un sistema di cariche, si annulla identicamente. Cosicché, a differenza del campo elettrico, nel campo gravitazionale si può sempre eliminare il « termine di dipolo ». Di conseguenza, lo sviluppo del potenziale φ ha la forma

$$\varphi = -k\left(\frac{M}{R_0} + \frac{1}{6} D_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \frac{1}{R_0} + \dots\right), \tag{99,7}$$

dove $M = \int \mu\, dV$ è la massa totale del sistema e dove le grandezze

$$D_{\alpha\beta} = \int \mu\,(3x_\alpha x_\beta - r^2\delta_{\alpha\beta})\, dV \tag{99,8}$$

si possono chiamare il *tensore momento del quadrupolo* delle masse[1]). Esse sono legate al tensore ordinario dei momenti d'inerzia

$$J_{\alpha\beta} = \int \mu\,(r^2\delta_{\alpha\beta} - x_\alpha x_\beta)\, dV$$

dalle relazioni evidenti

$$D_{\alpha\beta} = J_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta} - 3J_{\alpha\beta}. \tag{99,9}$$

La determinazione del potenziale newtoniano per una distribuzione di massa data costituisce l'oggetto di una parte intera della fisica matematica; l'esposizione dettagliata di questo argomento esula dal tema del presente volume. Ci limiteremo a riportare qui soltanto le formule del potenziale del campo gravitazionale creato da un corpo ellissoidale omogeneo.

Supponendo che l'ellissoide sia dato dall'equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad a > b > c, \tag{99,10}$$

il potenziale del campo in un punto arbitrario x, y, z fuori dal corpo è dato dalla seguente formula

$$\varphi = -\pi\mu abck \int_\xi^\infty \left(1 - \frac{x^2}{a^2+s} - \frac{y^2}{b^2+s} - \frac{z^2}{c^2+s}\right) \frac{ds}{R_s}, \tag{99,11}$$

$$R_s = \sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}$$

dove ξ è la radice positiva dell'equazione

$$\frac{x^2}{a^2+\xi} + \frac{y^2}{b^2+\xi} + \frac{z^2}{c^2+\xi} = 1. \tag{99,12}$$

[1]) Scriviamo qui tutti gli indici α, β in basso, senza fare una distinzione tra le componenti covarianti e controvarianti, poiché si suppone che tutte le operazioni siano eseguite nello spazio newtoniano (euclideo) ordinario.

Il potenziale del campo all'interno dell'ellissoide è dato dalla formula

$$\varphi = -\pi\mu abck \int_0^\infty \left(1 - \frac{x^2}{a^2+s} - \frac{y^2}{b^2+s} - \frac{z^2}{c^2+s}\right) \frac{ds}{R_s}, \qquad (99,13)$$

che si distingue dalla (99,11) per il fatto che il limite inferiore è nullo; notiamo che questa espressione è una funzione quadratica delle coordinate x, y, z.

L'energia gravitazionale del corpo, conformemente alla (99,6), si ottiene integrando l'espressione (99,13) nel volume dell'ellissoide. Questa integrazione è elementare[1]) e dà:

$$U = \frac{3km^2}{8} \int_0^\infty \left[\frac{1}{5}\left(\frac{a^2}{a^2+s} + \frac{b^2}{b^2+s} + \frac{c^2}{c^2+s}\right) - 1\right] \frac{ds}{R_s} =$$

$$= \frac{3km^2}{8} \int_0^\infty \left[\frac{2}{5} s d\left(\frac{1}{R_s}\right) - \frac{2}{5}\frac{ds}{R_s}\right]$$

$\left(m = \frac{4\pi}{3} abc\mu\right.$ è la massa totale del corpo$\left.\right)$; integrando per parti il primo termine, si ottiene infine:

$$U = -\frac{3km^2}{10} \int_0^\infty \frac{ds}{R_s}. \qquad (99,14)$$

Tutti gli integrali che entrano nelle formule dalla (99,11) alla (99,14) si riducono ad integrali ellittici di prima e di seconda specie. Per gli ellissoidi di rotazione, questi integrali si esprimono mediante funzioni elementari. In particolare, l'energia gravitazionale di un ellissoide di rotazione schiacciato ($a = b > c$) è:

$$U = -\frac{3km^2}{5\sqrt{a^2-c^2}} \arccos\frac{c}{a}, \qquad (99,15)$$

e per un ellissoide di rotazione allungato ($a > b = c$) si ha:

$$U = -\frac{3km^2}{5\sqrt{a^2-c^2}} \operatorname{Arch}\frac{a}{c}. \qquad (99,16)$$

Per la sfera ($a = c$) ambedue le formule danno il valore $U = -3\,km^2/5a$ che può essere naturalmente ottenuto in modo elementare[2]).

[1]) L'integrazione dei quadrati x^2, y^2, z^2 si semplifica facendo la sostituzione $x = ax'$, $y = by'$, $z = cz'$ che riduce l'integrazione nell'ellissoide ad una integrazione in una sfera di raggio unitario.

[2]) Per il potenziale di una sfera omogenea di raggio a si ha:

$$\varphi = -2\pi k\mu\left(a^2 - \frac{r^2}{3}\right).$$

PROBLEMA

Determinare la configurazione d'equilibrio di una massa grave omogenea di liquido rotante uniformemente come un unico insieme.

Soluzione. La condizione d'equilibrio si ottiene imponendo che sulla superficie del corpo la somma del potenziale gravitazionale e del potenziale delle forze centrifughe sia costante:

$$\varphi - \frac{\Omega^2}{2}(x^2+y^2) = \text{costante}$$

(Ω è la velocità angolare di rotazione; l'asse di rotazione è diretto lungo l'asse delle z). La forma cercata rappresenta un ellissoide di rotazione schiacciato. Per determinare i parametri, sostituiamo la (99,13) nella condizione d'equilibrio ed eliminiamo z^2 con l'aiuto della equazione (99,10): si ottiene alla fine

$$(x^2+y^2)\left[\int_0^\infty \frac{ds}{(a^2+s)^2\sqrt{c^2+s}} - \frac{\Omega^2}{2\pi\mu k a^2 c} - \frac{c^2}{a^2}\int_0^\infty \frac{ds}{(a^2+s)(c^2+s)^{3/2}}\right] = \text{costane}$$

da cui risulta che l'espressione tra le parentesi quadre deve esser nulla. Integrando si ottiene infine l'equazione:

$$\frac{(a^2+2c^2)c}{(a^2-c^2)^{3/2}}\arccos\frac{c}{a} - \frac{3c^2}{a^2-c^2} = \frac{\Omega^2}{2\pi k\mu} = \frac{25}{6}\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3}\frac{M^2\mu^{1/3}}{m^{10/3}k}\left(\frac{c}{a}\right)^{4/3}$$

($M = \frac{2}{5}ma^2\Omega$ è il momento angolare del corpo rispetto all'asse delle z), che determina il rapporto dei semiassi c/a quando è data M o Ω. La dipendenza del rapporto c/a da M è univoca; c/a decresce in modo monotono al crescere di M.

Risulta però, che la forma simmetrica trovata è stabile (rispetto a piccole perturbazioni) solamente per i valori di M non troppo grandi. Essa perde la stabilità per $M = 0{,}24\ k^{1/2}m^{5/3}\mu^{-1/6}$ (allora $c/a = 0{,}58$). Quando M continua a crescere, la figura d'equilibrio diventa allora un ellissoide a tre assi con i rapporti b/a e c/a decrescenti progressivamente (rispettivamente da 1 e da 0,58). A sua volta, questa forma diventa instabile per $M = 0{,}31\ k^{1/2}m^{5/3}\mu^{-1/6}$ (con $a : b : c = 1 : 0{,}43 : 0{,}34$)[1]).

§ 100. *Campo gravitazionale a simmetria centrale*

Consideriamo un campo gravitazionale dotato di simmetria centrale. Un tale campo può essere generato da una qualsiasi distribuzione a simmetria centrale della massa; è naturalmente sottinteso che deve essere a simmetria centrale non soltanto la distribuzione, ma anche il moto della materia, cioè la velocità in ogni punto deve essere radiale.

La simmetria centrale del campo significa che la metrica dello spazio-tempo, cioè l'espressione dell'intervallo ds, deve essere identica in tutti i punti equidistanti dal centro. In uno

---

[1]) Si possono trovare note bibliografiche su questi problemi nel libro: H. Lamb, *Idrodinamica*, cap. XII.

spazio euclideo questa distanza è uguale al raggio vettore; ma in uno spazio non euclideo, come è lo spazio in presenza di un campo gravitazionale, non esiste una grandezza che abbia tutte le proprietà del raggio vettore euclideo (simultaneamente uguale alla distanza dal centro e al quoziente per 2π della lunghezza della circonferenza). Per questo la scelta del « raggio vettore » è ora arbitraria.

Se si ricorre a coordinate spaziali « sferiche » r, θ, φ, l'espressione piú generale a simmetria centrale di ds^2 è

$$ds^2 = h(r, t)\, dr^2 + k(r, t)\,(\operatorname{sen}^2\theta \cdot d\varphi^2 + d\theta^2) + \\ + l(r, t)\, dt^2 + a(r, t)\, dr\, dt, \qquad (100,1)$$

dove a, h, k, l sono funzioni del « raggio vettore » r e del « tempo » t. Poiché la scelta del sistema di riferimento è arbitraria in relatività generale, possiamo ancora eseguire sulle coordinate qualsiasi trasformazione che non alteri la simmetria centrale di ds^2; questo significa che possiamo trasformare le coordinate r e t per mezzo delle formule

$$r = f_1(r', t'), \quad t = f_2(r', t'),$$

dove f_1 ed f_2 sono funzioni arbitrarie delle nuove coordinate r' e t'.

Sfruttando questa possibilità, scegliamo la coordinata r e il tempo t in maniera tale che il coefficiente $a(r, t)$ di $dr\, dt$ nell'espressione per ds^2 si annulli e, che il coefficiente $k(r, t)$ sia semplicemente uguale a $-r^2$ [1]). Quest'ultima condizione significa che il raggio vettore r è determinato in modo tale che la lunghezza della circonferenza di centro nell'origine delle coordinate sia uguale a $2\pi r$ (l'elemento d'arco della circonferenza nel piano $\theta = \pi/2$ è uguale a $dl = r d\varphi$). Risulta piú comodo scrivere le grandezze h ed l in forma esponenziale, rispettivamente come $-e^{\lambda}$ e $c^2 e^{\nu}$, dove λ e ν sono funzioni di r e t. Si ottiene quindi per ds^2 la seguente espressione:

$$ds^2 = e^{\nu} c^2\, dt^2 - r^2 (d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta \cdot d\varphi^2) - e^{\lambda}\, dr^2. \qquad (100,2)$$

Se si suppone che x^0, x^1, x^2, x^3 rappresentino rispettivamente le coordinate ct, r, θ, φ, si hanno quindi per le componenti non nulle del tensore metrico le espressioni:

$$g_{00} = e^{\nu}, \quad g_{11} = -e^{\lambda}, \quad g_{22} = -r^2, \quad g_{33} = -r^2 \operatorname{sen}^2\theta.$$

È evidente che

$$g^{00} = e^{-\nu}, \quad g^{11} = -e^{-\lambda}, \quad g^{22} = -r^{-2}, \quad g^{33} = -r^{-2} \operatorname{sen}^{-2}\theta.$$

Questi valori permettono di calcolare facilmente con la formula (86,3) le grandezze Γ^i_{kl}. Il calcolo fornisce le seguenti espressioni

[1]) Queste condizioni non determinano ancora univocamente la scelta della coordinata temporale: essa può essere ancora sottoposta a qualsiasi trasformazione della forma $t = f(t')$, non contenente r.

(l'apice indica la derivazione rispetto ad r, e il punto su una lettera la derivazione rispetto a ct):

$$\begin{gathered}\Gamma^1_{11}=\frac{\lambda'}{2},\quad \Gamma^0_{10}=\frac{\nu'}{2},\quad \Gamma^2_{33}=-\operatorname{sen}\theta\cos\theta,\\ \Gamma^0_{11}=\frac{\dot\lambda}{2}e^{\lambda-\nu},\quad \Gamma^1_{22}=-re^{-\lambda},\quad \Gamma^1_{00}=\frac{\nu'}{2}e^{\nu-\lambda},\\ \Gamma^2_{12}=\Gamma^3_{13}=\frac{1}{r},\quad \Gamma^3_{23}=\operatorname{ctg}\theta,\quad \Gamma^0_{00}=\frac{\dot\nu}{2},\\ \Gamma^1_{10}=\frac{\dot\lambda}{2},\quad \Gamma^1_{33}=-r\operatorname{sen}^2\theta e^{-\lambda}.\end{gathered}\tag{100,3}$$

Tutte le altre componenti di Γ^i_{kl} (tranne quelle che si distinguono dalle componenti scritte per permutazione degli indici k ed l) sono nulle.

Per scrivere le equazioni, bisogna calcolare mediante la formula (92,7) le componenti del tensore R^i_k. Dopo semplici calcoli abbiamo le seguenti equazioni:

$$\frac{8\pi k}{c^4}T^1_1=-e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r}+\frac{1}{r^2}\right)+\frac{1}{r^2},\tag{100,4}$$

$$\frac{8\pi k}{c^4}T^2_2=\frac{8\pi k}{c^4}T^3_3=-\frac{1}{2}e^{-\lambda}\left(\nu''+\frac{\nu'^2}{2}+\frac{\nu'-\lambda'}{r}-\frac{\nu'\lambda'}{2}\right)+$$
$$+\frac{1}{2}e^{-\nu}\left(\ddot\lambda+\frac{\dot\lambda^2}{2}-\frac{\dot\lambda\dot\nu}{2}\right),\tag{100,5}$$

$$\frac{8\pi k}{c^4}T^0_0=-e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2}-\frac{\lambda'}{r}\right)+\frac{1}{r^2},\tag{100,6}$$

$$\frac{8\pi k}{c^4}T^1_0=-e^{-\lambda}\frac{\dot\lambda}{r}\tag{100,7}$$

(le altre componenti dell'equazione (95,6) si annullano identicamente). Le componenti del tensore energia-impulso si possono esprimere con l'aiuto della formula (94,9) mediante la densità di energia ε della materia, la sua pressione p e la velocità radiale v.

Le equazioni dalla (100,4) alla (100,7) sono integrabili nel caso assai importante di un campo a simmetria centrale nel vuoto, cioè al di fuori delle masse che lo generano. Ponendo il tensore energia-impulso uguale a zero, otteniamo le seguenti equazioni:

$$e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r}+\frac{1}{r^2}\right)-\frac{1}{r^2}=0,\tag{100,8}$$

$$e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda'}{r}-\frac{1}{r^2}\right)+\frac{1}{r^2}=0,\tag{100,9}$$

$$\dot\lambda=0\tag{100,10}$$

(si può omettere la quarta equazione, cioè l'equazione (100,5) perché essa è una conseguenza delle prime tre).

Vediamo dalla (100,10) che λ non dipende dal tempo. Sommando le equazioni (100,8) e (100,9), troviamo $\lambda' + \nu' = 0$, cioè

$$\lambda + \nu = f(t) \tag{100,11}$$

dove $f(t)$ è funzione solo del tempo. Scegliendo però l'intervallo ds^2 nella forma (100,2), ci siamo riservati la possibilità di una trasformazione arbitraria del tempo nella forma $t = f(t')$. Una tale trasformazione significa aggiungere a ν una funzione arbitraria del tempo; essa permette inoltre di ridurre sempre a zero $f(t)$ nella (100,11). Dunque, senza nessuna restrizione si può porre $\lambda + \nu = 0$. Notiamo che un campo gravitazionale a simmetria centrale nel vuoto diventa automaticamente statico.

L'equazione (100,9) si integra facilmente e dà:

$$e^{-\lambda} = e^{\nu} = 1 + \frac{\text{costante}}{r}. \tag{100,12}$$

Come doveva essere, all'infinito ($r \to \infty$) si ha $e^{-\lambda} = e^{\nu} = 1$, cioè la metrica diventa automaticamente galileiana nelle regioni lontane dai gravi. La costante si esprime facilmente mediante la massa del corpo se si pone la condizione che a grandi distanze, dove il campo è debole, sia valida la legge di Newton[1]). Si deve avere precisamente $g_{00} = 1 + 2\varphi/c^2$, dove il potenziale φ è uguale alla sua espressione newtoniana (99,4): $\varphi = -km/r$ (essendo m la massa totale del corpo che crea il campo). Ne segue costante $= -2km/c^2$. Questa grandezza ha la dimensione di lunghezza e si chiama *raggio gravitazionale* del corpo e si indica con r_g:

$$r_g = \frac{2km}{c^2}. \tag{100,13}$$

In tal modo, troviamo infine la metrica spazio-temporale nella forma

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2\, dt^2 - r^2 (\operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2 + d\theta^2) - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}}. \tag{100,14}$$

Questa soluzione delle equazioni di Einstein è stata trovata nel 1916 da *K. Schwarzschild.* Essa determina completamente il campo

---

[1]) Per il campo in una cavità sferica in una distribuzione a simmetria-centrale della materia si deve avere costante $= 0$, perché in caso contrario la metrica avrebbe una singolarità per $r = 0$. Cosí, la metrica in una tale cavità diventa automaticamente galileiana, cioè nella cavità il campo gravitazionale é nullo (come pure nella teoria newtoniana).

gravitazionale nel vuoto, creato da qualsiasi distribuzione a simmetria centrale delle masse. Sottolineiamo che questa soluzione è valida non soltanto per masse a riposo, bensí anche per masse in moto purché il moto sia dotato della necessaria simmetria (per esempio, le pulsazioni simmetriche rispetto al centro). Notiamo che la metrica (100,14) dipende solamente dalla massa totale del grave, come nel problema analogo della teoria newtoniana.

La metrica spaziale è determinata dall'espressione dell'elemento di distanza spaziale:

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1-\frac{r_g}{r}} + r^2(\operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2 + d\theta^2). \tag{100,15}$$

Il significto geometrico della coordinata r è dovuto al fatto che nella metrica (100,15) la lunghezza della circonferenza di centro nel centro del campo è uguale a $2\pi r$. La distanza tra due punti r_1 ed r_2 giacenti su uno stesso raggio è data dall'integrale

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{1-\frac{r_g}{r}}} > r_2 - r_1. \tag{100,16}$$

Si vede, inoltre, che $g_{00} \leqslant 1$. Conformemente alla formula (84,1), si ha $d\tau = \sqrt{g_{00}}dt$, l'espressione che determina il tempo reale; ne segue che

$$d\tau \leqslant dt. \tag{100,17}$$

Il segno d'uguaglianza ha luogo all'infinito dove t coincide con il tempo reale. In tal modo, a distanze finite dalle masse si verifica un « rallentamento » del tempo rispetto al tempo che si misura all'infinito.

Infine, diamo un'espressione approssimata di ds^2 a grandi distanze dall'origine delle coordinate:

$$ds^2 = ds_0^2 - \frac{2km}{c^2 r}(dr^2 + c^2 dt^2). \tag{100,18}$$

Il secondo termine rappresenta una piccola correzione alla metrica galileiana ds_0^2. A grandi distanze dalle masse che creano il campo, ogni campo è con buona approssimazione a simmetria centrale. Di conseguenza, la (100,18) determina la metrica a grandi distanze da qualsiasi sistema di corpi.

Si possono formulare anche delle considerazioni di carattere generale su un campo gravitazionale a simmetria centrale all'interno dei gravi. Dalla equazione (100,6) si vede che per $r \to 0$ anche λ deve annullarsi, almeno come r^2; nel caso contrario il secondo membro di questa equazione diventerebbe infinito per $r \to 0$, cioè T_0^0 avrebbe un punto singolare in $r = 0$. Integrando formalmente l'equazione (100,6) con la condizione limite $\lambda \mid_{r=0} = 0$, si

ottiene:

$$\lambda = -\ln\left(1 - \frac{8\pi k}{c^4 r}\int_0^r T_0^0 r^2\,dr\right). \qquad (100,19)$$

Poiché si ha, in base alla (100,10), $T_0^0 = e^{-\nu}T_{00} \geqslant 0$, ne segue che $\lambda \geqslant 0$, cioè

$$e^{\lambda} \geqslant 1. \qquad (100,20)$$

Sottraendo poi mebro a membro l'equazione (100,6) dall'equazione (100,4), si ottiene:

$$\frac{e^{-\lambda}}{r}(\nu' + \lambda') = \frac{8\pi k}{c^4}(T_0^0 - T_1^1) = \frac{(\varepsilon + p)\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \geqslant 0,$$

cioè $\nu' + \lambda' \geqslant 0$. Per $r \to \infty$ (lontano dalle masse), la metrica diventa galileiana, cioè $\nu \to 0$, $\lambda \to 0$. Dalla condizione $\nu' + \lambda' \geqslant 0$ risulta perciò che in tutto lo spazio

$$\nu + \lambda \leqslant 0. \qquad (100,21)$$

Poiché $\lambda \geqslant 0$, ne segue che $\nu \leqslant 0$, cioè

$$e^{\nu} \leqslant 1. \qquad (100,22)$$

Le disuguaglianze ottenute mostrano che le proprietà (100,16) e (100,17) della metrica spaziale e della misura del tempo in un campo a simmetria centrale nel vuoto sono valide anche per il campo all'interno dei gravi.

Se il campo gravitazionale è creato da un corpo sferico di « raggio » a, per $r > a$ si ha $T_0^0 = 0$. Per punti $r > a$ la formula (100,19) dà allora:

$$\lambda = -\ln\left(1 - \frac{8\pi k}{c^4 r}\int_0^a T_0^0 r^2\,dr\right).$$

D'altra parte, si può applicare qui l'espressione (100,14) relativa al vuoto, secondo la quale

$$\lambda = -\ln\left(1 - \frac{2km}{c^2 r}\right).$$

Confrontando le due espressioni, troviamo la formula

$$m = \frac{4\pi}{c^2}\int_0^a T_0^0 r^2\,dr, \qquad (100,23)$$

che determina la massa totale del corpo mediante il tensore energia-impulso. In particolare, per la distribuzione statica della

materia nel corpo si ha $T_0^0 = \varepsilon$, in modo che

$$m = \frac{4\pi}{c^2} \int_0^a \varepsilon r^2 \, dr. \tag{100,24}$$

Notiamo che l'integrazione è fatta in $4\pi r^2 dr$, mentre l'elemento di volume spaziale nella metrica (100,2) è $dV = 4\pi r^2 e^{\lambda/2} dr$, dove secondo la (100,20) $e^{\lambda/2} > 1$. Questa differenza esprime il difetto di massa gravitazionale del corpo.

PROBLEMI

1. Trovare gli invarianti del tensore di curvatura per la metrica di Schwarzschild (100,14).

Soluzione. Il calcolo secondo la (92,1) con le Γ^i_{kl} ricavate dalla (100,3) (oppure secondo le formule stabilite nel problema 2 del § 92) dà i seguenti valori non nulli delle componenti del tensore di curvatura:

$$R_{0101} = \frac{r_g}{r^3}, \quad R_{0202} = \frac{R_{0303}}{\operatorname{sen}^2\theta} = -\frac{r_g(r-r_g)}{2r^2},$$

$$R_{1212} = \frac{R_{1313}}{\operatorname{sen}^2\theta} = \frac{r_g}{2(r-r_g)}, \quad R_{2323} = -rr_g \operatorname{sen}^2\theta.$$

Per gli invarianti I_1 ed I_2 della (92,20) troviamo:

$$I_1 = \left(\frac{r_g}{2r^3}\right)^2, \quad I_2 = -\left(\frac{r_g}{2r^3}\right)^3$$

(i prodotti contenenti il tensore duale R_{iklm} sono identicamente nulli). Il tensore di curvatura si riferisce al tipo D di Petrov (con gli invarianti reali $\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} = -r_g/2r^3$). Notiamo che gli invarianti di curvatura hanno una singolarità solo nel punto $r = 0$, anziché nel $r = r_g$.

2. Determinare la curvatura spaziale per la stessa metrica.

Soluzione. Le componenti del tensore spaziale di curvatura $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ possono essere espresse mediante le componenti del tensore $P_{\alpha\beta}$ (e il tensore $\gamma_{\alpha\beta}$), cosicché sarà sufficiente calcolare solo il $P_{\alpha\beta}$ (vedi il problema 1 del § 92). Il tensore $P_{\alpha\beta}$ si esprime mediante $\gamma_{\alpha\beta}$, nello stesso modo come R_{ik} si esprime mediante g_{ik}. Utilizzando i valori di $\gamma_{\alpha\beta}$ ricavati dalla (100,15), dopo i necessari calcoli otteniamo:

$$P^\theta_\theta = P^\varphi_\varphi = \frac{r_g}{2r^3}, \quad P^r_r = -\frac{r_g}{r^3}$$

e $P^\beta_\alpha = 0$ per $\alpha \neq \beta$. Notiamo che P^θ_θ, $P^\varphi_\varphi > 0$, $P^r_r < 0$ e $P \equiv P^\alpha_\alpha = 0$.

Applicando la formula stabilita nel problema 1 del § 92 troviamo:

$$P_{r\theta r\theta} = (P^r_r + P^\theta_\theta)\gamma_{rr}\gamma_{\theta\theta} = -P^\varphi_\varphi \gamma_{rr}\gamma_{\theta\theta},$$

$$P_{r\varphi r\varphi} = -P^\theta_\theta \gamma_{rr}\gamma_{\varphi\varphi}, \quad P_{\theta\varphi\theta\varphi} = -P^r_r \gamma_{\theta\theta}\gamma_{\varphi\varphi},$$

Di qui segue (vedi la nota alla pag. 346) che, per i « piani » perpendicolari ai raggi, la curvatura di Gauss è

$$K = \frac{P_{\theta\varphi\theta\varphi}}{\gamma_{\theta\theta}\gamma_{\varphi\varphi}} = -P^r_r > 0$$

(ciò significa che per triangoli piccoli tracciati su un settore del « piano » in prossimità della sua intersezione con il raggio perpendicolare la somma degli angoli è maggiore di π). Per quanto riguarda i « piani » passanti per il centro, la curvatura di Gauss è $K < 0$; ciò vuol dire che la somma degli angoli di triangoli piccoli tracciati nel piano è inferiore a π (sottolineiamo tuttavia che quest'ultima proprietà non si riferisce ai triangoli che racchiudono il centro: la somma degli angoli per un tale triangolo è maggiore di π).

3. Determinare la forma della superficie di rotazione la cui geometria è identica a quella del « piano » passante per l'origine delle coordinate di un campo gravitazionale a simmetria centrale nel vuoto.

Soluzione. La geometria di una superficie di rotazione $z = z(r)$ (in coordinate cilindriche) è determinata dall'elemento di lunghezza

$$dl^2 = dr^2 + dz^2 + r^2\, d\varphi^2 = dr^2\,(1 + z'^2) + r^2\, d\varphi^2.$$

Confrontando con l'elemento di lunghezza (100,15) nel « piano » $\theta = \pi/2$

$$dl^2 = r^2\, d\varphi^2 + \frac{dr^2}{1 - \dfrac{r_g}{r}},$$

troviamo:

$$1 + z'^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1},$$

da cui

$$z = 2\sqrt{r_g(r - r_g)}.$$

Per $r = r_g$ questa funzione ha una singolarità: un punto di diramazione. Questa circostanza è dovuta al fatto che la metrica spaziale (100,15) ha effettivamente, a differenza della metrica spazio-temporale (100,14), una singolarità per $r = r_g$.

Le proprietà geometriche dei « piani » passanti per il centro, indicate nel problema precedente, si possono trovare anche considerando la curvatura del modello qui ottenuto.

4. Trasformare l'intervallo (100,14) in maniera tale che la metrica spaziale nelle nuove coordinate abbia la forma conforme-euclidea (cioè dl^2 sia proporzionale alla sua espressione euclidea).

Soluzione. Ponendo

$$r = \rho\left(1 + \frac{r_g}{4\rho}\right)^2,$$

dalla (100,14) ricaviamo:

$$ds^2 = \left[\frac{1 - \dfrac{r_g}{4\rho}}{1 + \dfrac{r_g}{4\rho}}\right]^2 c^2\, dt^2 - \left(1 + \frac{r_g}{4\rho}\right)^4 (d\rho^2 + \rho^2\, d\theta^2 + \rho^2 \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2).$$

Le coordinate ρ, θ, φ sono dette coordinate sferiche isotrope; esse possono essere sostituite anche con le coordinate cartesiane isotrope x, y, z. In particolare, a grandi distanze ($\rho \gg r_g$) si ha approssimativamente:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{\rho}\right) c^2\, dt^2 - \left(1 + \frac{r_g}{\rho}\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

5. Trovare le equazioni di un campo gravitazionale a simmetria centrale nella materia e in un sistema di riferimento in moto solidale con la materia.

Soluzione. Utilizziamo le due trasformazioni possibili delle coordinate r, t nell'elemento d'intervallo (100,1) al fine di annullare il coefficiente a (r, t) di $dr\,dt$ e la velocità radiale della materia in ogni punto (le altre componenti della velocità mancano completamente in virtú della simmetria centrale). Dopo di che sulle coordinate r e t si può inoltre eseguire ancora una trasformazione arbitraria della forma $r = r(r')$, $t = t(t')$.

Indichiamo la coordinata radiale e il tempo scelti in questo modo con R e τ, e i coefficienti h, k, l rispettivamente con $-e^{\lambda}$, $-e^{\mu}$, e^{ν} (λ, μ, ν sono funzioni di R e τ). Per l'elemento d'intervallo si ha allora:

$$ds^2 = c^2 e^{\nu} d\tau^2 - e^{\lambda} dR^2 - e^{\mu}(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2). \tag{1}$$

Le componenti del tensore energia-impulso nel sistema di riferimento in moto solidale sono:

$$T_0^0 = \varepsilon, \qquad T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = -p.$$

Dopo i necessari calcoli si ottengono le seguenti equazioni di campo[1]):

$$-\frac{8\pi k}{c^4} T_1^1 = \frac{8\pi k}{c^4} p =$$

$$= \frac{1}{2} e^{-\lambda}\left(\frac{\mu'^2}{2} + \mu'\nu'\right) - e^{-\nu}\left(\ddot{\mu} - \frac{1}{2}\dot{\mu}\dot{\nu} + \frac{3}{4}\dot{\mu}^2\right) - e^{-\mu}, \tag{2}$$

$$-\frac{8\pi k}{c^4} T_2^2 = \frac{8\pi k}{c^4} p = \frac{1}{4} e^{-\lambda}(2\nu'' + \nu'^2 + 2\mu'' + \mu'^2 - \mu'\lambda' - \nu'\lambda' + \mu'\nu') +$$

$$+ \frac{1}{4} e^{-\nu}(\ddot{\lambda}\nu + \ddot{\mu}\nu - \ddot{\lambda}\mu - 2\ddot{\lambda} - \dot{\lambda}^2 - 2\ddot{\mu} - \dot{\mu}^2), \tag{3}$$

$$\frac{8\pi k}{c^4} T_0^0 = \frac{8\pi k}{c^4} \varepsilon = -e^{-\lambda}\left(\mu'' + \frac{3}{4}\mu'^2 - \frac{\mu'\lambda'}{2}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2} e^{-\nu}\left(\dot{\lambda}\dot{\mu} + \frac{\dot{\mu}^2}{2}\right) + e^{-\mu}, \tag{4}$$

$$\frac{8\pi k}{c^4} T_0^1 = 0 = \frac{1}{2} e^{-\lambda}(2\dot{\mu}' + \dot{\mu}\mu' - \dot{\lambda}\mu' - \nu'\dot{\mu}) \tag{5}$$

(l'apice indica la derivazione rispetto ad R, il punto sulla lettera la derivazione rispetto a $c\tau$).

Alcune relazioni generali per λ, μ, ν possono essere facilmente trovate partendo dalle equazioni $T^k_{i;k} = 0$ contenute nelle equazioni del campo. Utilizzando la formula (86,11), troviamo le due equazioni

$$\dot{\lambda} + 2\dot{\mu} = -\frac{2\dot{\varepsilon}}{p+\varepsilon}, \qquad \nu' = -\frac{2p'}{p+\varepsilon}. \tag{6}$$

Se p è nota come funzione di ε, le equazioni (6) si integrano nel modo seguente;

$$\lambda + 2\mu = -2\int \frac{d\varepsilon}{p+\varepsilon} + f_1(R), \qquad \nu = -2\int \frac{dp}{p+\varepsilon} + f_2(\tau), \tag{7}$$

dove le funzioni $f_1(R)$ ed $f_2(\tau)$ possono essere scelte arbitrariamente, perché sono possibili, come abbiamo indicato sopra, le trasformazioni della forma $R = R(R')$, $\tau = \tau(\tau')$.

6. Trovare le equazioni che determinano un campo gravitazionale statico nel vuoto generato da un corpo a simmetria assiale immobile (*H. Weyl*, 1917).

---

[1]) Le componenti di R_{ik} si possono calcolare direttamente, come è stato fatto nel testo, oppure secondo le formule ottenute nel problema 2 del § 92.

Soluzione. Cerchiamo l'elemento statico d'intervallo in coordinate cilindriche spaziali $x^1 = \varphi$, $x^2 = \rho$, $x^3 = z$ nella forma

$$ds^2 = e^{\nu}c^2dt^2 - e^{\omega}d\varphi^2 - e^{\mu}(d\rho^2 + dz^2),$$

dove τ, ω, μ sono funzioni di ρ e z; una tale rappresentazione fissa la scelta delle coordinate a meno di una trasformazione del tipo $\rho = \rho(\rho', z')$, $z = z(\rho', z')$ che moltiplica per un fattore comune la forma quadratica $d\rho^2 + dz^2$.

Dalle equazioni

$$R_0^0 = \frac{1}{4}e^{-\mu}[2\nu_{,\rho,\rho} + \nu_{,\rho}(\nu_{,\rho} + \omega_{,\rho}) + 2\nu_{,z,z} + \nu_{,z}(\nu_{,z} + \omega_{,z})] = 0,$$

$$R_1^1 = \frac{1}{4}e^{-\mu}[2\omega_{,\rho,\rho} + \omega_{,\rho}(\nu_{,\rho} + \omega_{,\rho}) + 2\omega_{,z,z} + \omega_{,z}(\nu_{,z} + \omega_{,z})] = 0$$

(dove gli indici, ρ e, z indicano la derivazione rispetto a ρ e z), prendendone la somma, troviamo:

$$\rho'_{,\rho,\rho} + \rho'_{,z,z} = 0,$$

dove è posto

$$\rho'(\rho, z) = e^{\frac{\nu+\omega}{2}}.$$

In tal modo, $\rho'(\rho, z)$ è una funzione armonica delle variabili ρ, z. In base alle note proprietà di tali funzioni, ciò significa che esiste una funzione coniugata armonica $z'(\rho, z)$ tale che $\rho' + iz' = f(\rho + iz)$, dove f è una funzione analitica della variabile complessa $\rho + iz$. Se prendiamo ora ρ', z' come nuove coordinate, si avrà allora, in virtú della trasformazione conforme $\rho, z \to \rho', z'$,

$$e^{\mu}(d\rho^2 + dz^2) = e^{\mu'}(d\rho'^2 + dz'^2),$$

dove $\mu'(\rho', z')$ è una nuova funzione. Allo stesso tempo si ha $e^{\omega} = \rho'^2 e^{-\nu}$; ponendo $\omega + \nu = \gamma$ e omettendo tutti gli apici, scriviamo ds^2 nella la forma

$$ds^2 = e^{\nu}c^2\,dt^2 - \rho^2 e^{-\nu}\,d\varphi^2 - e^{\gamma-\nu}(d\rho^2 + dz^2). \tag{1}$$

Scrivendo per questa metrica le equazioni $R_0^0 = 0$, $R_3^3 - R_2^2 = 0$, $R_2^3 = 0$, troviamo:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\nu}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial^2\nu}{\partial z^2} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial\gamma}{\partial z} = \rho\frac{\partial\nu}{\partial\rho}\frac{\partial\nu}{\partial z}, \qquad \frac{\partial\gamma}{\partial\rho} = \frac{\rho}{2}\left[\left(\frac{\partial\nu}{\partial\rho}\right)^2 - \left(\frac{\partial\nu}{\partial z}\right)^2\right]. \tag{3}$$

Notiamo che la (2) ha la forma dell'equazione di Laplace in coordinate cilindriche (per una funzione non dipendente da φ). Risolta questa equazione, la funzione $\gamma(\rho, z)$ è definita completamente dalle equazioni (2) e (3). Lontano dal corpo che crea il campo le funzioni ν e γ debbono tendere a zero.

§ 101. *Moto in un campo gravitazionale a simmetria centrale*

Consideriamo il moto di una particella in un campo gravitazionale a simmetria centrale. Come in ogni campo a simmetria centrale, il moto avverrà in un solo « piano » passante per il centro del campo; prendiamo questo piano per piano $\theta = \pi/2$.

Per determinare la traiettoria della particella, partiamo dall'equazione di Hamilton-Jacobi

$$g^{ik}\frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^k}-m^2c^2=0,$$

dove m è la massa della particella (indichiamo con m' la massa del corpo che crea il campo). Espressa mediante il tensore metrico ricavato dalla (100,14) questa equazione assume la forma

$$\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-1}\left(\frac{\partial S}{c\,\partial t}\right)^2-\left(1-\frac{r_g}{r}\right)\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2-\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2-m^2c^2=0, \tag{101,1}$$

dove $r_g = 2m'k/c^2$ è il raggio gravitazionale del corpo centrale.

Partendo dalle regole generali di soluzione delle equazioni di Hamilton-Jacobi, cerchiamo S nella forma

$$S = -\mathscr{E}_0 t + M\varphi + S_r(r) \tag{101,2}$$

con l'energia $\mathscr{E}_0$ e il momento angolare M costanti. Sostituendo la (101,2) nella (101,1), troviamo la derivata dS_r/dr e quindi:

$$S_r=\int\left[\frac{\mathscr{E}_0^2}{c^2}\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-2}-\left(m^2c^2+\frac{M^2}{r^2}\right)\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-1}\right]^{1/2}dr. \tag{101,3}$$

La dipendenza $r = r(t)$ è data, come è noto (vedi vol. I. *Meccanica*, § 47), dall'equazione $\partial S/\partial\mathscr{E}_0$ = costante, da cui

$$ct=\frac{\mathscr{E}_0}{mc^2}\int\frac{dr}{\left(1-\frac{r_g}{r}\right)\left[\left(\frac{\mathscr{E}_0}{mc^2}\right)^2-\left(1+\frac{M^2}{m^2c^2r^2}\right)\left(1-\frac{r_g}{r}\right)\right]^{1/2}}. \tag{101,4}$$

Quanto alla traiettoria, essa è determinata dalla equazione $\partial S/\partial M$ = = costante, da cui

$$\varphi=\int\frac{M}{r^2}\left[\frac{\mathscr{E}_0^2}{c^2}-\left(m^2c^2+\frac{M^2}{r^2}\right)\left(1-\frac{r_g}{r}\right)\right]^{-1/2}dr. \tag{101,5}$$

Questo integrale si riduce ad un integrale ellittico.

Per quanto riguarda il moto dei pianeti nel campo d'attrazione del Sole, la teoria relativistica introduce correzioni insignificanti rispetto ai risultati della teoria di Newton, poiché le velocità dei pianeti sono molto piccole rispetto alla velocità della luce. A ciò corrisponde il fatto che nell'equazione della traiettoria (101,5) il rapporto r_g/r è piccolo (r_g è il raggio gravitazionale del Sole)[1].

Per lo studio delle correzioni relativistiche alla traiettoria, è comodo partire dall'espressione (101,3) della parte radiale dell'azione prima della sua derivazione rispetto ad M. Cambiamo la variabile d'integrazione eseguendo la trasformazione $r(r-r_g) = r'^2$, cioè

[1]) Per il Sole r_g = 3 km; per la Terra r_g = 0,9 cm.

$r - r_g/2 \approx r'$, dopo di che il termine contenente M^2 sotto radice diventerà M^2/r'^2. Sviluppomo gli altri termini in serie di potenze di r_g/r' ed otteniamo con la precisione richiesta:

$$S_r = \int \left[\left(2\mathscr{E}'m + \frac{\mathscr{E}'^2}{c^2} \right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{r} (2m^2m'k + 4\mathscr{E}'mr_g) - \frac{1}{r^2} \left(M^2 - \frac{3m^2c^2r_g^2}{2} \right) \right]^{1/2} dr, \quad (101,6)$$

dove, per brevità, abbiamo omesso l'apice alla r' ed abbiamo introdotto l'energia non relativistica $\mathscr{E}'$ (senza energia di quiete).

I termini correttivi nei coefficienti dei primi due termini sotto la radice quadrata portano solo ad un risultato che non presenta un interesse particolare, e cioè al cambiamento della relazione tra l'energia e il momento angolare della particella e i parametri della sua orbita newtoniana (ellisse). Il cambiamento del coefficiente di $1/r^2$ conduce invece ad un fenomeno piú sostanziale: lo spostamento sistematico (*secolare*) del perielio dell'orbita.

Poiché la traiettoria è determinata dall'equazione $\varphi + \frac{\partial S_r}{\partial M} =$ $=$ costante, la variazione dell'angolo φ per un periodo di rivoluzione di un pianeta sull'orbita è

$$\Delta\varphi = -\frac{\partial}{\partial M} \Delta S_r,$$

dove ΔS_r è la variazione corrispondente di S_r. Sviluppando S_r in serie di potenze della piccola correzione nel coefficiente di $1/r^2$, otteniamo:

$$\Delta S_r = \Delta S_r^{(0)} - \frac{3m^2c^2r_g^2}{4M} \frac{\partial \Delta S_r^{(0)}}{\partial M},$$

dove $\Delta S_r^{(0)}$ corrisponde al moto su un'ellisse chiusa fissa. Derivando questa relazione rispetto ad M e tenendo conto che

$$-\frac{\partial}{\partial M} \Delta S_r^{(0)} = \Delta\varphi^{(0)} = 2\pi,$$

troviamo:

$$\Delta\varphi = 2\pi + \frac{3\pi m^2c^2r_g^2}{2M^2} = 2\pi + \frac{6\pi k^2m^2m'^2}{c^2M^2}.$$

Il secondo termine rappresenta lo spostamento angolare cercato $\delta\varphi$ dell'ellisse newtoniana in un periodo, cioè lo spostamento del perielio dell'orbita. Esprimendo questa grandezza mediante la lunghezza a del semiasse maggiore e l'eccentricità e dell'ellisse con

la nota formula $M^2/km'm^2 = a(1-e^2)$, otteniamo[1]):

$$\delta\varphi = \frac{6\pi km'}{c^2 a(1-e^2)}. \tag{101,7}$$

Consideriamo ora il cammino percorso da un raggio luminoso in un campo gravitazionale a simmetria centrale. Questo cammino è determinato dall'equazione dell'iconale (87,9)

$$g^{ik}\frac{\partial\psi}{\partial x^i}\frac{\partial\psi}{\partial x^k} = 0,$$

che si distingue dall'equazione di Hamilton-Jacobi unicamente per il fatto che bisogna porre in quest'ultima $m = 0$. Si può quindi ottenere la traiettoria del raggio direttamente dalla formula (101,5) ponendovi $m = 0$; analogamente, al posto dell'energia della particella $\mathscr{E}_0 = -\partial S/\partial t$ bisognerà scrivere la frequenza della luce $\omega_0 = -\partial\psi/\partial t$. Sostituendo alla costante M la costante ρ ricavata da $\rho = cM/\omega_0$, si ottiene:

$$\varphi = \int \frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}}. \tag{101,8}$$

Trascurando le correzioni relativistiche ($r_g \to 0$), questa equazione dà $r = \rho/\cos\varphi$, cioè una retta passante alla distanza ρ dall'origine delle coordinate. Per lo studio delle correzioni relativistiche, procediamo come nel caso precedente.

Per la parte radiale dell'iconale [cfr. la (101,3)] si ha:

$$\psi_r(r) = \frac{\omega_0}{c}\int\sqrt{\frac{r^2}{(r-r_g)^2} - \frac{\rho^2}{r(r-r_g)}}\,dr.$$

Effettuando le stesse trasformazioni che hanno permesso di passare dalla (101,3) alla (101,6), otteniamo:

$$\psi_r(r) = \frac{\omega_0}{c}\int\sqrt{1 + \frac{2r_g}{r} - \frac{\rho^2}{r^2}}\,dr.$$

Sviluppando ora l'espressione integranda in serie di potenze di r_g/r, abbiamo:

$$\psi_r = \psi_r^{(0)} + \frac{r_g\omega_0}{c}\int\frac{dr}{\sqrt{r^2-\rho^2}} = \psi_r^{(0)} + \frac{r_g\omega_0}{c}\operatorname{Arch}\frac{r}{\rho},$$

dove $\psi_r^{(0)}$ corrisponde al raggio rettilineo classico.

La variazione totale di ψ_r nella propagazione di un raggio che, partendo da un punto a distanza R molto grande passa per il punto

[1]) I valori numerici degli spostamenti calcolati secondo la formula (101,7) per il pianeta Mercurio e la Terra sono rispettivamente uguali a 43,0″ e 3,8″ in un secolo.

piú vicino al centro $r = \rho$ e quindi si allontana fino ad una distanza R da esso, vale:

$$\Delta\psi_r = \Delta\psi_r^{(0)} + 2\frac{r_g\omega_0}{c}\,\mathrm{Arch}\,\frac{R}{\rho}.$$

La variazione corrispondente dell'angolo polare φ lungo il raggio si ottiene derivando rispetto ad $M = \rho\omega_0/c$:

$$\Delta\varphi = -\frac{\partial\Delta\psi_r}{\partial M} = -\frac{\partial\Delta\psi_r^{(0)}}{\partial M} + \frac{2r_gR}{\rho\sqrt{R^2-\rho^2}}.$$

Infine, passando al limite per $R \to \infty$ e notando che a un raggio rettilineo corrisponde $\Delta\varphi = \pi$, otteniamo:

$$\Delta\varphi = \pi + \frac{2r_g}{\rho}.$$

Ciò significa che, sotto l'azione del campo gravitazionale, il raggio luminoso si curva: la sua traiettoria rappresenta una curva convessa verso il centro (il raggio è « attratto » dal centro), in modo che l'angolo tra i suoi due asintoti differisce da π di

$$\delta\varphi = \frac{2r_g}{\rho} = \frac{4km'}{c^2\rho}; \qquad (101,9)$$

in altri termini, un raggio passante a distanza ρ dal centro del campo devia di un angolo uguale a $\delta\varphi$[1]).

§ 102. *Collasso gravitazionale di un corpo sferico*

Nella metrica di Schwarzschild (100,14), g_{00} si annulla e g_{11} diverge per $r = r_g$ (sulla *sfera di Schwarzschild*). Questa circostanza potrebbe giustificare la conclusione che la metrica spazio-temporale ha una singolarità e che non è possibile l'esistenza di corpi di « raggio » inferiore (per una data massa) al raggio gravitazionale. Tuttavia, tali conclusioni sono in realtà errate, come è provato già dal fatto che il determinante $g = -r^4\,\mathrm{sen}^2\,\theta$ non ha alcuna singolarità per $r = r_g$, cosicché la condizione $g < 0$ (82,3) è valida. Vedremo infatti che per $r < r_g$ diventa impossibile realizzare il corrispondente sistema di riferimento.

Per precisare il carattere reale della metrica spazio-temporale in questa regione, facciamo la seguente trasformazione di coordinate[2]):

$$c\tau = \pm ct \pm \int \frac{f(r)\,dr}{1-\frac{r_g}{r}}, \quad R = ct + \int \frac{dr}{\left(1-\frac{r_g}{r}\right)f(r)}. \qquad (102,1)$$

---

[1]) Per un raggio passante in prossimità del Sole $\delta\varphi = 1{,}75''$.

[2]) Il significato fisico della singolarità schwarzschildiana è stato chiarito per la prima volta da *D. Finkelstein* (1958) con un'altra trasformazione. La metrica (102,3) fu trovata da *G. Lemaitre* (1938).

Allora

$$ds^2 = \frac{1-\frac{r_g}{r}}{1-f^2}(c^2\,d\tau^2 - f^2\,dR^2) - r^2(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\,d\varphi^2).$$

Scegliendo $f(r)$ in modo che si abbia $f(r_g) = 1$, possiamo eliminare la singolarità per $r = r_g$. Ponendo $f(r) = \sqrt{r_g/r}$, il nuovo sistema di coordinate sarà anch'esso sincrono ($g_{\tau\tau} = 1$). Scegliendo dapprima, per fissare le idee, i segni superiori nella (102,1), avremo:

$$R - c\tau = \int \frac{(1-f^2)\,dr}{\left(1-\frac{r_g}{r}\right)f} = \int \sqrt{\frac{r}{r_g}}\,dr = \frac{2}{3}\frac{r^{3/2}}{r_g^{1/2}},$$

oppure

$$r = \left[\frac{3}{2}(R - c\tau)\right]^{2/3} r_g^{1/3} \tag{102,2}$$

(supponiamo nulla la costante d'integrazione τ dipendente dall'origine dei tempi). Per l'elemento d'intervallo si ha:

$$ds^2 = c^2\,d\tau^2 - \frac{dR^2}{\left[\frac{3}{2r_g}(R-c\tau)\right]^{2/3}} - \left[\frac{3}{2}(R-c\tau)\right]^{4/3} r_g^{2/3}(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\,d\varphi^2). \tag{102,3}$$

La singolarità sulla sfera di Schwarzschild (alla quale corrisponde qui l'uguaglianza $\frac{3}{2}(R - c\tau) = r_g$) in queste coordinate è assente. La coordinata R è ovunque spaziale, la τ temporale. La metrica (102,3) non è stazionaria. Come in ogni sistema di riferimento sincrono, le linee del tempo in questa metrica sono linee geodetiche. In altri termini, le particelle « di prova » che si trovano in stato di quiete rispetto al sistema di riferimento sono particelle in moto libero nel dato campo.

A valori determinati di r corrispondono le linee d'universo $R - c\tau =$ $=$ costante (le rette inclinate del diagramma nella figura 20). Quanto alle linee d'universo delle particelle in quiete rispetto al sistema di riferimento, esse sono rappresentate in questo diagramma da rette verticali; le particelle, spostandosi lungo queste verticali, in un intervallo finito di tempo proprio, cadono nel centro del campo ($r = 0$) che rappresenta un vero punto singolare della metrica.

Esaminiamo la propagazione di segnali luminosi radiali. L'equazione $ds^2 = 0$ (per θ, φ = costante) dà la derivata $d\tau/dR$ lungo il raggio:

$$c\frac{d\tau}{dR} = \pm\left[\frac{3}{2r_g}(R-c\tau)\right]^{-1/3} = \pm\sqrt{\frac{r_g}{r}}, \tag{102,4}$$

dove i due segni corrispondono alle due frontiere del « cono » di luce di vertice nel punto d'universo dato. Per $r > r_g$ (il punto a nella fig. 20) l'inclinazione di queste frontiere è $| c d\tau/dR | < 1$, in modo che la retta $r =$ costante (lungo la quale $c d\tau/dR = 1$) va a finire all'interno del cono. Nella regione $r < r_g$ (il punto a') abbiamo invece $| c d\tau/dR | > 1$, in modo che la retta $r =$ costante — linea d'universo della particella fissa (rispetto al centro del

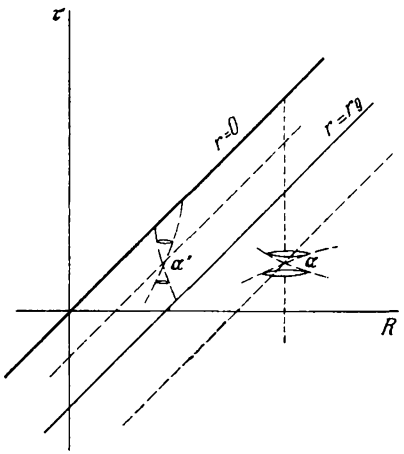

Fig. 20

campo) — resta fuori dal cono. Le due frontiere del cono, ad una distanza finita, intersecano la retta $r = 0$ avvicinandosi ad essa verticalmente. Poiché eventi arbitrari legati dal principio di causalità non possono giacere sulla linea d'universo al di fuori del cono di luce, ne risulta che nella regione $r < r_g$ nessuna particella può essere immobile. In generale, tutte le interazioni e i segnali si propagano qui verso il centro, raggiungendolo in un intervallo di tempo finito τ.

Analogamente, se avessimo scelto i segni inferiori nella trasformazione (102,1), avremmo ottenuto un sistema di riferimento « in espansione » con una metrica che differisce dalla (102,3) per il segno di τ. Esso corrisponde a uno spazio-tempo dove, come prima, non è possibile lo stato di « quiete » e dove tutti i segnali si propagano diretti dal centro verso l'esterno.

I risultati esposti si possono applicare al problema riguardante il comportamento dei gravi in relatività generale.

Dallo studio delle condizioni relativistiche d'equilibrio di un corpo sferico risulta che per una massa abbastanza grande uno stato d'equilibrio statico può anche non esistere (vedi vol. V, *Fisica sta-*

istica, § 111). È evidente che tale corpo deve comprimersi indefinitamente (si ha il cosiddetto *collasso gravitazionale*)[1]).

In un sistema di riferimento galileiano all'infinito [la metrica (100,14)], non legato al corpo, il raggio del corpo centrale non può essere minore di r_g. Ciò vuol dire che, secondo l'orologio t di un osservatore distante, il raggio del corpo che si comprime tende asintoticamente al raggio gravitazionale quando $t \to \infty$. È facile stabilire la legge limite di questa trasformazione.

Una particella sulla superficie del corpo che si comprime si trova sempre nel campo d'attrazione di una massa costante m, cioè della massa totale del corpo. Per $r \to r_g$ le forze d'attrazione diventano molto grandi, mentre la densità (e con essa la pressione) del corpo resta finita. Partendo da quest'ultima circostanza e trascurando le forze di pressione, riconduciamo la determinazione della dipendenza del raggio del corpo dal tempo allo studio della caduta libera della particella « di prova » nel campo di massa m.

La dipendenza $r(t)$ per la caduta nel campo schwarzschildiano è data dall'integrale (101,4), dove per un moto puramente radiale il momento angolare M è nullo. Cosí, se la caduta inizia alla « distanza » r_0 dal centro con velocità nulla nell'istante t_0, l'energia della particella vale $\mathscr{E}_0 = mc^2 \sqrt{1 - r_g/r_0}$, e il tempo t necessario per raggiungere la « distanza » r è dato da:

$$c(t - t_0) = \sqrt{1 - \frac{r_g}{r_0}} \int_r^{r_0} \frac{dr}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \sqrt{\frac{r_g}{r} - \frac{r_g}{r_0}}}. \qquad (102,5)$$

Questo integrale diverge per $r \to r_g$ come $- r_g \ln (r - r_g)$, e quindi la legge asintotica secondo la quale r tende ad r_g è:

$$r - r_g = \text{costante}\, e^{-ct/r_g}. \qquad (102,6)$$

In tal modo, lo stadio finale di avvicinamento di un corpo in collasso al raggio gravitazionale avviene secondo una legge esponenziale con un tempo caratteristico molto piccolo $\sim r_g/c$.

Sebbene la velocità del processo di compressione osservato dal di fuori tenda asintoticamente a zero, la velocità v delle particelle cadenti, misurata nel loro tempo proprio, al contrario, cresce tendendo alla velocità della luce. Infatti, secondo la definizione (88,10) si ha:

$$v^2 = \left(\frac{\sqrt{-g_{11}}\, dr}{\sqrt{g_{00}}\, dt} \right)^2.$$

---

[1]) Le proprietà fondamentali di questo fenomeno furono spiegate da *J. R. Oppenheimer* e *H. Snyder* (1939).

Ricavando g_{11} e g_{00} dalla (100,14) e dr/dt dalla (102,5), troviamo:

$$1-\frac{v^2}{c^2}=\frac{1-r_g/r}{1-r_g/r_0}. \tag{102,7}$$

L'avvicinamento al raggio gravitazionale, che avviene secondo l'orologio di un osservatore lontano in un tempo infinito, avviene invece in un intervallo finito di tempo proprio (il tempo nel sistema di riferimento in moto solidale). Questo è già evidente dall'analisi generale sopra esposta, ma si può fare una verifica anche calcolando direttamente il tempo proprio τ come un integrale invariante

$$c\tau=\int ds=\int\left[c^2g_{00}\frac{dt^2}{dr^2}+g_{11}\right]^{1/2}dr.$$

Ricavando dr/dt dalla (102,5), troviamo per il tempo proprio di caduta dal punto r_0 nel punto r:

$$\tau-\tau_0=\frac{1}{c}\int_{r_0}^{r}\left(\frac{r_g}{r}-\frac{r_g}{r_0}\right)^{-1/2}dr. \tag{102,8}$$

Questo integrale converge per $r\to r_g$.

Raggiunto (in tempo proprio) il raggio gravitazionale, il corpo continuerà a comprimersi, e tutte le sue particelle raggiungeranno il centro in un intervallo di tempo proprio finito; l'istante di caduta di ciascuna porzione di materia nel centro rappresenta una vera singolarità della metrica spazio-temporale. Tuttavia, non si può osservare tutto il processo di compressione del corpo oltre la sfera di Schwarzschild da un sistema di riferimento esterno. All'istante in cui la superficie del corpo passa per questa sfera il tempo t diventa infinito; si può affermare che tutto il processo di collasso oltre la sfera di Schwarzschild avviene « oltre l'infinito temporale » dell'osservatore lontano: esempio limite della relatività del cammino del tempo. In questo quadro non esistono, ovviamente, contraddizioni logiche. Infatti bisogna tener presente che le proprietà del sistema di riferimento in « compressione », nessun segnale può uscire dalla sfera di Schwarzschild in questo riferimento. Questa sfera (in un sistema di riferimento in moto solidale) può essere attraversata da particelle o raggi di luce in una sola direzione, e cioè verso l'interno; una volta entrati dentro la sfera, essi non possono mai piú uscirne. Una tale superficie è detta *orizzonte degli eventi.*

Rispetto all'osservatore esterno, il processo di compressione verso il raggio gravitazionale è accompagnato da « autoisolamento » del corpo. Il tempo di propagazione dei segnali emessi dal corpo tende all'infinito. Infatti, per segnali luminosi $ds^2=0$ anche nel sistema di Schwarzschild si ha $cdt=dr/(1-r_g/r)$; il tempo di propagazione dal punto r ad un certo punto $r_0>r$ è dato dall'inte-

grale

$$c\Delta t = \int_r^{r_0} \frac{dr}{1 - r_g/r} = r_0 - r + r_g \ln \frac{r_0 - r_g}{r - r_g}, \qquad (102,9)$$

che diverge [come pure l'integrale (102,5)] per $r \to r_g$.

Gli intervalli di tempo proprio sulla superficie del corpo rispetto agli intervalli di tempo t dell'osservatore indefinitamente lontano subiscono una contrazione nel rapporto:

$$\sqrt{g_{00}} = \sqrt{1 - \frac{r_g}{r}};$$

di conseguenza, per $r \to r_g$ tutti i processi che avvengono sul corpo, nella percezione dell'osservatore lontano «si appiattiscono» nel tempo. La frequenza della riga spettrale emessa dal corpo e percepita dall'osservatore lontano diminuisce non solamente a causa dello spostamento gravitazionale verso il rosso, ma anche a causa dell'effetto Doppler dovuto al moto della sorgente che cade nel centro insieme alla superficie della sfera. Quando il raggio della sfera è già vicino ad r_g (cosicché la velocità di caduta è ormai vicina alla velocità della luce), questo effetto diminuisce la frequenza nel rapporto

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Big/ \left(1 + \frac{v}{c}\right) \approx \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

A causa di questi due effetti la frequenza osservata si annulla quindi per $r \to r_g$ secondo la legge

$$\omega = \text{costante}\left(1 - \frac{r_g}{r}\right). \qquad (102,10)$$

Cosí, dal punto di vista dell'osservatore lontano il collasso gravitazionale genera la comparsa di un corpo « congelato » che non emette nello spazio circostante nessun segnale ed interagisce con il mondo esterno soltanto con il suo campo gravitazionale statico. Un sistema materiale siffatto vien chiamato *buco nero*.

Per concludere, facciamo ancora un'osservazione di carattere metodologico. Abbiamo visto che per un campo centrale nel vuoto il « sistema dell'osservatore esterno » inerziale all'infinito non è sufficiente: mancano in esso le linee d'universo delle particelle che si muovono all'interno della sfera di Schwarzschild. La metrica (102,3) è invece applicabile anche all'interno della sfera di Schwarzschild, ma in un certo senso nemmeno questo sistema è sufficiente. Esaminiamo infatti, in questo sistema, una particella in moto radiale uscente dal centro. Per $\tau \to \infty$ la sua linea d'universo finisce all'infinito, e per $\tau \to -\infty$ essa deve avvicinarsi asintoticamente ad $r = r_g$ perché nella metrica data all'interno della sfera di Schwarzschild

il moto può effettuarsi soltanto nella direzione verso il centro. D'altra parte, la distanza tra $r = r_g$ e un qualsiasi punto dato $r > r_g$ sarà percorsa dalla particella in un intervallo finito di tempo proprio. Di conseguenza, in tempo proprio, la particella deve raggiungere dal di dentro la sfera di Schwarzschild prima di iniziare a muoversi fuori di essa; ma questa parte della storia della particella non puó essere descritta nel dato sistema di riferimento[1]).

Sottolineiamo però che questa incompletezza si verifica selo nello studio formale della metrica del campo generato da una massa puntiforme. In un problema fisico reale, per esempio in quello del collasso di un corpo esteso, l'incompletezza non si rivela: la soluzione ottenuta per raccordo della metrica (102,3) con la soluzione all'interno della materia sarà, naturalmente, completa e descriverà tutta la storia di tutti i moti possibili delle particelle (le linee d'universo delle particelleche si muovono nella raccordo $r > r_g$ allontanandosi dal centro hanno inizio dalla superficie della sfera prima che questa contraendosi entri nella sfera di Schwarzschild).

PROBLEMI

1. Trovare i raggi delle orbite circolari per una particella nel campo di un buco nero (*S. A. Kaplan*, 1949).

Soluzione. La dipendenza $r(t)$ per una particella in moto nel campo schwarzschildiano è data dalla formula (101,4), oppure in forma differenziale:

$$\frac{1}{1-r_g/r}\frac{dr}{c\,dt}=\frac{1}{\mathscr{E}_0}\left[\mathscr{E}_0^2-U^2(r)\right]^{1/2}, \tag{1}$$

dove

$$U(r)=mc^2\left[\left(1-\frac{r_g}{r}\right)\left(1+\frac{M^2}{m^2c^2r^2}\right)\right]^{1/2}.$$

(m è la massa della particella, $r_g = 2km'/c^2$ il raggio gravitazionale del corpo centrale di massa m'). La funzione $U(r)$ ha il ruolo di una « energia potenziale efficace » nel senso che la condizione $\mathscr{E}_0 \geqslant U(r)$ definisce (per analogia con la teoria non relativistica) le regioni ammissibili del moto. Nella figura 21 sono date le curve $U(r)$ per differenti valori del momento angolare M della particella.

I raggi delle orbite circolari e i valori corrispondenti di $\mathscr{E}_0$ e di M sono determinati dagli estremi della funzione $U(r)$: i minimi corrispondono alle orbite stabili, i massimi alle orbite instabili. La soluzione compatibile delle equazinoi $U(r) = \mathscr{E}_0$, $U'(r) = 0$ dà:

$$\frac{r}{r_g}=\frac{M^2}{m^2c^2r_g^2}\left[1\pm\sqrt{1-\frac{3m^2c^2r_g^2}{M^2}}\right],$$

$$\mathscr{E}_0=Mc\sqrt{\frac{2}{rr_g}}\left(1-\frac{r_g}{r}\right),$$

---

[1]) La costruzione di un sistema di riferimento, privo di una tale incompletezza, verrà esaminata alla fine del paragrafo prossimo.

dove il segno superiore riguarda le orbite stabili e quello inferiore le orbite instabili. L'orbita circolare stabile, la piú vicina al centro, ha per parametri:

$$r = 3r_g, \quad M = \sqrt{3}\, mcr_g, \quad \mathscr{E}_0 = \sqrt{\frac{8}{9}}\, mc^2.$$

Il raggio minimo dell'orbita instabile è $3r_g/2$ e si ottiene nel caso limite $M \to \infty$,

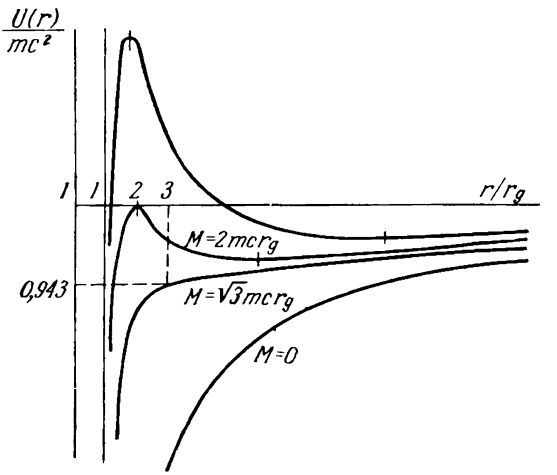

Fig. 21

$\mathscr{E}_0 \to \infty$. La figura 22 rappresenta la dipendenza di r/r_g da M/mcr_g; il suo ramo superiore dà i raggi delle orbite stabili e quello inferiore delle orbite instabili[1]).

2. Per il moto nello stesso campo del problema 1 determinare la sezione d'urto di cattura gravitazionale di particelle provenienti dall'infinito: a) non relativistiche, b) ultrarelativistiche (*J. B. Zeldovič, I. D. Novikov*, 1964).

Soluzione. a) Per velocità v_∞ non relativistica (all'infinito) l'energia della particella è $\mathscr{E}_0 \approx mc^2$. Dalle curve nella fig. 21 si vede che la retta $\mathscr{E}_0 = mc^2$, giace sopra tutte le curve dei potenziali relativi ai momenti angolari $M < 2mcr_g$ cioè di distanza d'urto $\rho < 2cr_g/v_\infty$. Tutte le particelle con tali ρ vengono catturate gravitazionalmente: esse raggiungono (asintoticamente, per $t \to \infty$) la sfera schwarzschildiana, senza uscirne. La sezione d'urto di cattura è:

$$\sigma = 4\pi r_g^2 \left(\frac{c}{v_\infty}\right)^2.$$

b) Nell'equazione (1) del problema 1 il passaggio a una particella ultrarelativistica (o a un raggio di luce) vien fatto con la sostituzione $m \to 0$. Introducendo inoltre la distanza d'urto $\rho = cM/\mathscr{E}_0$, otteniamo:

$$\frac{1}{1 - r_g/r}\,\frac{dr}{c\,dt} = \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} + \frac{\rho^2 r_g}{r^3}}.$$

[1]) Ricordiamo, a titolo di paragone, che nel campo newtoniano sarebbero possibili (e stabili) le orbite circolari a qualsiasi distanza dal centro (il raggio è legato al momento angolare dalla relazione $r = M^2/km'm^2$).

Le frontiere del moto per r (punti di svolta) sono determinate dagli zeri nell'espressione sotto radice. Come funzioni di ρ, esse sono rappresentate dalla

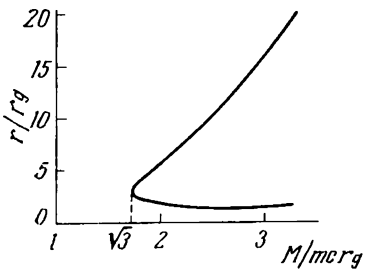

Fig. 22

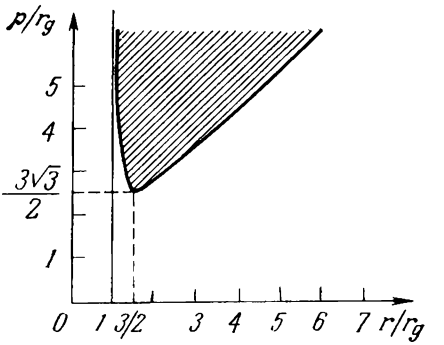

Fig. 23

curva nella figura 23; la parte non tratteggiata del piano corrisponde ai moti possibili. La curva ha un minimo nel punto

$$\rho = \frac{3\sqrt{3}}{2} r_g, \quad r = \frac{3}{2} r_g.$$

Per valori minori della distanza d'urto la particella non incontra il punto di svolta, e prosegue cioè verso la sfera schwarzschildiana. Ne segue che la sezione d'urto di cattura è

$$\sigma = \frac{27}{4} \pi r_g^2.$$

§ 103. *Collasso gravitazionale di una sfera incoerente*

Per esplicitare l'andamento della variazione dello stato interno di un corpo in collasso (compreso il processo della sua compressione nella sfera di Schwarzschild) occorre preventivamente risolvere le equazioni di Einstein per il campo gravitazionale in un mezzo materiale. Nel caso a simmetria centrale, le equazioni di campo hanno delle soluzioni generali se si trascura la pressione della materia, cioè per l'equazione di stato della materia « incoerente »: $p = 0$ (*R. Tolman*, 1934). Sebbene non sia realistico trascurare la pressione della materia, la soluzione generale di questo problema presenta un notevole interesse metodologico.

Come è stato indicato nel § 97, un mezzo incoerente ammette la scelta di un sistema di riferimento che sia contemporaneamente sincrono e in moto solidale[1]). Indicando con τ e R rispettivamente il

[1]) Si suppone inoltre che la materia si muova « senza rotazione » (vedi nota alla pag. 378). Questa condizione è soddisfatta *a priori* nel caso considerato, perché la simmetria sferica suppone un moto puramente radiale della materia.

tempo e la coordinata radiale scelti precisamente in questo modo, scriviamo l'elemento d'intervallo a simmetria sferica nella forma[1])

$$ds^2 = d\tau^2 - e^{\lambda(\tau, R)}\, dR^2 - r^2(\tau, R)\,(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2). \qquad (103,1)$$

La funzione $r(\tau, R)$ rappresenta un « raggio » determinato in maniera tale che $2\pi r$ sia la lunghezza della circonferenza (di centro nell'origine delle coordinate). L' espressione (103,1) fissa univocamente la scelta di τ, ma ammette ancora trasformazioni della coordinata radiale del tipo $R = R(R')$.

Il calcolo delle componenti del tensore di Ricci per questa metrica conduce al seguente sistema di equazioni di Einstein[2]):

$$-e^{-\lambda} r'^2 + 2r\ddot{r} + \dot{r}^2 + 1 = 0, \qquad (103,2)$$

$$-\frac{e^{-\lambda}}{r}(2r'' - r'\lambda') + \frac{\dot{r}\dot{\lambda}}{r} + \ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} + \frac{2\ddot{r}}{r} = 0, \qquad (103,3)$$

$$-\frac{e^{-\lambda}}{r^2}(2rr'' + r'^2 - rr'\lambda') + \frac{1}{r^2}(r\dot{r}\dot{\lambda} + \dot{r}^2 + 1) = 8\pi k\varepsilon, \qquad (103,4)$$

$$2\dot{r}' - \dot{\lambda} r' = 0, \qquad (103,5)$$

dove l'apice indica la derivazione rispetto a R e il punto quella rispetto a τ.

L'integrazione dell'equazione (103,5), fatta direttamente rispetto al tempo, dà

$$e^{\lambda} = \frac{r'^2}{1 + f(R)}, \qquad (103,6)$$

dove $f(R)$ è una funzione arbitraria che soddisfa solo la condizione $1 + f > 0$. Sostituendo questa espressione nella (103,2), otteniamo

$$2r\ddot{r} + \dot{r}^2 - f = 0$$

(mentre la sostituzione nella (103,3) non dà nulla di nuovo). Il primo integrale di questa equazione è

$$\dot{r}^2 = f(R) + \frac{F(R)}{r}, \qquad (103,7)$$

---

[1]) In questo paragrafo poniamo $c = 1$.

[2]) Cfr. problema 5 del § 100. Le equazioni dalla (103,2) alla (103,5) si ottengono rispettivamente dalle equazioni (2)-(5) di questo problema, se si pone in esse $\nu = 0$, $e^{\mu} = r^2$, $p = 0$. Notiamo che la seconda delle equazioni (6) dello stesso problema dà $\nu' = 0$ per $p = 0$, cioè $\nu = \nu(\tau)$; l'arbitrio nella scelta di τ, rimasto nella metrica (1), permette dunque di annullare ν, circostanza che dimostra nuovamente la possibilità di introdurre il sistema di riferimento sincrono in moto solidale.

dove $F(R)$ è un'altra funzione arbitraria. Ne segue che

$$\tau = \pm \int \frac{dr}{\sqrt{f + \frac{F}{r}}}.$$

La funzione $r(\tau, R)$, che si ottiene per integrazione, può essere rappresentata in forma parametrica:

$$r = \frac{F}{2f}(\operatorname{ch}\eta - 1), \quad \tau_0(R) - \tau = \frac{F}{2f^{3/2}}(\operatorname{sh}\eta - \eta) \text{ per } f > 0, \tag{103,8}$$

$$r = \frac{F}{-2f}(1 - \cos\eta), \quad \tau_0(R) - \tau = \frac{F}{2(-f)^{3/2}}(\eta - \operatorname{sen}\eta) \text{ per } f < 0, \tag{103,9}$$

dove $\tau_0(R)$ è di nuovo una funzione arbitraria. Se invece $f = 0$, si ha

$$r = \left(\frac{9F}{4}\right)^{1/3} [\tau_0(R) - \tau]^{2/3} \text{ per } f = 0. \tag{103,10}$$

In tutti i casi, sostituendo la (103,6) nella (103,4) ed eliminando f con l'aiuto della (103,7), si ottiene la seguente espressione per la densità della materia[1]):

$$8\pi k\varepsilon = \frac{F'}{r'r^2}. \tag{103,11}$$

Le formule dalla (103,6) alla (103,11) determinano la soluzione generale cercata[2]). Notiamo che essa dipende solamente da due funzioni arbitrarie « fisicamente differenti », poiché, sebbene essa contenga tre funzioni f, F, τ_0, la coordinata R può essere ulteriormente sottoposta ad una trasformazione arbitraria $R = R(R')$. Questo numero corrisponde esattamente al fatto che la distribuzione a simmetria centrale piú generale della materia è data da due funzioni (distribuzione della densità e della velocità radiale della materia) e che un campo gravitazionale libero dotato di simmetria centrale non esiste.

Poiché il sistema di riferimento è in moto solidale con la materia, a ciascuna particella della materia corrisponde un determinato valore di R; la funzione $r(\tau, R)$ per questo valore di R determina la legge del moto della data particella, e la derivata $\dot{r}$ è la sua velocità radia-

---

[1]) Le funzioni F, f, τ_0 debbono soddisfare soltanto le condizioni che assicurano la positività di e_λ, r ed ε. Oltre alla condizione già indicata $1 + f > 0$, risulta quindi che anche $F > 0$. Partiremo dal presupposto che anche $F' > 0$, $r' > 0$; si escludono quindi i casi che generano un'intersezione degli strati sferici della materia nel loro moto radiale.

[2]) Questa soluzione non contiene però il caso particolare in cui $r = r(\tau)$ e non dipende da R, in modo che l'equazione (103,5) si riduce ad un'identità; vedi *V. A. Ruban*, JETF, 56, 1914 (1969). Tuttavia questo caso non corrisponde al problema del collasso di un corpo finito.

le. Una proprietà importante della soluzione ottenuta è che le funzioni arbitrarie, che ne fanno parte, date nell'intervallo da 0 ad un certo R_0, determinano completamente il comportamento della sfera di questo raggio; esso non dipende dalle prorrietá di queste funzioni per $R > R_0$. Di conseguenza, si ottiene automaticamente la soluzione del problema interno per qualsiasi sfera finita. La massa totale della sfera è data, conformemente alla (100,23), dall'integrale

$$m = 4\pi \int_0^{r(\tau, R_0)} \varepsilon r^2 \, dr = 4\pi \int_0^{R_0} \varepsilon r^2 r' \, dR.$$

Sostituendo in questa espressione la (103,11) e notando che $F(0) = 0$ (per $R = 0$ deve essere anche $r = 0$), troviamo:

$$m = \frac{F(R_0)}{2k}, \quad r_g = F(R_0) \tag{103,12}$$

(r_g è il raggio gravitazionale della sfera).

Per $F =$ costante $\neq 0$ dall ı (103,11) abbiamo $\varepsilon = 0$, in modo che la soluzione si riferisce ad uı o spazio vuoto, cioè descrive il campo di una massa puntiforme (che si trova al centro, cioè nel punto singolare della metrica). Per esempio, ponendo $F = r_g$, $f = 0$, $\tau_0 = R$, otteniamo la metrica (102,3) [1].

Le formule (103,8), (103,9), (103,10) descrivono (a seconda dei valori assunti dal parametro η) sia la compressione che l'espansione della sfera; sia l'uno che l'altro processo sono in uguale misura ammessi dalle equazioni di campo. Al problema reale del comportamento di un corpo grave instabile corrisponde la compressione, ossia il collasso gravitazionale. Le soluzioni dalla (103,8) alla (103,10) sono scritte in modo tale che la compressione ha luogo quando τ crescendo tende a τ_0. All'isante $\tau = \tau_0(R)$ corrisponde il fatto che la materia con la coordinata radiale data R raggiunga il centro (si deve inoltre avere $\tau_0' > 0$).

Il comportamento limite della metrica all'interno della sfera è identico nei tre casi dalla (103,8) alla (103,10) per $\tau \to \tau_0(R)$:

$$r \approx \left(\frac{9F}{4}\right)^{1/3} (\tau_0 - \tau)^{2/3}, \quad e^{\lambda/2} \approx \left(\frac{2F}{3}\right)^{1/3} \frac{\tau_0'}{\sqrt{1+f}} (\tau_0 - \tau)^{-1/3}. \tag{103,13}$$

Ciò vuol dire che tutte le distanze radiali (nel sistema di riferimento in moto solidale) tendono all'infinito, mentre quelle trasversali tendono a zero; tutti i volumi tendono ugualmente a zero (come $\tau - \tau_0$)[2]. Per guesto motivo la densità della materia

[1]) Invece il caso in cui $F = 0$ [dove, in virtú della (103,7), si ha $r = \sqrt{f}(\tau - \tau_0)$] corrisponde alla mancanza di un campo; con una trasformazione opportuna delle variabili, la metrica può essere ridotta alla forma galileiana.

[2]) La geometria del « piano » passante per il centro è allora tale quale sarebbe su una superficie conica di rotazione le cui generatrici si allungano contemporaneamente mentre le circonferenze si restringono.

aumenta indefinitamente[1]):

$$8\pi k\varepsilon \approx \frac{2F'}{3F\tau_0'(\tau_0-\tau)}. \tag{103 14}$$

Tenendo conto di quanto è stato detto nel § 102, si verifica quindi il collasso di tutta la distribuzione della materia al centro[2]).

Nel caso particolare in cui la funzione $\tau_0(R)$ = costante (cioè tutte le particelle giungono al centro contemporaneamente), il carattere della metrica all'interno della sfera, che si comprime, è diverso. In questo caso si ha

$$r \approx \left(\frac{9F}{3}\right)^{1/3}(\tau_0-\tau)^{2/3}, \quad e^{\lambda/2} \approx \left(\frac{2}{3}\right)^{1/3}\frac{F'}{2F^{2/3}\sqrt{1+f}}(\tau_0-\tau)^{2/3},$$

$$8\pi k\varepsilon \approx \frac{4}{3(\tau_0-\tau)^2}, \tag{103,15}$$

cioè per $\tau \to \tau_0$ tutte le distanze — sia trasversali che radiali — tendono a zero secondo la stessa legge $\sim (\tau_0-\tau)^{2/3}$; la densità della materia tende all'infinito come $(\tau_0-\tau)^{-2}$, e al limite la sua distribuzione diventa omogenea.

Sottolineiamo il fatto che in tutti i casi l'istante del passaggio di una sfera in collasso dentro la sfera di Schwarzschild ($r(\tau, R_0) = r_g$) non è significativo ai fini della dinamica interna (descritta dalla metrica nel sistema di riferimento in moto solidale). Tuttavia, ad ogni istante una parte determinata della sfera si trova già sotto il suo « orizzonte degli eventi ». Analogamente a come $F(R_0)$ determina, conformemente alla (103,12) il raggio gravitazionale di tutta la sfera, cosí $F(R)$ per ogni valore dato di R, è il raggio gravitazionale di quella parte di sfera, che si trova sotto la superficie sferica R = costante; di conseguenza, la parte indicata della sfera è determinata ad ogni istante τ dalla condizione $r(\tau, R) \leqslant F(R)$.

Mostriamo infine in che modo si possono applicare le formule ottenute alla soluzione del problema posto alla fine del § 102: costruire un sistema di riferimento completo per il campo di massa puntiforme[3]).

---

[1]) La comparsa del collasso, qualunque sia la massa della sfera, nella soluzione considerata è la conseguenza naturale del fatto che è stata trascurata la pressione. È ovvio che per $\varepsilon \to \infty$ è, da un punto di vista fisico, inammissibile supporre la materia come incoerente, e si deve ricorrere perciò alle equazioni di stato ultrarelativistiche $p = \varepsilon/3$. Risulta però che il carattere generale delle leggi limite per la compressione non dipende dall'equazione di stato della materia [vedi *E. M. Lifšic, I. M. Khalatnikov*, *JETF* 39, 149 (1960)].

[2]) Il caso τ_0 = costante include, in particolare, anche il collasso di una sfera completamente omogenea (vedi il problema).

[3]) Un tale sistema è siato trovato in altre variabili da *M. Kruskal* [vedi *Phys. Rev.* 119, 1743 (1960)]. La soluzione riportata qui nella forma, dove il sistema di riferimento è sincrono, appartiene a *I. D. Novikov* (1963).

Per raggiungere questo obiettivo, bisogna partire da una metrica nel vuoto tale che contenga sia la regione spazio-temporale in contrazione che quella in espansione. Tale è la soluzione (103,8) nella quale bisogna porre F = costante $= r_g$. Scegliendo anche

$$f = -\frac{1}{(R/r_g)^2+1}, \quad \tau_0 = \frac{\pi}{2} r_g (-f)^{-3/2},$$

otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{r}{r_g} &= \frac{1}{2}\left(\frac{R^2}{r_g^2}+1\right)(1-\cos\eta), \\ \frac{\tau}{r_g} &= \frac{1}{2}\left(\frac{R^2}{r_g^2}+1\right)^{3/2}(\pi-\eta+\operatorname{sen}\eta); \end{aligned} \tag{103,16}$$

quando il parametro η prende i valori da 2π a 0, il tempo τ (per un valore dato di R) cresce in modo monotono, mentre r partendo da zero cresce fino ad un massimo e quindi nuovamente decresce sino a zero.

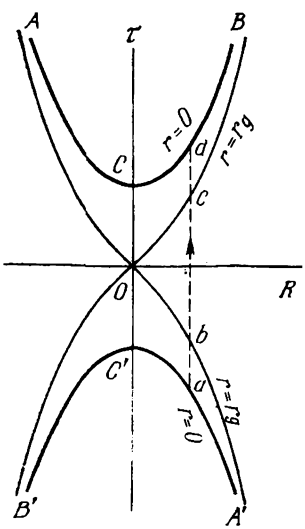

Fig. 24

Nella figura 24 le curve ACB e $A'C'B'$ corrispondono al punto $r = 0$ (ad esse corrispondono i valori del parametro $\eta = 2\pi$ e $\eta = 0$). Le curve AOA' e BOB' corrispondono alla sfera schwarzschildiana $r = r_g$. Tra $A'C'B'$ e $A'OB'$ si trova una regione spazio-temporale dove il moto possibile è solo quello di allontanamento dal centro, e tra ACB e AOB una regione dove il moto si effettua solo verso il centro.

La linea d'universo della particella in quiete relativamente al dato sistema di riferimento è una retta verticale (R = costante). Essa parte da $r = 0$ (punto a), interseca la sfera di Schwarzschild nel punto b, si allontana al massimo ($r = r_g\ (R^2/r_g^2 + 1)$ all'istante $\tau = 0$, e quindi la particella comincia di nuovo a cadere verso la sfera di Schwarzschild, l'interseca nel punto c e raggiunge nuovamente $r = 0$ (punto d) all'istante

$$\tau = r_g \frac{\pi}{2}\left(\frac{R^2}{r_g^2}+1\right)^{3/2}.$$

Il sistema ottenuto è completo: le due estremi della linea d'universo di ogni particella che si muove nel campo o giacciono sulla singolarità effettiva $r = 0$, o vano all'infinito. La metrica incompleta (102,3) invece comprende solo la regione a destra della curva AOA' (o a sinistra di BOB'), mentre lo stesso sistema di

riferimento incompleto « in espansione » comprende la regione a destra di BOB' (o a sinistra di AOA'). Per quanto riguarda il sistema di riferimento di Schwarzschild con la metrica (100,14), esso comprende solamente la regione a destra di BOA' (o a sinistra di AOB').

PROBLEMA

Trovare la soluzione del problema interno per il collasso gravitazionale di una sfera incoerente omogenea la cui materia è all'istante iniziale in quiete.

Soluzione. Ponendo

$$\tau_0 = \text{costante}, \quad f = -\operatorname{sen}^2 R, \quad F = 2a_0 \operatorname{sen}^3 R,$$

otteniamo:

$$r = a_0 \operatorname{sen} R\,(1 - \cos\eta), \quad \tau - \tau_0 = a_0\,(\eta - \operatorname{sen}\eta) \tag{1}$$

(la coordinata radiale R è qui adimensionale e prende i valori da 0 a 2π). La densità è

$$8\pi k\varepsilon = \frac{6}{a_0^2\,(1-\cos\eta)^3} \tag{2}$$

e per τ data non dipende da R, la sfera è cioè omogenea. La metrica (103,1) si può rappresentare ricavando r dalla (1) nella forma

$$ds^2 = d\tau^2 - a^2(\tau)\,[dR^2 + \operatorname{sen}^2 R\,(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2)], \tag{3}$$

$$a = a_0\,(1 - \cos\eta).$$

Notiamo che essa coincide con la soluzione di Friedman per la metrica di un universo completamente riempito di una materia incoerente omogenea (§ 112). È un risultato del tutto naturale, perché una sfera ricavata da materia distribuita uniformemente è dotata di simmetria centrale[1]).

La condizione iniziale posta può essere soddisfatta dalla soluzione (1) con una scelta opportuna delle costanti a_0, τ_0. Cambiando qui per comodità la definizione del parametro ($\eta \to \pi - \eta$), rappresentiamo la soluzione nella forma

$$r = \frac{r_0}{2}\,\frac{\operatorname{sen} R}{\operatorname{sen} R_0}\,(1 + \cos\eta), \quad \tau = \frac{r_0}{2\operatorname{sen} R_0}\,(\eta + \operatorname{sen}\eta), \tag{4}$$

dove (conformemente alla (103,12)) il raggio gravitazionale della sfera è $r_g = r_0 \operatorname{sen}^2 R_0$. All'istante iniziale ($\tau = 0$, $\eta = 0$) la materia è in quiete ($r = 0$), e $2\pi r_0 = 2\pi r\,(0, R_0)$ è la lunghezza iniziale della circonferenza della sfera. La caduta di tutta la materia nel centro avviene all'istante $\tau = \pi r_0/2 \operatorname{sen} R_0$.

Il tempo t nel sistema di riferimento dell'osservatore lontano (sistema di Schwarzschild) è legato al tempo proprio τ sulla sfera dall'equazione

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \dfrac{r_g}{r}},$$

dove per r bisogna intendere il valore $r\,(\tau, R_0)$ che corrisponde alla superficie della sfera. L'integrazione di questa equazione conduce alla seguente espressione

---

[1]) La metrica (3) corrisponde ad uno spazio di curvatura positiva costante. Analogamente, ponendo $f = \operatorname{sh}^2 R$, $F = 2a_0 \operatorname{sh}^3 R$, otteniamo la soluzione che corrisponde ad uno spazio di curvatura negativa costante (§ 113).

di t in funzione dello stesso parametro η:

$$\frac{t}{r_g} = \ln \frac{\operatorname{ctg} R_0 + \operatorname{tg} \frac{\eta}{2}}{\operatorname{ctg} R_0 - \operatorname{tg} \frac{\eta}{2}} + \operatorname{ctg} R_0 \left[\eta + \frac{1}{2 \operatorname{sen}^2 R_0} (\eta + \operatorname{sen} \eta) \right] \tag{5}$$

fdove l'istante $t = 0$ corrisponde all'istante $\tau = 0$). Al passaggio della super-(icie della sfera attraverso la sfera schwarzschildiana ($r(\tau, R_0) = r_g$) corrisponde il valore del parametro η, determinato dall'uguaglianza

$$\cos^2 \frac{\eta}{2} = \frac{r_g}{r_0} = \operatorname{sen}^2 R_0.$$

All'avvicinarsi a questo valore, il tempo t tende all'infinito, in accordo con quanto è stato detto nel § 102[1]).

§ 104. *Collasso gravitazionale di corpi non sferici e di corpi rotanti*

Tutto quanto è stato detto nei due paragrafi precedenti si riferiva letteralmente a corpi rigorosamente a simmetria sferica. Da semplici considerazioni risulta tuttavia che l'aspetto qualitativo del collasso gravitazionale resta lo stesso anche per corpi con lieve deviazione dalla simmetria sferica (*A. G. Doroškevic, J. B. Zeldovic, I. D. Novikov*, 1965).

Parleremo in un primo momento dei corpi la cui deviazione dalla simmetria centrale è dovuta alla distribuzione della materia in essi, e non alla rotazione del corpo.

È evidente che se un corpo a simmetria centrale è instabile dal punto di vista gravitazionale, questa instabilità si manterrà anche dopo una piccola violazione della simmetria, cosicché un tale corpo sarà pure in collasso. Considerando una lieve assimmetria come una piccola perturbazione, è possibile seguirne l'andamento (nel sistema di riferimento in moto solidale) nel processo di contrazione del corpo. In generale, le perturbazioni si intensificano a misura che aumenta la densità del corpo. Se le perturbazioni erano piccole all'inizio della contrazione, esse restano ancora sufficientemente piccole anche all'istante in cui il corpo raggiunge il raggio gravitazionale; nel § 103 è stato indicato che questo istante non è significativo per la dinamica interna del corpo in compressione, e la sua densità è ancora finita[2]).

---

[1]) La funzione $r(\tau, R_0)$, determinata dalle formule (4), coincide, naturalmente, con la funzione calcolata nella metrica esterna e data dall'integrale (102,8). Lo stesso riguarda la funzione $t(r)$ determinata dalle formule (4) e (5): essa coincide con quella data dall'integrale (102,5).

[2]) L'andamento delle perturbazioni nella distribuzione non stazionaria omogenea infinita della materia sarà esaminato nel § 115 (le formule che si otterranno, si riferiscono in misura uguale sia al caso di espansione che al caso di contrazione). L'eterogeneità della distribuzione non perturbata o la forma limitata del corpo non cambiano l'affermazione fatta.

Essendo piccole le perturbazioni interne del corpo, restano pure piccole le perturbazioni del campo gravitazionale esterno a simmetria centrale, generato da questo corpo. Ciò vuol dire che resta quasi invariata anche la superficie dell'« orizzonte degli eventi », ossia la sfera schwarzschildiana, e nulla ostacola il corpo in collasso (nel sistema di riferimento in moto solidale) ad attraversarla.

L'osservatore esterno non riceve nessuna notizia su un ulteriore aumento delle perturbazioni all'interno del corpo, perché dal di sotto dell'« orizzonte del eventi » non esce proprio segnale alcuno; tutto questo processo resta « al di là dell'infinito temporale » dell'osservatore lontano. Ne segue, a sua volta, che rispetto al sistema di riferimento esterno il campo gravitazionale di un corpo in collasso deve tendere a diventare stazionario allorché il corpo si avvicina asintoticamente al raggio gravitazionale. Il tempo caratteristico di questo avvicinamento è molto piccolo ($\sim r_g/c$); trascorso questo tempo, si può supporre che nello spazio esterno restino soltanto le perturbazioni del campo a simmetria centrale sorte precedentemente. Tutti gli effetti della perturbazione debbono diffondersi nello spazio, col passar del tempo, come onde gravitazionali, terminando all'infinito (o sotto l'orizzonte).

In un campo gravitazionale esterno creato da un buco nero in formazione non possono restare neanche le perturbazioni statiche, non dipendenti dal tempo. Questa conclusione può essere dedotta da un'analisi delle perturbazioni costanti imposte al campo di Schwarzschild nel vuoto. Questa analisi dimostra che nel caso statico qualsiasi perturbazione (decrescente all'infinito) cresce indefinitamente quando ci si avvicina alla sfera di Schwarzschild del problema imperturbato[1]); ma come è stato già detto, non c'è nessun motivo per cui possono sorgere grandi perturbazioni del campo esterno nel caso dato.

Le deviazioni dalla simmetria sferica nella distribuzione della densità del corpo sono descritte dai momenti di quadrupolo e di multipolo di questa distribuzione; ciascuno di questi momenti porta un proprio contributo al campo gravitazionale esterno. L'affermazione fatta significa che tutte queste perturbazioni del campo esterno si smorzano nelle fasi finali (dal punto di vista dell'osservatore esterno) del collasso[2]). Una volta formatosi il campo gravitazio-

---

[1]) Vedi *T. Regge, J. A. Wheeler, Phys. Rev.* 108, 1063 (1957). Sottolineiamo che si tratta di perturbazioni provenienti dal corpo centrale stesso. La condizione posta all'infinito esclude i casi in cui le perturbazioni statiche provengano da sorgenti esterne: in questi casi le piccole perturbazioni non fanno che alterare alquanto la sfera di Schwarzschild, senza cambiarne le proprietà qualitative e senza creare in essa una vera singolarità spazio-temporale.

[2]) Per la legge di questo smorzamento si veda *R. H. Price, Phys. Rev.* D 5, 2419, 2439 (1972). Le perturbazioni iniziali statiche l-polari di un campo gravitazionale esterno si smorzano nel collasso come $1/t^{2l+2}$.

nale di un buco nero, è nuovamente il campo centrale simmetrico di Schwarzschild, determinato unicamente dalla massa totale del corpo.

Non è del tutto chiara la questione sulla sorte finale del corpo, che si trova in collasso, sotto l'« orizzonte degli eventi » (non osservabile dal sistema di riferimento esterno). Si può evidentemente affermare che anche qui il collasso finisce in una vera singolarità spazio-temporale della metrica, una singolarità però di tipo assolutamente diverso dal caso a simmetria centrale. Tuttavia, finora questo problema non è ancora chiarito sino in fondo.

Prendiamo il caso in cui una lieve violazione della simmetria centrale è dovuta non soltanto alla distribuzione della densità, ma anche alla rotazione globale del corpo; se la deviazione dalla simmetria sferica è supposta piccola, questo significa intanto che la rotazione è sufficientemente lenta. Tutto quanto abbiamo detto sopra resta in vigore, con una sola eccezione. È ovvio *a priori* che, in virtú della conservazione del momento angolare totale **M** del corpo, il campo del buco nero non può dipendere in questo caso solo dalla massa. A ciò corrisponde appunto il fatto che tra le perturbazioni stazionarie (ma non statiche), non dipendenti dal tempo, del campo gravitazionale a simmetria centrale ne esiste una che non cresce indefinitamente per $r \to r_g$. Questa perturbazione è legata precisamente alla rotazione del corpo e viene descritta da una piccola componente non diagonale aggiunta al tensore metrico schwarzschildiano g_{ik} (in coordinate $x^0 = t$, $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \varphi$)[1]):

$$g_{03} = \frac{2kM}{r} \operatorname{sen}^2 \theta \tag{104,1}$$

(vedi problema del § 105). Questa espressione resta valida (nello spazio esterno) quando il corpo si avvicina al raggio gravitazionale, e, di conseguenza, il campo di un buco nero lentamente rotante sarà (in prima approssimazione rispetto al momento piccolo M) un campo a simmetria centrale schwarzschildiano con una piccola correzione (104,1). Questo campo non è piú statico, bensí solamente stazionario.

Se il collasso gravitazionale è ammesso per piccole violazioni della simmetria sferica, allora un collasso dello stesso carattere (il corpo finisce sotto l'orizzonte degli eventi) deve essere possibile anche per deviazioni notevoli dalla sfericità; le condizioni per cui ciò avvenga non sono ancora state studiate. Indipendentemente da queste condizioni si può evidentemente affermare che le proprietà di una formazione (buco nero rotante) generata da questo collasso non dipendono, dal punto di vista dell'osservatore esterno, da nessuna caratteristica del corpo iniziale, eccezione fatta soltanto per la sua massa m e il momento angolare M [1]).

---

[1]) In questo paragrafo poniamo $c = 1$.

[1]) A scanso di equivoci, ricordiamo che non consideriamo qui corpi portanti una carica elettrica non compensata.

Se il corpo non ruota come un unico insieme ($M = 0$), il campo gravitazionale esterno del buco nero è il campo a simmetria centrale di Schwarzschild[1]).

Il campo gravitazionale del buco nero rotante è dato invece dalla seguente *metrica stazionaria a simmetria assiale di Kerr*[2]):

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g r}{\rho^2}\right) dt^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 -$$

$$- \left(r^2 + a^2 + \frac{r_g r a^2}{\rho^2} \operatorname{sen}^2\theta\right) \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2 + \frac{2 r_g r a}{\rho^2} \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi\, dt, \qquad (104,2)$$

dove è posto:

$$\Delta = r^2 - r_g r + a^2, \quad \rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2\theta, \qquad (104,3)$$

ed r_g è, come prima, $r_g = 2mk$. Questa metrica dipende da due parametri costanti m ed a, il cui senso risulta evidente dalla forma limite della metrica per grandi distanze r. Approssimando a meno dei termini $\sim 1/r$, si ha:

$$g_{00} \approx 1 - \frac{r_g}{r}, \quad g_{03} \approx \frac{r_g a}{r} \operatorname{sen}^2\theta.$$

Confrontando la prima espressione con la (100,18) e la seconda con la (104,1) si trova che m è la massa del corpo e che il parametro a è legato al momento angolare M dalla relazione

$$M = ma \qquad (104,4)$$

(in unità ordinarie $M = mac$). Per $a = 0$ la metrica di Kerr si trasforma nella metrica schwarzschildiana nella sua forma ordinaria (100,14)[3]). Notiamo anche che la forma (104,2) è simmetrica rispetto all'inversione del tempo: questa trasformazione ($t \to -t$) inverte anche la direzione di rotazione, cioè il segno del momento angolare ($a \to -a$), e, di conseguenza, ds^2 rimane invariato.

---

[1]) Questa affermazione è confermata sostanzialmente dal seguente teorema di Israel: tra tutte le soluzioni statiche, galileiane all'infinito, delle equazioni di Einstein con superfici spaziali chiuse g_{00} = costante, t = costante, la soluzione di Schwarzschild è l'unica ad avere l'orizzonte ($g_{00} = 0$) senza singolarità nella metrica spazio-temporale [per la dimostrazione di questa affermazione si veda *W. Israel*, *Phys. Rev.* 164, 1776 (1967)].

[2]) Questa soluzione delle equazioni di Einstein è stata trovata in un'altra forma da *R. Kerr* (1963) e ridotta alla forma (104,2) da *R. H. Boyer* e *R. W. Lindquist* (1967). Nella letteratura fisica non esiste una costruzione analitica della metrica (104,2), adeguata al suo significato fisico, e la verifica diretta di questa soluzione delle equazioni di Einstein comporta calcoli voluminosi. L'affermazione sull'unicità della metrica di Kerr come campo di un buco nero rotante è provata da un teorema analogo a quello menzionato di Israel per il campo di Schwarzschild [vedi *B. Carter*, *Phys. Rev. Lett.* 26, 331 (1971)].

[3]) Con l'approssimazione sino ai termini del primo ordine in a la metrica (104,2), per $a \ll 1$, differisce invece dalla metrica di Schwarzschild soltanto per il termine $(2r_g a/r) \operatorname{sen}^2\theta d\varphi dt$, il che è in accordo con il caso indicato precedentemente di una lieve deviazione dalla simmetria sferica.

Il determinante del tensore metrico nella (104,2) è:

$$-g = \rho^4 \operatorname{sen}^2 \theta. \tag{104,5}$$

Scriviamo anche le componenti controvarianti g^{ik}, riducendole alle seguenti espressioni del quadrato dell'operatore del 4-gradiente:

$$g^{ik} \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^k} = \frac{1}{\Delta} \left(r^2 + a^2 + \frac{r_g r a^2}{\rho^2} \operatorname{sen}^2 \theta \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^2 - \frac{\Delta}{\rho^2} \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^2 -$$
$$- \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right)^2 - \frac{1}{\Delta \operatorname{sen}^2 \theta} \left(1 - \frac{r_g r}{\rho^2} \right) \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \right)^2 + \frac{2 r_g r a}{\rho^2 \Delta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial t}. \tag{104,6}$$

Per $m = 0$, in assenza di una massa d'attrazione, la metrica (104,2) diventare galileiana. Infatti, l'espressione

$$ds^2 = dt^2 - \frac{\rho^2}{r^2 + a^2} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 - (r^2 + a^2) \operatorname{sen}^2 \theta \, d\varphi^2 \tag{104,7}$$

rappresenta la metrica galileiana

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2,$$

scritta in coordinate spaziali ellittiche « schiacciate »; la trasformazione di queste coordinate in coordinate cartesiane è data dalle formule

$$x = \sqrt{r^2 + a^2} \operatorname{sen} \theta \cos \varphi,$$
$$y = \sqrt{r^2 + a^2} \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi,$$
$$z = r \cos \theta;$$

le superfici r = costante sono ellissoidi schiacciati di rotazione:

$$\frac{x^2 + y^2}{r^2 + a^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1.$$

La metrica (104,2) ha singolarità fittizie, come pure la metrica di Schwarzschild (100,14) ha una singolarità fittizia per $r = r_g$. Mentre nel caso schwarzschildiano sulla superficie $r = r_g$ g_{00} si annulla mentre g_{11} diverge, nella metrica di Kerr queste due superfici sono separate. L'uguaglianza $g_{00} = 0$ ha luogo per $\rho^2 = r r_g$; la maggiore delle due radici di questa equazione di secondo grado è

$$r_0 = \frac{r_g}{2} + \sqrt{\left(\frac{r_g}{2} \right)^2 - a^2 \cos^2 \theta} \quad (g_{00} = 0). \tag{104,8}$$

La g_{11} diverge per $\Delta = 0$; la maggiore delle radici di questa equazione è

$$r_{0r} = \frac{r_g}{2} + \sqrt{\left(\frac{r_g}{2} \right)^2 - a^2} \quad (g_{11} = \infty). \tag{104,9}$$

Le superfici $r = r_0$ ed $r = r_{or}$, il cui significato fisico verrà precisato piú avanti, saranno per brevità indicate con S_0 ed S_{or}. La superficie S_{or} rappresenta una sfera e la superficie S_0 una figura di rotazione schiacciata; S_{or} si trova all'interno di S_0 e ambedue le superfici si toccano ai poli ($\theta = 0$ e $\theta = \pi$).

Come si vede dalle (104,8) e (104,9), le superfici S_0 ed S_{or} esistono soltanto per $a \leqslant r_g/2$. Per $a > r_g/2$ il carattere della metrica (104,2) cambia radicalmente, e in essa appaiono proprietà fisiche inaccettabili che violano il principio di causalità[1]).

Il fatto che la metrica di Kerr non abbia piú senso per $a > r_g/2$ significa che il valore

$$a_{\max} = \frac{r_g}{2}, \qquad M_{\max} = \frac{m r_g}{2} \tag{104,10}$$

dà la frontiera superiore dei valori possibili del momento angolare del buco nero. È inoltre evidente, che bisogna considerare questo valore come un limite al quale ci si può avvicinare arbitrariamente, senza però mai raggiungere l'uguaglianza $a = a_{\max}$, che è impossibile. I valori limite dei raggi delle superfici S_0 ed S_{or} sono rispettivamente

$$r_0 = \frac{r_g}{2}(1 + \operatorname{sen}\theta), \qquad r_{or} = \frac{r_g}{2}. \tag{104,11}$$

Mostriamo che la superficie S_{or} è un orizzonte di eventi che lascia passare le particelle in moto e i raggi di luce in una sola direzione: verso l'interno.

Mostriamo preliminarmente da un punto di vista piú generale che la proprietà di lasciar passare in un solo senso le linee d'universo delle particelle in moto è propria di ogni ipersuperficie nulla (cioè un'ipersuperficie la cui normale in ogni punto è un quadrivettore nullo). Supponiamo che l'ipersuperficie sia data dall'equazione $f(x^0, x^1, x^2, x^3) =$ costante. La sua normale è diretta lungo il 4-gradiente $n_i = \partial f/\partial x^i$, in modo che, per ipersuperficie nulla, si ha $n_i\, n^i = 0$. In altri termini, ciò vuol dire che la direzione della normale giace sulla ipersuperficie stessa: cioè sulla ipersuperficie $df = n_i\, dx^i = 0$; questa uguaglianza è soddisfatta quando le direzioni dei quadrivettori dx^i e n^i coincidono. Inoltre, in virtú della stessa

---

[1]) Queste violazioni inplicano la comparsa di linee d'universo chiuse del genere tempo che permetterebbero di andare nel passato e di tornare poi nel futuro. Notiamo subito che le stesse violazioni si verificano allorché la metrica di Kerr viene prolungata all'interno di S_{or} già per $a < r_g/2$, il che dimostra l'incompatibilità fisica di questa metrica all'interno di S_{or} (riparleremo piú avanti di questo fatto). Per la stessa ragione non presentano un interesse fisico le superfici definite dalle radici minori delle equazioni di secondo grado $g_{00} = 0$ e $1/g_{11} = 0$ e situate all'interno di S_{or}; vedi *B. Carter*, *Phys. Rev.* **174**, 1559 (1968).

proprietà $n_i n^i = 0$, per l'elemento di lunghezza sull'ipersuperficie avente la stessa direzione si ha: $ds = 0$. In altri termini, la ipersuperficie tocca lungo questa direzione, in un punto dato, il cono di luce costruito a partire da questo punto. In tal modo, i coni di luce, costruiti (per esempio, verso il futuro) a partire da ciascun punto della ipersuperficie nulla, giacciono completamente da una delle sue parti toccando (in questi punti) l'ipersuperficie lungo una delle sue generatrici. Ma questa proprietà significa appunto che le linee d'universo delle particelle (dirette verso il futuro) o dei raggi luminosi possono intersecare l'ipersuperficie soltanto da una parte.

La proprietà citata delle ipersuperfici nulle ha carattere fisicamente banale: il passaggio in un solo senso attraverso queste superfici esprime semplicemente l'impossibilità di un moto a velocità superiore a quella della luce (l'ipersuperficie $x = t$ in uno spazio-tempo ne fornisce un esempio elementare). Una nuova situazione fisica non banale appare quando la ipersuperficie nulla si estende all'infinito spaziale, cosicché le sue sezioni $t =$ $=$ costante sono superfici spaziali chiuse; queste superfici sono l'orizzonte degli eventi nel senso descritto per la sfera di Shwarzschild in un campo gravitazionale a simmetria centrale.

Tale è anche la superficie S_{or} nel campo di Kerr. In effetti, la condizione $n_i n^i = 0$ per una ipersuperficie tipo $f(r, \theta) =$ costante nel campo di Kerr ha la forma

$$g^{11}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 + g^{22}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2 = \frac{1}{\rho^2}\left[\Delta\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2\right] = 0 \qquad (104,12)$$

(g^{ik} è ottenuto dalla (104,6)). Questa equazione è soddisfatta su S_{or} (per la quale $\partial f/\partial\theta = 0$, $\Delta = 0$).

Il prolungamento della metrica di Kerr all'interno della superficie dell'orizzonte (come è stato mostrato nei §§ 102, 103 per la metrica di Schwarzschild) non ha un senso fisico. Un tale prolungamento dipenderebbe solamente dagli stessi due parametri (m ed a), come un campo al di fuori di S_{or}; risulta quindi chiaro che esso non potrebbe essere correlato con il problema fisico della sorte di un corpo in collasso dopo la sua scomparsa sotto l'orizzonte. Gli effetti di non sfericità nel sistema di riferimento in moto solidale non si smorzano affatto, al contrario, essi debbono aumentare con l'ulteriore compressione del corpo, e, di conseguenza, non c'è nessuna ragione di aspettarsi che il campo sotto l'orizzonte possa essere determinato soltanto dalla massa e dal momento angolare del corpo[1]).

Consideriamo ora le proprietà della superficie S_0 e lo spazio tra quest'ultima e l'orizzonte (questa regione del campo di Kerr si chiama *ergosfera*).

---

[1]) Questa situazione si ripete matematicamente nella già indicata violazione del principio di causalità quando la metrica di Kerr viene prolungata all'interno di S_{or}.

La proprietà fondamentale dell'ergosfera è che nessuna particella può restare in essa in quiete rispetto al sistema dell'osservatore lontano: per r, θ, φ costanti si ha $ds^2 < 0$, cioè l'intervallo non è del genere tempo come dovrebbe essere per la linea d'universo di una particella; la variabile t perde il suo carattere temporale. In tal modo, un sistema di riferimento rigido non può estendersi dall'infinito all'interno dell'ergosfera, e in questo senso la superficie S_0 può essere chiamata limite di stazionarietà.

Il carattere del moto delle particelle nell'ergosfera si distingue sostanzialmente da quello che abbiamo avuto sotto l'orizzonte nel campo di Schwarzschild. In questo caso le particelle non potevano essere in quiete relativamente al sistema di riferimento esterno, ed inoltre, era impossibile l'equazione r = costante: tutte le particelle dovevano muoversi radialmente verso il centro. Nell'ergosfera del campo di Kerr è invece impossibile per la particella l'equazione φ = costante (le particelle debbono necessariamente ruotare attorno all'asse di simmetria del campo), ma per essa è possibile r = costante. Inoltre, le particelle (e i raggi di luce) possono muoversi sia diminuendo sia aumentando il valore di r, uscendo dall'ergosfera nello spazio esterno. Con quest'ultimo risultato si accorda anche la possibilità per una perticella proveniente dallo spazio esterno, di raggiungere l'ergosfera: il tempo necessario a questa particella (o ad un raggio di luce) per raggiungere la superficie S_0, misurato con l'orologio t dell'osservatore lontano, per tutta la S_0 è un intervallo finito tranne che per i suoi poli, dove S_0 tocca S_{or}; il tempo necessario per raggiungere questi punti infatti, come del resto tutti i punti della superficie S_{or} è, naturalmente, sempre infinito[1]).

Essendo inevitabile il moto rotatorio delle particelle nell'ergosfera, la forma naturale della rappresentazione della metrica in questa regione è

$$ds^2 = \left(g_{00} - \frac{g_{03}^2}{g_{33}}\right) dt^2 + g_{11}\, dr^2 + g_{22}\, d\theta^2 + g_{33}\left(d\varphi + \frac{g_{03}}{g_{33}}\, dt\right)^2. \qquad (104,13)$$

Il coefficiente di dt^2

$$g_{00} - \frac{g_{03}^2}{g_{33}} = \frac{\Delta}{r^2 + a^2 + r_g r a^2 \operatorname{sen}^2\theta/\rho^2}$$

è ovunque positivo al di fuori di S_{or} (e non si annulla per S_0); l'intervallo ds è del genere tempo per r = costante, θ = costante, $d\varphi = -(g_{03}/g_{33})\, dt$. La grandezza

$$-\frac{g_{03}}{g_{33}} = \frac{r_g a r}{\rho^2 (r^2 + a^2) + r_g r a^2 \operatorname{sen}^2\theta} \qquad (104,14)$$

[1]) Il tempo necessario per raggiungere singoli punti di S_0 può risultare anch'esso infinito in casi particolari di valori speciali dell'energia e del momento angolare della particella scelti in maniera tale da annullare la velocità radiale in un punto dato su S_0.

ha il ruolo della « velocità angolare di rotazione dell'ergosfera » relativamente al sistema di riferimento esterno (la direzione di questa rotazione coincide con quella della rotazione del corpo centrale)[1].

L'energia della particella, definita come la derivata $-\partial S/\partial\tau$ dell'azione rispetto al tempo proprio τ della particella, sincronizzato lungo la traiettoria, è sempre positiva (vedi § 88). Come però è stato spiegato nel § 88, nel moto di una particella in un campo non dipendente dalla variabile t, si conserva l'energia $\mathscr{E}_0$ definita come la derivata $-\partial S/\partial t$; questa grandezza coincide con la componente covariante del 4-impulso $p_0 = mu_0 = mg_{0i}\,dx^i$ (m è qui la massa della particella). Il fatto che la variabile t (il tempo indicato dall'orologio dell'osservatore lontano) non ha un carattere temporale nell'ergosfera crea una situazione singolare: in questa regione $g_{00} < 0$, e la grandezza

$$\mathscr{E}_0 = m\,(g_{00}u^0 + g_{03}u^3) = m\left(g_{00}\frac{dt}{ds} + g_{03}\frac{d\varphi}{ds}\right)$$

può essere perciò negativa. Poiché nello spazio esterno, dove t é il tempo, la energia $\mathscr{E}_0$ non può essere negativa, una particella con $\mathscr{E}_0 < 0$ non può entrare nell'ergosfera dall'esterno. Una sorgente possibile di formazione di questa particella è la scomposizione, per esempio, in due parti di un corpo capitato nell'ergosfera, di cui una sia catturata sull'orbita con « energia negativa ». Questa parte non può ormai uscire dall'ergosfera e va a finire sotto l'orizzonte. La seconda parte invece può tornare nello spazio esterno; poiché $\mathscr{E}_0$ è una grandezza additiva conservativa, l'energia di questa parte risulterà inoltre maggiore dell'energia iniziale del corpo: avverrà cioè l'estrazione d'energia dal buco nero rotante (*R. Penrose*, 1969).

Notiamo infine, che sebbene la superficie S_0 non sia singolare per la metrica spazo-temporale, una metrica puramente spaziale (nel sistema di riferimento (104,2)) ha qui una singolarità. Fuori di S_0, dove la variabile t ha un carattere temporale, il tensore metrico spaziale viene calcolato mediante la (84,7) e l'elemento di distan-

---

[1]) Notiamo il fatto che gli intervalli di tempo proprio delle particelle in moto lungo le frontiere dell'ergosfera non si annullano contemporaneamente a g_{00}. In questo senso, la S_0 non è la superficie dello « spostamento infinito verso il rosso »; le frequenze dei segnali luminosi emessi da una sorgente in moto su di essa (in generale, una sorgente non può essere qui in quiete) per un osservatore lontano non si annullano. Ricordiamo che sulla sfera schwarzschildiana in un campo a simmetria centrale non vi potevano essere in generale né sorgenti immobili, né sorgenti in moto (un'ipersuperficie nulla non può contenere in sé linee d'universo del genere tempo). Lo « spostamento infinito verso il rosso» consisteva in quel caso nel fatto che per $r \to r_g$ gli intervalli di tempo proprio $d\tau = \sqrt{g_{00}}dt$ (per dt dato), misurati con un orologio fermo rispetto al sistema di riferimento, tendevano a zero.

za spaziale assume la forma

$$dl^2 = \frac{\rho^2}{\Delta}\, dr^2 + \rho^2\, d\theta^2 + \frac{\Delta \operatorname{sen}^2\theta}{1 - rr_g/\rho^2}\, d\varphi^2. \qquad (104,15)$$

In possimità di S_0, le lunghezze delle parallele (θ = costante, r = = costante) tendono all'infinito secondo la legge $2\pi a \operatorname{sen}^2\theta/\sqrt{g_{00}}$. Qui tende all'infinito anche la differenza delle indicazioni degli orologi (vedi la (88,5)) sincronizzati lungo un contorno chiuso.

PROBLEMI

1. Separare le variabili nell'equazione di Hamilton-Jacobi di una particella in moto nel campo di Kerr (*B. Carter*, 1968).

Soluzione. Nell'equazione di Hamilton-Jacobi

$$g^{ik}\frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^k} - m^2 = 0$$

(m è la massa della particella; da non confondere con la massa del corpo centrale!) g^{ik} è ricavata dalla (104,6), il tempo t e l'angolo φ sono variabili cicliche; esse entrano quindi nell'azione S nella forma $-\mathscr{E}_0 t + L\varphi$, dove $\mathscr{E}_0$ è l'energia conservata e con L è indicata la componente del momento angolare della particella lungo l'asse di simmetria del campo. Risulta che si possono separare pure le variabili θ ed r. Rappresentando S nella forma

$$S = -\mathscr{E}_0 t + L\varphi + S_r(r) + S_\theta(\theta), \qquad (1)$$

riduciamo l'equazione di Hamilton-Jacobi a due equazioni differenziali ordinarie (cfr. vol. I, *Meccanica*, § 48):

$$\begin{gathered}\left(\frac{dS_\theta}{d\theta}\right)^2 + \left(a\mathscr{E}_0 \operatorname{sen}\theta - \frac{L}{\operatorname{sen}\theta}\right)^2 + a^2m^2\cos^2\theta = K,\\ \left(\frac{dS_r}{dr}\right)^2 - \frac{1}{\Delta}\left[(r^2+a^2)\mathscr{E}_0 - aL\right]^2 + m^2r^2 = -K,\end{gathered} \qquad (2)$$

dove K (parametro di separazione) è una nuova costante arbitraria. Le funzioni S_θ ed S_r si determinano con semplici quadrature.

Il 4-impulso della particella è

$$p^i = m\frac{dx^i}{ds} = g^{ik}p_k = -g^{ik}\frac{\partial S}{\partial x^k}.$$

Calcolando il secondo membro di questa uguaglianza con l'aiuto delle (1) e (2), otteniamo le seguenti equazioni:

$$m\frac{dt}{ds} = -\frac{r_g ra}{\rho^2\Delta}L + \frac{\mathscr{E}_0}{\Delta}\left(r^2 + a^2 + \frac{r_g ra^2}{\rho^2}\operatorname{sen}^2\theta\right), \qquad (3)$$

$$m\frac{d\varphi}{ds} = \frac{L}{\Delta\operatorname{sen}^2\theta}\left(1 - \frac{r_g r}{\rho^2}\right) + \frac{r_g ra}{\rho^2\Delta}\mathscr{E}_0, \qquad (4)$$

$$m^2\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 = \frac{1}{\rho^4}\left[(r^2+a^2)\mathscr{E}_0 - aL\right]^2 - \frac{\Delta}{\rho^4}(K + m^2r^2), \qquad (5)$$

$$m^2\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 = \frac{1}{\rho^4}(K - a^2m^2\cos^2\theta) - \frac{1}{\rho^4}\left(a\mathscr{E}_0\operatorname{sen}\theta - \frac{L}{\operatorname{sen}\theta}\right)^2. \qquad (6)$$

Queste uguaglianze sono gli integrali primi delle equazioni del moto (equazioni delle geodetiche). L'equazione della traiettoria e la dipendenza delle coordinate dal tempo lungo la traiettoria si possono ricavare dalle (3), (4), (5), (6), oppure dalle equazioni

$$\partial S/\partial \mathscr{E}_0 = \text{costante}, \quad \partial S/\partial L = \text{costante}, \quad \partial S/\partial K = \text{costante}.$$

Per i raggi luminosi, nei secondi membri delle equazioni dalla (3) alla (6) bisogna porre $m = 0$ e scrivere ω_0 in luogo di $\mathscr{E}_0$ (cfr. § 101), e nei primi membri bisogna scrivere, in luogo delle derivate md/ds, le derivate $d/d\lambda$ rispetto al parametro λ che varia lungo i raggi (cfr. fine del § 87).

Le equazioni (4), (5), (6) ammettono un moto puramente radiale soltanto lungo l'asse di rotazione del corpo come ciò risulta chiaro da considerazioni di simmetria. Dalle stesse considerazioni è chiaro che il moto in un solo « piano » è possibile soltanto se questo piano è il piano equatoriale. In questo caso, ponendo $\theta = \pi/2$ ed esprimendo K in funzione di $\mathscr{E}_0$ ed L dalla condizione $d\theta/ds = 0$, otteniamo le equazioni del moto nella forma

$$m\frac{dt}{ds} = -\frac{r_g a}{r\Delta}L + \frac{\mathscr{E}_0}{\Delta}\left(r^2 + a^2 + \frac{r_g a^2}{r}\right), \tag{7}$$

$$m\frac{d\varphi}{ds} = \frac{M}{\Delta}\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) + \frac{r_g a}{r\Delta}\mathscr{E}_0, \tag{8}$$

$$m^2\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 = \frac{1}{r^4}[(r^2+a^2)\mathscr{E}_0 - aL]^2 - \frac{\Delta}{r^4}[(a\mathscr{E}_0 - L)^2 + m^2r^2]. \tag{9}$$

2 Determinare il raggio dell'orbita circolare stabile (la piú vicina al centro) di una particella che si muove nel piano equatoriale del campo limite ($a \to r_g/2$) di Kerr (*R. Ruffini, J. A. Wheeler*, 1969).

Soluzione. Procediamo analogamente alla risoluzione del problema 1 del § 102; introduciamo l'« energia potenziale efficace » $U(r)$ definita come segue:

$$[(r^2 + a^2)\,U(r) - aL]^2 - \Delta\,[(aU(r) - L^2) + r^2m^2] = 0$$

(per $\mathscr{E}_0 = U$ il secondo membro dell'equazione (9) si annulla). I raggi delle orbite stabili sono determinati dai minimi della funzione $U(r)$, cioè da una soluzione compatibile delle equazioni $U(r) = \mathscr{E}_0$, $U'(r) = 0$ per $U''(r) > 0$. All'orbita piú vicina al centro corrisponde l'uguaglianza $U''(r_{\min}) = 0$; per $r < r_{\min}$ la funzione $U(r)$ non ha minimi. Otteniamo infine i seguenti valori dei parametri del moto:

a) Per $L < 0$, cioè per il moto della particella nella direzione opposta a quella della rotazione del buco nero, abbiamo:

$$\frac{r_{\min}}{r_g} = \frac{9}{2}, \quad \frac{\mathscr{E}_0}{m} = \frac{5}{3\sqrt{3}}, \quad \frac{L}{mr_g} = \frac{11}{3\sqrt{3}}.$$

b) Per $L > 0$ (il moto nella stessa direzione della rotazione del buco nero), quando $a \to r_g/2$, il raggio $r_{\min}$ tende al raggio dell'orizzonte. Ponendo $a = \frac{r_g}{2}(1 + \delta)$, otteniamo per $\delta \to 0$:

$$\frac{r_{\text{or}}}{r_g} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{2\delta}), \quad \frac{r_{\min}}{r_g} = \frac{1}{2}[1 + (4\delta)^{1/3}],$$

dove

$$\frac{\mathscr{E}_0}{m} = \frac{L}{mr_g} = \frac{1}{\sqrt{3}}[1 + (4\delta)^{1/3}].$$

Notiamo che si ha sempre $r_{min}/r_{or} > 1$, cioe l'orbita passa fuori dell'orizzonte. Questo è in accordo con il fatto che l'orizzonte rappresenta una ipersuperficie nulla la quale non può contenere le linee d'universo del genere tempo delle particelle in moto.

§ 105. *Campo gravitazionale a grandi distanze*

Esaminiamo un campo gravitazionale stazionario a grandi distanze r dal corpo che lo genera, e determiniamo i primi termini del suo sviluppo in serie di potenze di $1/r$.

Lontano dal corpo il campo è debole. Ciò vuol dire che la metrica dello spazio-tempo è qui quasi galileiana, è possibile cioè scegliere un sistema di riferimento in cui le componenti del tensore metrico diventano quasi uguali ai loro valori galileiani:

$$g_{00}^{(0)} = 1, \quad g_{0\alpha}^{(0)} = 0, \quad g_{\alpha\beta}^{(0)} = -\delta_{\alpha\beta}. \tag{105,1}$$

Pertanto rappresentiamo g_{ik} nella forma

$$g_{ik} = g_{ik}^{(0)} + h_{ik}, \tag{105,2}$$

dove h_{ik} sono piccole correzioni che determinano il campo gravitazionale.

Operando sul tensore h_{ik} conveniamo che l'innalzamento e l'abbassamento degli indici verrà effettuato con la metrica «imperturbata»: $h_i^k = g^{(0)kl}h_{il}$. Bisogna però distinguere le h^{ik} dalle correzioni alle componenti controvarianti del tensore metrico g^{ik}. Quest'ultime sono definite dalla soluzione delle equazioni

$$g_{il}g^{lk} = (g_{il}^{(0)} + h_{il})\, g^{lk} = \delta_i^k;$$

troviamo dunque a meno degli infinitesimi del terzo ordine:

$$g^{ik} = g^{ik(0)} - h^{ik} + h_l^i h^{lk}. \tag{105,3}$$

Con la stessa approssimazione il determinante del tensore metrico è

$$g = g^{(0)}\left(1 + h + \frac{1}{2}h^2 - \frac{1}{2}h_k^i h_i^k\right), \tag{105,4}$$

dove $h \equiv h_i^i$.

Sottolineiamo subito che la condizione per cui le h_{ik} debbono essere grandezze infinitesime non determina una scelta univoca del sistema di riferimento. Se questa condizione in qualche sistema è soddisfatta, essa sarà soddisfatta anche per qualsiasi trasformazione $x'^i = x^i + \xi^i$, dove ξ^i sono grandezze infinitesimali. Secondo la (94,3) il tensore h_{ik} diventa allora

$$h'_{ik} = h_{ik} - \frac{\partial \xi_i}{\partial x^k} - \frac{\partial \xi_k}{\partial x^i}, \tag{105,5}$$

dove $\xi_i = g_{ik}^{(0)}\xi^k$ (poiché le $g_{ik}^{(0)}$ sono costanti, le derivate covarianti nella (94,3) si riducono nel caso considerato alle derivate ordinarie)[1].

In prima approssimazione, limitandosi ai termini dell'ordine di $1/r$, i piccoli incrementi ai valori galileiani sono dati dai termini rispettivi dello sviluppo della metrica a simmetria centrale di Schwarzschild. Poiché, come è stato detto, la scelta di un sistema di riferimento (galileiano all'infinito) è indeterminata, la forma concreta di h_{ik} dipende allora dal modo con cui si definisce la coordinata radiale r. Se la metrica di Schwarzschild è rappresentata nella forma (100,14), i primi termini dello sviluppo, per r grandi, sono dati dall'espressione (100,18). Passando in essa dalle coordinate spaziali sferiche a quelle cartesiane (a questo scopo bisogna sostituire $dr = n_\alpha\, dx^\alpha$, dove **n** è il vettore unitario nella direzione di **r**), otteniamo i seguenti valori:

$$h_{00}^{(1)} = -\frac{r_g}{r}, \quad h_{\alpha\beta}^{(1)} = -\frac{r_g}{r} n_\alpha n_\beta, \quad h_{0\alpha}^{(1)} = 0, \tag{105,6}$$

dove $r_g = 2km/c^2$ [2].

Tra i termini del secondo ordine, proporzionali a $1/r^2$, ci sono termini aventi due origini diverse. Alcuni termini derivano in seguito alla non linearietà delle equazioni di Einstein, dai termini del primo ordine. Poiché quest'ultimi dipendono solo dalla massa (e non da altre caratteristiche) del corpo, dalla stessa massa dipendono allora anche questi termini del secondo ordine. È chiaro quindi che questi termini si possono pure ottenere con lo sviluppo della metrica schwarzschildiana. Nelle stesse coordinate troviamo:

$$h_{00}^{(2)} = 0, \quad h_{\alpha\beta}^{(2)} = -\left(\frac{r_g}{r}\right)^2 n_\alpha n_\beta. \tag{105,7}$$

Gli altri termini del secondo ordine appaiono rispettivamente come le soluzioni delle equazioni già linearizzate del campo. Avendo presente anche ulteriori applicazioni, facciamo la linearizzazione delle equazioni scrivendo prima le formule in una forma piú

---

[1]) Per un campo stazionario è naturale ammettere soltanto trasformazioni che non violino la indipendenza di g_{ik} dal tempo, cioè le ξ^i debbono essere funzioni delle sole coordinate spaziali.

[2]) Se fossimo partiti dalla metrica di Schwarzschild in coordinate spaziali isotrope (vedi problema 4 del § 100), avremmo ottenuto:

$$h_{00}^{(1)} = -\frac{r_g}{r}, \quad h_{\alpha\beta}^{(1)} = -\frac{r_g}{r}\delta_{\alpha\beta}, \quad h_{0\alpha}^{(1)} = 0. \tag{105,6a}$$

Il passaggio dalla (105,6) alla (105,6a) è fatto con la trasformazione (105,5) dove

$$\xi^0 = 0, \quad \xi^\alpha = -\frac{r_g x^\alpha}{2r}.$$

generale di quanto non sia richiesto nel caso considerato, cioè senza prendere immediatamente in considerazione il carattere stazionario del campo.

Quando le h_{ik} sono piccole, le grandezze Γ^i_{kl}, espresse in funzione delle derivate di h_{ik}, sono pure piccole. Trascurando le potenze superiori alla prima, possiamo lasciare nel tensore di curvatura (92,1) soltanto i termini della prima parentesi:

$$R_{iklm} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 h_{im}}{\partial x^k\,\partial x^l} + \frac{\partial^2 h_{kl}}{\partial x^i\,\partial x^m} - \frac{\partial^2 h_{km}}{\partial x^i\,\partial x^l} - \frac{\partial^2 h_{il}}{\partial x^k\,\partial x^m}\right). \quad (105,8)$$

Con la stessa approssimazione per il tensore di Ricci, abbiamo:

$$R_{ik} = g^{lm} R_{limk} \approx g^{lm(0)} R_{limk},$$

oppure

$$R_{ik} = \frac{1}{2}\left(-g^{lm(0)}\frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial x^l\,\partial x^m} + \frac{\partial^2 h^l_i}{\partial x^k\,\partial x^l} + \frac{\partial^2 h^l_k}{\partial x^i\,\partial x^l} - \frac{\partial^2 h}{\partial x^i\,\partial x^k}\right). \quad (105,9)$$

L'espressione (105,9) può essere semplificata se si utilizza l'arbitrarietà nella scelta del sistema di riferimento. Piú precisamente, imponiamo a h_{ik} le quattro (secondo il numero delle funzioni arbitrarie ξ^i) condizioni supplementari seguenti:

$$\frac{\partial \psi^k_i}{\partial x^k} = 0, \quad \psi^k_i = h^k_i - \frac{1}{2}\delta^k_i h. \quad (105,10)$$

Poiché gli ultimi tre termini nella (105,9) si eliminano resta solo

$$R_{ik} = -\frac{1}{2} g^{lm(0)} \frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial x^l\,\partial x^m}. \quad (105,11)$$

A noi interessa qui il caso stazionario allorché le h_{ik} non dipendono dal tempo; l'espressione (105,11) si reduce quindi ad $R_{ik} = {}^1/_2 \Delta h_{ik}$, dove Δ è l'operatore di Laplace rispetto alle tre coordinate spaziali. Di conseguenza, le equazioni di Einstein per un campo nel vuoto si riducono alle equazioni di Laplace

$$\Delta h_{ik} = 0, \quad (105,12)$$

con le condizioni supplementari (105,10) che assumono la forma:

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(h^\beta_\alpha - \frac{1}{2} h \delta^\beta_\alpha\right) = 0, \quad (105,13)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta} h^\beta_0 = 0. \quad (105,14)$$

Osserviamo che queste condizioni non determinano ancora una scelta completamente univoca del sistema di riferimento. È facile vedere che se le h_{ik} soddisfano le condizioni (105,13) e (105,14), le

stesse condizioni saranno soddisfatte anche dalle h'_{ik} (105,5) alla sola condizione che le ξ^i soddisfino le equazioni

$$\Delta\xi^i = 0. \tag{105,15}$$

La componente h_{00} viene determinata dalla soluzione scalare dell'equazione tridimensionale di Laplace. Una tale soluzione, proporzionale a $1/r^2$, si scrive, come è noto, nella forma $\mathbf{a}\nabla\frac{1}{r}$, dove $\mathbf{a}$ è un vettore costante. Ma un termine di questa forma in h_{00} può essere sempre eliminato con una semplice traslazione dell'origine delle coordinate nel termine del primo ordine in $1/r$. Dunque, la presenza di un tale termine starebbe ad indicare una scelta inadeguata del l'origine delle coordinate e perciò non presenta nessun interesse.

Le componenti $h_{0\alpha}$ sono date dalla soluzione vettoriale del l'equazione di Laplace, cioè debbono avere la forma

$$h_{0\alpha} = \lambda_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\frac{1}{r},$$

dove $\lambda_{\alpha\beta}$ è un tensore costante. La condizione (105,14) dà:

$$\lambda_{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial x^\alpha\,\partial x^\beta}\frac{1}{r} = 0,$$

da cui risulta che $\lambda_{\alpha\beta}$ deve avere la forma $a_{\alpha\beta} + \lambda\delta_{\alpha\beta}$, dove $a_{\alpha\beta}$ è un tensore antisimmetrico. La soluzione della forma $\lambda\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\frac{1}{r}$ può essere però eliminata mediante la trasformazione (105,5) con $\xi^0 = \lambda/r$, $\xi^\alpha = 0$ (che soddisfano la condizione (105,15)). Di conseguenza, soltante la soluzione

$$h_{0\alpha} = a_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\frac{1}{r}$$

ha un significafo fisico.

Infine, si può dimostrare con un ragionamento analogo, anche se un po' piú lungo, che con una trasformazione appropriata delle coordinate spaziali si possono sempre eliminare le grandezze $h_{\alpha\beta}$ date dalla soluzione tensoriale (simmetrica rispetto ad α, β) del l'equazione di Laplace.

Per quanto riguarda il tensore $a_{\alpha\beta}$, esso è legato al tensore momento angolare totale $M_{\alpha\beta}$, e l'espressione definitiva di $h_{0\alpha}$ assume la forma

$$h^{(2)}_{0\alpha} = \frac{2k}{c^3}M_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\frac{1}{r} = -\frac{2k}{c^3}M_{\alpha\beta}\frac{n_\beta}{r^2}. \tag{105,16}$$

Mostriamo come ottenere questo risultato calcolando l'integrale (96,17).

Il momento $M_{\alpha\beta}$ è legato soltanto ad $h_{0\alpha}$, e, di conseguenza, nel calcolo si possono trascurare tutte le altre componenti di h_{ik}.

Limitandoci ai termini del primo ordine rispetto a $h_{0\alpha}$, dalle (96,2), (96,3) (osserviamo che $g^{\alpha 0} = -h^{\alpha 0} = h_{\alpha 0}$ e che $-g$ si distingue da 1 soltanto per termini del secondo ordine) otteniamo:

$$h^{\alpha 0\beta} = \frac{c^4}{16\pi k} \frac{\partial}{\partial x^\gamma} (g^{\alpha 0} g^{\beta\gamma} - g^{\gamma 0} g^{\alpha\beta}) = -\frac{c^4}{16\pi k} \frac{\partial}{\partial x^\gamma} (h_{\alpha 0}\delta_{\beta\gamma} - h_{\gamma 0}\delta_{\alpha\beta}).$$

Dopo la sostituzione in questa espressione della (105,16) il secondo termine sotto il segno di derivazione scompare e il primo termine dà

$$h^{\alpha 0\beta} = -\frac{c}{8\pi} M_{\alpha\gamma} \frac{\partial^2}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} \frac{1}{r} = -\frac{c}{8\pi} M_{\alpha\gamma} \frac{3n_\beta n_\gamma - \delta_{\beta\gamma}}{r^2}.$$

Questa espressione ci permette di trovare, integrando la (96,16) sulla superficie della sfera di raggio r ($df_\gamma = n_\gamma r^2\, do$):

$$\frac{1}{c} \int (x^\alpha h^{\beta 0\gamma} - x^\beta h^{\alpha 0\gamma})\, df_\gamma =$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \int (n_\alpha n_\gamma M_{\beta\gamma} - n_\beta n_\gamma M_{\alpha\gamma})\, do =$$

$$= -\frac{1}{3} (\delta_{\alpha\gamma} M_{\beta\gamma} - \delta_{\beta\gamma} M_{\alpha\gamma}) = \frac{2}{3} M_{\alpha\beta}.$$

Un calcolo analogo ci dà:

$$\frac{1}{c} \int \lambda^{\alpha 0\gamma\beta}\, df_\gamma = -\frac{c^3}{16\pi k} \int (h_{\alpha 0}\, df_\beta - h_{\beta 0}\, df_\alpha) = \frac{1}{3} M_{\alpha\beta}.$$

Sommando le due grandezze, troviamo il valore cercato di $M_{\alpha\beta}$.

Sottolineiamo che nel caso generale, quando il campo in prossimità del corpo può essere non debole, $M_{\alpha\beta}$ è il momento angolare del corpo insieme al campo gravitazionale. Se il campo è debole in tutte le direzioni, il suo contributo al momento angolare può essere trascurato[1]).

Le formule (105,6), (105,7) e (105,16) risolvono il problema posto a meno dei termini dell'ordine di $1/r^2$). Le componenti covarianti del tensore metrico sono:

$$g_{ik} = g_{ik}^{(0)} + h_{ik}^{(1)} + h_{ik}^{(2)}. \qquad (105,17)$$

---

[1]) Se il corpo rotante ha una forma sferica, la direzione di **M** resta l'unica direzione privilegiata del campo in tutto lo spazio fuori dal corpo. Se, inoltre, il campo è ovunque debole (e non solamente lontano dal corpo), la formula (105,16) è valida per tutto lo spazio fuori dal corpo. Questa formula resta valida in tutto lo spazio anche nel caso in cui la parte a simmetria centrale del corpo non è ovunque debole, ma la rotazione del corpo sferico è sufficientemente lenta (vedi problema 1).

[2]) La trasformazione (105,5) con $\xi^0 = 0$, $\xi^\alpha = \xi^\alpha(x^1, x^2, x^3)$ non cambia $h_{0\alpha}$. Di conseguenza, l'espressione (105,16) non dipende dalla scelta della coordinata r.

Inoltre, conformemente alla (105,3), le componenti controvarianti, con la stessa approssimazione, sono

$$g^{ik} = g^{ik(0)} - h^{ik(1)} - h^{ik(2)} + h_l^{i(1)} h^{lk(1)}. \qquad (105,18)$$

La formula (105,16) può essere scritta in forma vettoriale come segue[1]):

$$\mathbf{g} = \frac{2k}{c^3 r^2} [\mathbf{nM}], \qquad (105,19)$$

dove **M** è il momento angolare totale del corpo. È stato mostrato nel problema 1 del § 88 che in un campo gravitazionale stazionario una particella è sollecitata da una « forza di Coriolis » identica a quella che agirebbe sulla particella in un sistema di riferimento rotante con velocità angolare:

$$\mathbf{\Omega} = \frac{c}{2} \sqrt{g_{00}} \operatorname{rot} \mathbf{g}.$$

Si può quindi dire che nel campo creato da un corpo rotante una particella lontana dal corpo è sottoposta all'azione di una forza equivalente alla forza di Coriolis dovuta a una rotazione con velocità angolare:

$$\mathbf{\Omega} \approx \frac{c}{2} \operatorname{rot} \mathbf{g} = \frac{k}{c^2 r^3} [\mathbf{M} - 3\mathbf{n}(\mathbf{Mn})]. \qquad (105,20)$$

Applichiamo infine le espressioni (105,6) al calcolo dell'energia totale del corpo grave secondo l'integrale (96,16). Calcolate le necessarie componenti h^{ikl} con le formule (96,2), (96,3), otteniamo con l'approsimazione richiesta (omettiamo i termini $\sim 1/r^2$):

$$h^{\alpha 0 \beta} = 0,$$

$$h^{00\alpha} = \frac{c^4}{16\pi k} \frac{\partial}{\partial x^\beta} (g^{00} g^{\alpha\beta}) = \frac{mc^2}{8\pi} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(-\frac{\delta^{\alpha\beta}}{r} + \frac{x^\alpha x^\beta}{r^3} \right) = \frac{mc^2}{4\pi} \frac{n^\alpha}{r^2}.$$

Integrando ora la (96,16) sulla sfera di raggio r, otteniamo infine:

$$P^\alpha = 0, \quad P^0 = mc, \qquad (105,21)$$

come era naturale aspettarsi. È l'espressione dell'uguaglianza delle masse « gravitazionale » e «inerziale » (« gravitazionale » si chiama la massa che determina il campo gravitazionale creato dal corpo: è la massa che entra nel tensore metrico del campo gravitazionale o, in particolare, nella legge di Newton; la massa « inerziale » determina invece la relazione tra impulso e energia del corpo; in particolare, l'energia di quiete del corpo è uguale a questa massa moltiplicata per c^2).

---

[1]) Con l'approssimazione considerata il vettore $g_\alpha = -g_{0\alpha}/g_{00} \approx -g_{0\alpha}$. Per la stessa ragione bisogna porre $\gamma = 1$ nelle definizioni del prodotto vettoriale e del rotore (vedi nota alla pag. 331), cosicché i vettori possono essere considerati come vettori cartesiani.

Nel caso di un campo gravitazionale costante, risulta possibile dedurre una espressione semplice per l'energia totale della materia e del campo nella forma di un integrale esteso solo allo spazio occupato dalla materia. È possibile ottenere questa ultima partendo per esempio dalla seguente espressione, valida allorché tutte le grandezze non dipendono da x^0 [1]):

$$R_0^0 = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\sqrt{-g}\, g^{i0} \Gamma_{0i}^\alpha). \tag{105,22}$$

Integrando $R_0^0 \sqrt{-g}$ in uno spazio (tridimensionale) ed applicando il teorema di Gauss tridimensionale, otteniamo:

$$\int R_0^0 \sqrt{-g}\, dV = \oint \sqrt{-g}\, g^{i0} \Gamma_{0i}^\alpha\, df_\alpha.$$

Prendendo una superficie d'integrazione sufficientemente lontana e tenendo conto delle espressioni (105,6) per g_{ik}, dopo un semplice calcolo otteniamo:

$$\int R_0^0 \sqrt{-g}\, dV = \frac{4\pi k}{c^2} m = \frac{4\pi k}{c^3} P^0.$$

Notando inoltre, che, secondo le equazioni del campo,

$$R_0^0 = \frac{8\pi k}{c^4} \left(T_0^0 - \frac{1}{2} T \right) = \frac{4\pi k}{c^4} (T_0^0 - T_1^1 - T_2^2 - T_3^3),$$

troviamo la formula cercata:

$$P^0 = mc = \frac{1}{c} \int (T_0^0 - T_1^1 - T_2^2 - T_3^3) \sqrt{-g}\, dV. \tag{105,23}$$

Questa formula esprime l'energia totale della materia e del campo gravitazionale costante (cioè la massa totale del corpo) mediante il tensore energia-impulso della sola materia (*R. Tolman*, 1930). Ricordiamo che nel caso di un campo dotato di simmetria centrale, per la stessa grandezza abiamo ottenuto un'altra espressione, e cioè la formula (100,23).

---

[1]) Ricavando dalla (92,7)

$$R_0^0 = g^{0i} R_{i0} = g^{0i} \left(\frac{\partial \Gamma_{i0}^l}{\partial x^l} + \Gamma_{i0}^l \Gamma_{lm}^m - \Gamma_{il}^m \Gamma_{0m}^l \right),$$

con l'aiuto delle (86,5) e (86,8) questa espressione può essere scritta come segue:

$$R_0^0 = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{-g}\, g^{0i} \Gamma_{i0}^l) + g^{im} \Gamma_{ml}^0 \Gamma_{i0}^l;$$

la stessa relazione (86,8) ci permette di vedere che il secondo termine a secondo membro è identicamente uguale a $-\frac{1}{2} \Gamma_{lm}^0 \frac{\partial g^{lm}}{\partial x^0}$, e, poiché tutte le grandezze non dipendono da x^0, si annulla. Infine, per la stessa ragione, sostituendo nel primo termine alla somma rispetto ad l la somma rispetto ad α, otteniamo la (105,22).

PROBLEMI

1. Dimostrare che la formula (105,16) resta valida per il campo in tutto lo spazio fuori da un corpo sferico rotante a condizione che la rotazione sia lenta (il momento $M \ll cmr_g$), ma senza richiedere che la parte a simmetria centrale del campo sia debole (*A. G. Doroškevič, J. B. Zeldovič, I. D. Novikov*, 1965; *V. Gurovič*, 1965).

Soluzione. In coordinate spaziali sferiche ($x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \varphi$) la formula (105,16) si scrive come segue:

$$h_{03} = \frac{2kM}{rc^2} \operatorname{sen}^2 \theta. \tag{1}$$

Considerando questa grandezza come una piccola correzione alla metrica schwarzschildiana (100,14), bisogna verificare se è soddisfatta l'equazione $R_{03} = 0$ linearizzata rispetto ad h_{03} (nelle altre equazioni del campo i termini di correzione sono identicamente nulli). Si può calcolare R_{03} secondo la formula (4) ricavata nel problema del § 95, dove la linearizzazione significa che le operazioni tensoriali tridimensionali debbono essere effettuate con la metrica « imperturbata » (100,15). Si ottiene infine l'equazione

$$\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \frac{\partial^2 h_{03}}{\partial r^2} + \frac{2r_g}{r^3} h_{03} + \frac{\operatorname{sen}\theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \frac{\partial h_{03}}{\partial \theta}\right) = 0,$$

soddisfatta effettivamente dall'espressione (1).

2. Determinare lo spostamento sistematico (*secolare*) dell'orbita di una particella che si muove nel campo di un corpo centrale, dovuto alla rotazione di quest'ultimo (*J. Lense, H. Thirring*, 1918).

Soluzione. Poiché tutti gli effetti relativistici sono piccoli, essi si sovrappongono linearmente gli uni agli altri, e, nel calcolo degli effetti generati dalla rotazione del corpo centrale, si può trascurare l'influenza non newtoniana del campo di forza a simmerria centrale, studiata nel § 101; in altri termini, si possono fare i calcoli supponendo che tra tutte le h_{ik} solo le $h_{0\alpha}$ non siano nulle.

L'orientazione dell'orbita classica di una particella è determinata da due vettori conservativi: dal momento angolare $\mathbf{M} = [\mathbf{rp}]$ della particella e dal vettore

$$\mathbf{A} = \left[\frac{\mathbf{p}}{m} \mathbf{M}\right] - \frac{kmm'\mathbf{r}}{r}.$$

la cui conservazione è specifica per il campo newtoniano $\varphi = -km'/r$ (m' è la massa del corpo centrale, m la massa della particella)[1]. Il vettore $\mathbf{M}$ è perpendicolare al piano dell'orbita, e il vettore $\mathbf{A}$ è diretto lungo il semiasse maggiore dell'ellisse nella direzione del perielio (la sua grandezza è uguale a $kmm'e$, dove e è l'eccentricità dell'orbita). Lo spostamento secolare della orbita cercato può essere descritto come la variazione della direzione di questi vettori.

La lagrangiana della particella in moto nel campo (105,19) è

$$L = -mc\frac{ds}{dt} = L_0 + \delta L, \quad \delta L = mc\mathbf{gv} = \frac{2km}{c^3 r^3} (\mathbf{M}' [\mathbf{vr}]) \tag{1}$$

(il momento angolare del corpo centrale è indicato qui con $\mathbf{M}'$ per poterlo distinguere dal momento angolare $\mathbf{M}$ della particella). Da qui si deduce la funzione di Hamilton[2]:

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}_0 + \delta\mathscr{H}, \quad \delta\mathscr{H} = \frac{2k}{c^2 r^3} (\mathbf{M}' [\mathbf{rp}]).$$

---

[1]) Cfr. vol. I, *Meccanica*, § 15.

[2]) Ibidem, § 40.

Calcolando la derivata $\dot{\mathbf{M}} = [\dot{\mathbf{r}}\mathbf{p}] + [\mathbf{r}\dot{\mathbf{p}}]$ con l'aiuto delle equazioni di Hamilton $\dot{\mathbf{r}} = \partial\mathcal{H}/\partial\mathbf{p}$, $\dot{\mathbf{p}} = -\partial\mathcal{H}/\partial\mathbf{r}$, otteniamo:

$$\dot{\mathbf{M}} = \frac{2k}{c^3 r^3}[\mathbf{M}'\mathbf{M}]. \tag{2}$$

Cercando la variazione secolare di $\mathbf{M}$, dobbiamo prendere la media di questa espressione rispetto a un periodo di rotazione T della particella. È comodo calcolare la media nella rappresentazione parametrica di r in funzione del tempo, relativa ad un'orbita ellittica della forma

$$r = a(1 - e\cos\xi), \quad t = \frac{T}{2\pi}(\xi - e\,\mathrm{sen}\,\xi)$$

(a ed e sono il semiasse maggiore e l'eccentricità dell'ellisse)[1]):

$$\overline{r^{-3}} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{dt}{r^3} = \frac{1}{2\pi a^3}\int_0^{2\pi} \frac{d\xi}{(1 - e\cos\xi)^2} = \frac{1}{a^3(1 - e^2)^{3/2}}.$$

In tal modo, la variazione secolare di $\mathbf{M}$ è data dalla formula

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \frac{2k[\mathbf{M}'\mathbf{M}]}{c^2 a^3 (1 - e^2)^{3/2}}, \tag{3}$$

cioè il vettore $\mathbf{M}$ ruota intorno all'asse di rotazione del corpo centrale, mantenendo invariata la sua grandezza.

Un calcolo analogo per il vettore $\mathbf{A}$ dà:

$$\dot{\mathbf{A}} = \frac{2k}{c^2 r^3}[\mathbf{M}'\mathbf{A}] + \frac{6k}{c^2 m r^5}(\mathbf{M}\mathbf{M}')[\mathbf{r}\mathbf{M}].$$

Si prende la media di questa espressione come è stato fatto sopra; per ragioni di simmetria, è *a priori* evidente che il vettore medio $\overline{\mathbf{r}/r^5}$ è diretto lungo il semiasse maggiore dell'ellisse, cioè nella direzione del vettore $\mathbf{A}$. Il calcolo conduce alla seguente espressione per la variazione secolare del vettore $\mathbf{A}$:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = [\mathbf{\Omega}\mathbf{A}], \quad \mathbf{\Omega} = \frac{2kM'}{c^2 a^3 (1 - e^2)^{3/2}}\{\mathbf{n}' - 3\mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{n}')\} \tag{4}$$

($\mathbf{n}$, $\mathbf{n}'$ sono i vettori unitari nelle direzioni $\mathbf{M}$ ed $\mathbf{M}'$), cioè il vettore $\mathbf{A}$ ruota con la velocità angolare $\mathbf{\Omega}$, ma la sua grandezza rimane invariata; quest'ultima circostanza indica che l'eccentricità dell'orbita non subisce una variazione secolare.

Si può scrivere la formula (3) come segue:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = [\mathbf{\Omega}\mathbf{M}]$$

con la stessa $\mathbf{\Omega}$ che compare nella (4); in altri termini, $\mathbf{\Omega}$ è la velocità angolare di rotazione dell'ellisse nel suo complesso. Questa rotazione include sia lo spostamento supplementare (rispetto allo spostamento esaminato nel § 101) del perielio dell'orbita sia la rotazione secolare del suo piano attorno all'asse del corpo (quest'ultimo effetto non esiste se il piano dell'orbita coincide con il piano equatoriale del corpo centrale).

---

[1]) Cfr. vol. I, *Meccanica*, § 15.

Ricordiamo che all'effetto studiato nel § 101 corrisponde la velocità angolare

$$\Omega = \frac{6\pi k m'}{c^2 a (1-e^2) T} \mathbf{n}.$$

§ 106. *Equazioni del moto di un sistema di corpi in seconda approssimazione*

Come si vedrà piú avanti (§ 110), un sistema di corpi in moto irraggia onde gravitazionali, perdendo cosí una parte della sua energia. Tuttavia, questa perdita di energia si rivela soltanto nell'approssimazione del quinto ordine in $1/c$. Fino alla quarta approssimazione, l'energia del sistema resta costante. Ne risulta che un sistema di gravi può essere descritto da una lagrangiana a meno dei termini dell'ordine di $1/c^4$, contrariamente al campo elettromagnetico, dove la lagrangiana esiste, in generale, soltanto a meno dei termini del secondo ordine (§ 65). Dedurremo qui la lagrangiana per un sistema di corpi, limitandoci ai termini del secondo ordine. Troveremo quindi le equazioni del moto di un sistema nell'approssimazione successiva a quella newtoniana.

Nel fare questo, trascureremo le dimensioni e la struttura interna dei corpi, considerandoli come « puntiformi »; in altri termini, ci limitiamo ai termini d'ordine zero nello sviluppo in serie di potenze dei rapporti fra le dimensioni a dei corpi e le loro distanze l.

Per risolvere il problema posto, dobbiamo determinare, nell'approssimazione necessaria, il campo gravitazionale debole creato dai corpi a distanze grandi rispetto alle loro dimensioni, ma piccole rispetto alla lunghezza λ delle onde gravitazionali emesse dal sistema ($a \ll r \ll \lambda \sim lc/v$).

Un campo a grandi distanze da un corpo è dato, all'ordine $1/c^2$, dalle espressioni ottenute nel paragrafo precedente, indicate con $h_{ik}^{(1)}$; utilizziamo qui queste espressioni nella forma (105,6a). Nel § 105 si era partiti dal presupposto che il campo fosse creato da un corpo solo (posto nell'origine delle coordinate). Poiché il campo $h_{ik}^{(1)}$ rappresenta una soluzione delle equazioni linearizzate di Einstein, per esso è valido il principio di sovrapposizione. Di conseguenza, un campo a grandi distanze da un sistema di corpi si calcola sommando i campi di ciascuno di questi corpi; scriviamolo nella forma

$$h_\alpha^\beta = -\frac{2}{c^2}\varphi\delta_\alpha^\beta, \tag{106,1}$$

$$h_0^0 = \frac{2}{c^2}\varphi, \quad h_0^\alpha = 0, \tag{106,2}$$

dove

$$\varphi(\mathbf{r}) = -k \sum_a \frac{m_a}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_a|}$$

è il potenziale gravitazionale newtoniano del sistema di corpi puntiformi ($\mathbf{r}_a$ è il raggio vettore del corpo di massa m_a). L'espressione dell'intervallo mediante il tensore metrico (106,1), (106,2) è

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2}{c^2}\varphi\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2}{c^2}\varphi\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (106,3)$$

Notiamo che i termini del primo ordine rispetto a φ sono presenti non soltanto in g_{00}, ma anche in $g_{\alpha\beta}$; è già stato indicato nel § 87 che nelle equazioni del moto di una particella i termini correttivi in $g_{\alpha\beta}$ conducono a grandezze infinitesime di ordine superiore alle grandezze originate da g_{00}; in relazione a ciò, dal confronto con le equazioni newtoniane del moto, si era potuto determinare soltanto g_{00}.

Come si vedrà piú avanti, per ottenere le equazioni del moto cercate, è sufficiente conoscere le componenti spaziali $h_{\alpha\beta}$ con l'approssimazione $\sim 1/c^2$ ottenuta nella (106,1); per quanto concerne le componenti miste (assenti nell'approssimazione $1/c^2$), esse debbono essere note a meno dei termini dell'ordine di $1/c^3$, e la componente temporale h_{00} a meno dei termini dell'ordine di $1/c^4$. Per calcolarle, utilizziamo le equazioni generali della gravitazione, tenendo conto dei termini dell'ordine voluto.

Trascurando la macroscopicità dei corpi, dobbiamo scrivere il tensore energia-impulso della materia nella forma (33,4), (33,5). In coordinate curvilinee esso si scrive come segue:

$$T^{ik} = \sum_a \frac{m_a c}{\sqrt{-g}} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{dt} \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a) \quad (106,4)$$

(per la comparsa del fattore $1/\sqrt{-g}$, si veda il passaggio analogo nella (90,4)); la sommatoria è estesa a tutti i corpi del sistema.

La componente

$$T_{00} = \sum_a \frac{m_a c^3}{\sqrt{-g}} g_{00}^2 \frac{dt}{ds} \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a)$$

è uguale in prima approssimazione (le g_{ik} sono galileiane) a $\sum_a m_a c^2 \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a)$; per trovare l'approssimazione successiva, sostituiamo le g_{ik} dalla (106,3) e, dopo un semplice calcolo, otteniamo:

$$T_{00} = \sum_a m_a c^2 \left(1 + \frac{5\varphi_a}{c^2} + \frac{v_a^2}{2c^2}\right) \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a), \quad (106,5)$$

dove $\mathbf{v}$ è la velocità ordinaria tridimensionale ($v^\alpha = dx^\alpha/dt$) e φ_a il potenziale del campo nel punto $\mathbf{r}_a$ (non prendiamo in considerazione per il momento la presenza in φ_a di una parte infinita: cioè il potenziale del campo proprio della particella m_a; questo problema verrà esaminato piú avanti).

Quanto alle componenti $T_{\alpha\beta}$, $T_{0\alpha}$ del tensore energia-impulso, è sufficiente lasciare, con la stessa approssimazione, solo i primi termini dello sviluppo delle espressioni (106,4):

$$T_{\alpha\beta} = \sum_a m_a v_{a\alpha} v_{a\beta} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a), \quad T_{0\alpha} = -\sum_a m_a c v_{a\alpha} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a). \qquad (106,6)$$

Passiamo ora al calcolo delle componenti del tensore R_{ik}. È comodo eseguire il calcolo secondo la formula $R_{ik} = g^{lm} R_{limk}$, dove R_{limk} è dato dalla (92,1). È inoltre necessario tener presente che le grandezze $h_{\alpha\beta}$, h_{00} contengono termini di ordine non inferiore a $1/c^2$, e $h_{0\alpha}$ non inferiore a $1/c^3$; le derivazioni rispetto ad $x^0 = ct$ elevano, a loro volta, l'ordine dell'infinitesimo di un'unità.

I termini principali in R_{00} sono dell'ordine di $1/c^2$; oltre a questi termini, dobbiamo conservare pure i termini di ordine successivo non nulli: $1/c^4$. Un calcolo semplice conduce a questo risultato:

$$R_{00} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial h_0^\alpha}{\partial x^\alpha} - \frac{1}{2c}\frac{\partial h_\alpha^\alpha}{\partial t}\right) + \frac{1}{2}\Delta h_{00} +$$
$$+ \frac{1}{2} h^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 h_{00}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial h_{00}}{\partial x^\alpha}\right)^2 - \frac{1}{4}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^\beta}\left(2\frac{\partial h_\beta^\alpha}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial h_\alpha^\alpha}{\partial x^\beta}\right).$$

In questo calcolo non è stata utilizzata finora nessuna condizione supplementare per le grandezze h_{ik}. Utilizzando questa possibilità, imponiamo la condizione:

$$\frac{\partial h_0^\alpha}{\partial x^\alpha} - \frac{1}{2c}\frac{\partial h_\alpha^\alpha}{\partial t} = 0, \qquad (106,7)$$

in virtú della quale in R_{00} vengano eliminati completamente i termini contenenti le componenti $h_{0\alpha}$. Nei termini rimanenti sostituiamo

$$h_\alpha^\beta = -\frac{2}{c^2}\varphi\delta_\alpha^\beta, \quad h_{00} = \frac{2}{c^2}\varphi + O\left(\frac{1}{c^4}\right)$$

ed otteniamo con l'approssimazione richiesta:

$$R_{00} = \frac{1}{2}\Delta h_{00} + \frac{2}{c^4}\varphi\Delta\varphi - \frac{2}{c^4}(\nabla\varphi)^2, \qquad (106,8)$$

dove siamo passati ai simboli tridimensionali.

Nel calcolo delle componenti $R_{0\alpha}$ è sufficiente conservare solo i termini fino a $\sim 1/c^3$, che è il primo ordine non nullo. Ana-

logamente troviamo:

$$R_{0\alpha}=\frac{1}{2c}\frac{\partial^2 h_\alpha^\beta}{\partial t\,\partial x^\beta}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 h_0^\beta}{\partial x^\alpha\,\partial x^\beta}-\frac{1}{2c}\frac{\partial^2 h_\beta^\beta}{\partial t\,\partial x^\alpha}+\frac{1}{2}\Delta h_{0\alpha}$$

e poi, tenendo conto della condizione (106,7):

$$R_{0\alpha}=\frac{1}{2}\Delta h_{0\alpha}+\frac{1}{2c^3}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\,\partial x^\alpha}. \tag{106,9}$$

Con l'aiuto delle espressioni ottenute dalla (106,5) alla (106,9) scriviamo ora le equazioni di Einstein:

$$R_{ik}=\frac{8\pi k}{c^4}\left(T_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}T\right). \tag{106,10}$$

La componente temporale dell'equazione (106,10) dà:

$$\Delta h_{00}+\frac{4}{c^4}\varphi\Delta\varphi-\frac{4}{c^4}(\nabla\varphi)^2=\frac{8\pi k}{c^4}\sum_a m_a c^2\left(1+\frac{5\varphi_a}{c^2}+\frac{3v_a^2}{2c^2}\right)\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a);$$

ricorrendo all'identità:

$$4(\nabla\varphi)^2=2\Delta(\varphi^2)-4\varphi\Delta\varphi$$

ed all'equazione del potenziale newtoniano·

$$\Delta\varphi=4\pi k\sum_a m_a\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a), \tag{106,11}$$

riscriviamo questa equazione nella forma

$$\Delta\left(h_{00}-\frac{2}{c^4}\varphi^2\right)=\frac{8\pi k}{c^2}\sum_a m_a\left(1+\frac{\varphi_a'}{c^2}+\frac{3v_a^2}{2c^2}\right)\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a). \tag{106,12}$$

Dopo aver fatto i calcoli, abbiamo sostituito nel secondo membro dell'equazione (106,12) φ_a con

$$\varphi_a'=-k\sum_b{}'\frac{m_b}{|\mathbf{r}_a-\mathbf{r}_b|},$$

che è il potenziale creato nel punto $\mathbf{r}_a$ del campo creato da tutti i corpi, ad eccezione della particella m_a; l'eliminazione del potenziale proprio infinito dei corpi (nel nostro metodo i corpi si suppongono puntiformi) corrisponde alla « rinormalizzazione » delle loro masse in seguito alla quale questi corpi prendono i loro valori reali, che tengono conto anche del campo creato dai corpi stessi[1]).

---

[1]) In effetti, se c'è un solo corpo immobile, nel secondo membro dell'equazione si avrà semplicemente $(8\pi k/c^2)\,m_a\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a)$, e questa equazione definirà correttamente (in seconda approssimazione) il campo creato dal corpo.

La soluzione dell'equazione (106,12) può essere scritta immediatamente se si tiene conto della nota relazione (36,9)

$$\Delta \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\mathbf{r}).$$

In tal modo, troviamo:

$$h_{00} = \frac{2\varphi}{c^2} + \frac{2\varphi^2}{c^4} - \frac{2k}{c^4} \sum_a \frac{m_a \varphi'_a}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_a|} - \frac{3k}{c^4} \sum_a \frac{m_a v_a^2}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_a|}. \qquad (106,13)$$

La componente mista dell'equazione (106,10) dà:

$$\Delta h_{0\alpha} = -\frac{16\pi k}{c^3} \sum_a m_a v_{a\alpha} \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a) - \frac{1}{c^3} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t\, \partial x^\alpha}. \qquad (106,14)$$

La soluzione di questa equazione lineare è[1])

$$h_{0\alpha} = \frac{4k}{c^3} \sum_a \frac{m_a v_{a\alpha}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_a|} - \frac{1}{c^3} \frac{\partial^2 f}{\partial t\, \partial x^\alpha},$$

dove f è la soluzione dell'equazione ausiliaria

$$\Delta f = \varphi = -\sum \frac{k m_a}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_a|}.$$

Tenendo conto della relazione $\Delta r = 2/r$ troviamo:

$$f = -\frac{k}{2} \sum_a m_a |\mathbf{r}-\mathbf{r}_a|,$$

e, dopo un semplice calcolo, otteniamo infine

$$h_{0\alpha} = \frac{k}{2c^3} \sum_a \frac{m_a}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_a|} [7 v_{a\alpha} + (\mathbf{v}_a \mathbf{n}_a) n_{a\alpha}], \qquad (106,15)$$

dove $\mathbf{n}_a$ è il versore di $\mathbf{r} - \mathbf{r}_a$.

Le espressioni (106,1), (106,13) e (106,15) sono sufficienti per calcolare la lagrangiana a meno dei termini del secondo ordine.

La lagrangiana di un corpo nel campo gravitazionale creato da altri corpi e considerato come campo dato è

$$L_a = -m_a c \frac{ds}{dt} = -m_a c^2 \left(1 + h_{00} + 2h_{0\alpha} \frac{v_a^\alpha}{c} - \frac{v_a^2}{c^2} + h_{\alpha\beta} \frac{v_a^\alpha v_\alpha^\beta}{c^2}\right)^{1/2}.$$

---

[1]) Nel caso stazionario, il secondo termine del secondo membro dell'equazione (106,14) manca. A grandi distanze dal sistema la sua soluzione può essere scritta immediatamente per analogia con la soluzione (44,3) dell'equazione (43,4):

$$h_{0\alpha} = -\frac{2k}{c^3 r^2} [\mathbf{n}\mathbf{M}]_\alpha$$

(dove $\mathbf{M} = \int [\mathbf{r} \cdot \mu \mathbf{v}]\, dV = \sum m_a [\mathbf{r}_a \mathbf{v}_a]$ è il momento angolare del sistema), in accordo con la formula (105,19).

Sviluppando il radicale e trascurando la costante inessenziale $-m_a c^2$, riscriviamo questa espressione, con l'approssimazione richiesta, nella forma

$$L_a = \frac{m_a v_a^2}{2} + \frac{m_a v_a^4}{8c^2} -$$

$$-m_a c^2 \left(\frac{h_{00}}{2} + h_{0\alpha} \frac{v_a^\alpha}{c} + \frac{1}{2c^2} h_{\alpha\beta} v_a^\alpha v_a^\beta - \frac{h_{00}^2}{8} + \frac{h_{00}}{4c^2} v_a^2 \right). \qquad (106,16)$$

I valori di tutte le h_{ik} sono presi qui nel punto $\mathbf{r}_a$; inoltre si debbono omettere i termini infiniti, il che sorrisponde alla rinormalizzazione della massa m_a che entra nell'espressione di L_a sotto forma di coefficiente.

I successivi calcoli consistono in quanto segue. La lagrangiana totale L del sistema non è ovviamente uguale alla somma delle funzioni L_a per i singoli corpi, ma deve essere scritta in modo da fornire i giusti valori delle forze $\mathbf{f}_a$ agenti su ciascuno dei corpi, se è dato il moto degli altri. A questo scopo, calcoliamo le forze $\mathbf{f}_a$ derivando la lagrangiana L_a:

$$\mathbf{f}_a = \left(\frac{\partial L_a}{\partial \mathbf{r}} \right)_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_a}$$

(la derivazione va fatta rispetto alle coordinate correnti $\mathbf{r}$ del punto d'osservazione nelle espressioni per le h_{ik}). È facile ora scrivere una funzione generale L tale che tutte le forze in questione $\mathbf{f}_a$ si deducano prendendo le derivate parziali $\partial L/\partial \mathbf{r}_a$.

Senza soffermarci sui calcoli intermedi semplici, diamo subito il risultato finale per la lagrangiana[1]):

$$L = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} + \sum_a \sum_b{}' \frac{3k m_a m_b v_a^2}{2c^2 r_{ab}} +$$

$$+ \sum_a \frac{m_a v_a^4}{8c^2} + \sum_a \sum_b{}' \frac{k m_a m_b}{2 r_{ab}} -$$

$$- \sum_a \sum_b{}' \frac{k m_a m_b}{4c^2 r_{ab}} [7 (\mathbf{v}_a \mathbf{v}_b) + (\mathbf{v}_a \mathbf{n}_{ab}) (\mathbf{v}_b \mathbf{n}_{ab})] -$$

$$- \sum_a \sum_b{}' \sum_c{}' \frac{k^2 m_a m_b m_c}{2c^2 r_{ab} r_{ac}}, \qquad (106,17)$$

dove $r_{ab} = |\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|$, ed $\mathbf{n}_{ab}$ è il versore di $\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b$; l'apice sul segno di somma indica che deve essere omesso il termine corrispondente a $b = a$ o $c = a$.

---

[1]) Le equazioni del moto corrispondenti a questa lagrangiana furono ottenute per la prima volta da *A. Einstein, L. Infeld, B. Hoffman* (1938), e da *A. Eddington* e *G. Clark* (1938).

PROBLEMI

1. Determinare l'azione del campo gravitazionale nell'approssimazione newtoniana.

Soluzione. Con l'aiuto delle g_{ik} ricavate dalla (106,3) ed applicando la formula (93,3), troviamo $G = -2(\nabla\varphi)^2/c^4$, cosicché per l'azione del campo si ha

$$S_g = -\frac{1}{8\pi k}\int\int (\nabla\varphi)^2 dV\, dt.$$

L'azione totale per il campo con le masse distribuite nello spazio con densità μ si scrive:

$$S = \int\int \left[\frac{\mu v^2}{2} - \mu\varphi - \frac{1}{8\pi k}(\nabla\varphi)^2\right] dV\, dt. \tag{1}$$

È facile vedere che la variazione di S rispetto a φ conduce, come era da aspettarsi, all'equazione di Poisson (99,2).

La densità d'energia si deduce dalla densità Λ della lagrangiana (l'espressione integranda nella (1)) secondo la formula generale (32,5), il che, nel dato caso, comporta (essendo le derivate di φ rispetto al tempo in Λ assenti) un cambiamento di segno del secondo e del terzo termine. Integrando la densità d'energia nello spazio, sostituendo inoltre nel secondo termine $\mu\varphi = \varphi\Delta\varphi/4\pi k$ ed integrando per parti, otteniamo infine l'energia totale del campo e della materia nella forma

$$\int \left[\frac{\mu v^2}{2} - \frac{1}{8\pi k}(\nabla\varphi)^2\right] dV.$$

Di conseguenza, la densità d'energia del campo gravitazionale nella teoria newtoniana è $W = -(\nabla\varphi)^2/8\pi k$[1]).

2. Determinare le coordinate del centro di massa di un sistema di gravi in seconda approssimazione.

Soluzione. In virtú della completa analogia formale tra la legge di Newton per l'interazione gravitazionale e la legge di Coulomb per l'interazione elettrostatica, le coordinate del centro d'inerzia sono date dalle formule

$$\mathbf{R} = \frac{1}{\mathscr{E}}\sum_a \mathbf{r}_a \left(m_a c^2 + \frac{p_a^2}{2m_a} - \frac{km_a}{2}\sum_b{}' \frac{m_b}{r_{ab}}\right).$$

$$\mathscr{E} = \sum_a \left(m_a c^2 + \frac{p_a^2}{2m_a} - \frac{km_a}{2}\sum_b{}' \frac{m_b}{r_{ab}}\right).$$

analoghe alla formula ottenuta nel problema 1 del § 65.

3. Determinare lo spostamento secolare del perielio dell'orbita di due gravi di masse confrontabili (*H. Robertson*, 1938).

Soluzione. La lagrangiana di un sistema di due corpi è

$$L = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \frac{km_1 m_2}{r} + \frac{1}{8c^2}(m_1 v_1^4 + m_2 v_2^4) +$$
$$+ \frac{km_1 m_2}{2c^2 r}\left[3(v_1^2 + v_2^2) - 7(\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2) - (\mathbf{v}_1\mathbf{n})(\mathbf{v}_2\mathbf{n})\right] - \frac{k^2 m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{2c^2 r^2}.$$

---

[1]) A scanso di malintesi, indichiamo che questa espressione non coincide con la componente $(-g)\, t_{00}$ dello pseudotensore energia-impulso [calcolato con le g_{ik} dalla (106,3)]; il contributo in W è dato anche da $(-g)\, T_{ik}$.

Passando alla funzione di Hamilton ed eliminando in essa il moto del centro di massa (cfr. problema 2 del § 65), otteniamo:

$$\mathscr{H}=\frac{p^2}{2}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)-\frac{km_1m_2}{r}-\frac{p^4}{8c^2}\left(\frac{1}{m_1^3}+\frac{1}{m_2^3}\right)-$$
$$-\frac{k}{2c^2r}\left[3p^2\left(\frac{m_2}{m_1}+\frac{m_1}{m_2}\right)+7p^2+(\mathbf{pn})^2\right]+\frac{k^2m_1m_2(m_1+m_2)}{2c^2r^2}, \qquad (1)$$

dove $\mathbf{p}$ è l'impulso del moto relativo.

Determiniamo la componente radiale dell'impulso p_r come funzione della variabile r e dei parametri M (momento angolare) ed $\mathscr{E}$ (energia). Questa funzione si determina a partire dall'equazione $\mathscr{H}=\mathscr{E}$ (bisogna però sostituire nei termini del secondo ordine p^2 con la sua espressione ricavata dall'approssimazione d'ordine zero):

$$\mathscr{E}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)\left(p_r^2+\frac{M^2}{r^2}\right)-\frac{km_1m_2}{r}-$$
$$-\frac{1}{8c^2}\left(\frac{1}{m_1^3}+\frac{1}{m_2^3}\right)\left(\frac{2m_1m_2}{m_1+m_2}\right)^2\left(\mathscr{E}+\frac{km_1m_2}{r}\right)^2-$$
$$-\frac{k}{2c^2r}\left[3\left(\frac{m_2}{m_1}+\frac{m_1}{m_2}\right)+7\right]\frac{2m_1m_2}{m_1+m_2}\left(\mathscr{E}+\frac{km_1m_2}{r}\right)-$$
$$-\frac{k}{2c^2r}p_r^2+\frac{k^2m_1m_2(m_1+m_2)}{2c^2r^2}.$$

I calcoli successivi sono analoghi a quelli fatti nel § 101. Determinata p_r dall'equazione algebrica scritta, cambiamo nell'integrale

$$S_r=\int p_r dr$$

la variabile r in modo tale da ridurre il termine contenente M^2 alla forma M^2/r^2. Sviluppando poi l'espressione sotto radice per correzioni relativistiche piccole, otteniamo:

$$S_r=\int\sqrt{A+\frac{B}{r}-\left(M^2-\frac{6k^2m_1^2m_2^2}{c^2}\right)\frac{1}{r^2}}\,dr$$

(cfr. (101,6)), dove A e B sono coefficienti costanti, che non è necessario calcolare esplicitamente.

Per lo spostamento del perielio dell'orbita del moto relativo si trova infine:

$$\delta\varphi=\frac{6\pi k^2m_1^2m_2^2}{c^2M^2}=\frac{6\pi k(m_1+m_2)}{c^2a(1-e^2)}.$$

Da un confronto con la (101,7), vediamo che, date le dimensioni e la forma dell'orbita, lo spostamento del perielio è lo stesso che si ha nel moto di un corpo nel campo di un centro fisso di massa m_1+m_2.

4. Determinare la frequenza della precessione di una trottola sferica in moto orbitale nel campo gravitazionale di un corpo centrale rotante attorno al suo asse.

Soluzione. In prima approssimazione, l'effetto cercato è rappresentato dalla somma di due parti indipendenti di cui una è legata al campo a simmetria centrale newtoniano (*H. Weyl*, 1923), e l'altra alla rotazione del corpo centrale (*L. Schiff*, 1960).

La prima parte è descritta dal termine supplementare nella funzione di Lagrange della trottola, corrispondente al secondo termine nella (106,17.)

Rappresentiamo la velocità dei singoli elementi della trottola (di masse dm) nella forma $\mathbf{v} = \mathbf{V} + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]$, dove $\mathbf{V}$ è la velocità del suo moto orbitale, $\boldsymbol{\omega}$ la velocità angolare, $\mathbf{r}$ il raggio vettore dell'elemento dm rispetto al centro di massa della trottola (in modo che l'integrale esteso al volume della trottola è $\int \mathbf{r}dm = 0$). Omettendo i termini non dipendenti da $\boldsymbol{\omega}$ e trascurando i termini quadratici in $\boldsymbol{\omega}$, abbiamo:

$$\delta^{(1)}L = \frac{3km'}{2c^2} \int \frac{2(\mathbf{V}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}])}{R} dm,$$

dove m' è la massa del corpo centrale, $R = |\mathbf{R}_0 + \mathbf{r}|$ la distanza tra il centro del campo e l'elemento dm, $\mathbf{R}_0$ il raggio vettore del centro di massa della trottola. Nello sviluppo $1/R \approx 1/R_0 - \mathbf{nr}/R^2$ (dove $\mathbf{n} = \mathbf{R}_0/R_0$) l'integrale del primo termine si annulla, e nel secondo termine l'integrazione va fatta secondo la formula

$$\int x_\alpha x_\beta \, dm = \frac{1}{2} I \delta_{\alpha\beta},$$

dove I è il momento d'inerzia della trottola. Si ottiene infine:

$$\delta^{(1)}L = \frac{3km'}{2c^2R_0^2} (\mathbf{M}[\mathbf{v}_0\mathbf{n}]),$$

dove $\mathbf{M} = I\boldsymbol{\omega}$ è il momento di rotazione della trottola.

Il termine supplementare nella lagrangiana, dovuto alla rotazione del corpo centrale, può essere ricavato pure dalla (106,17), ma è piú semplice ancora calcolarlo con l'aiuto della formula (1) stabilita nel problema del § 105:

$$\delta^{(2)}L = \frac{2k}{c^2} \int \frac{\mathbf{M}'[[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]\mathbf{R}]}{R^3} dm,$$

dove $\mathbf{M}'$ è il momento angolare del corpo centrale. Sviluppando

$$\frac{\mathbf{R}}{R^3} \approx \frac{\mathbf{n}}{R_0^2} + \frac{1}{R_0^3}(\mathbf{r} - 3\mathbf{n}(\mathbf{nr}))$$

ed integrando, si ottiene:

$$\delta^{(2)}L = \frac{k}{c^2R_0^3} \{\mathbf{MM}' - 3(\mathbf{nM})(\mathbf{nM}')\}.$$

In tal modo, la correzione totale alla lagrangiana è

$$\delta L = -\mathbf{M}\boldsymbol{\Omega}, \quad \boldsymbol{\Omega} = \frac{3km'}{2c^2R_0^2}[\mathbf{nv}_0] + \frac{k}{c^2R_0^3}\{3\mathbf{n}(\mathbf{nM}') - \mathbf{M}'\}.$$

A questa funzione corrisponde l'equazione del moto

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = [\boldsymbol{\Omega}\mathbf{M}]$$

(cfr. l'equazione (2) del problema nel § 105). Ciò vuol dire che il momento $\mathbf{M}$ della trottola compie una precessione con velocità angolare $\boldsymbol{\Omega}$, restando costante di grandezza.

Capitolo XIII

ONDE GRAVITAZIONALI

§ 107. *Onde gravitazionali deboli*

Il carattere finito della velocità di propagazione delle interazioni rende possibile nella teoria relativistica della gravitazione, come pure nell'elettrodinamica, l'esistenza di un campo gravitazionale libero, non legato ai corpi, ossia un campo di onde gravitazionali.

Esaminiamo un campo gravitazionale debole nel vuoto. Come nel § 105, introduciamo il tensore h_{ik} che descrive una piccola perturbazione della metrica galileiana:

$$g_{ik} = g_{ik}^{(0)} + h_{ik}. \tag{107,1}$$

Il tensore metrico controvariante, a meno dei termini del primo ordine in h_{ik}, è

$$g^{ik} = g^{ik(0)} - h^{ik}, \tag{107,2}$$

e il determinante del tensore g_{ik}:

$$g = g^{(0)}(1 + h), \tag{107,3}$$

dove $h \equiv h_i^i$; tutte le operazioni di innalzamento e di abbassamento degli indici tensoriali sono fatte con la metrica imperturbata $g_{ik}^{(0)}$.

Come è stato indicato nel § 105, la condizione che le h_{ik} sono piccole permette di fare sul sistema di riferimento trasformazioni arbitrarie del tipo $x'^i = x^i + \xi^i$ dove ξ^i sono grandezze piccole; si ha quindi

$$h'_{ik} = h_{ik} - \frac{\partial \xi_i}{\partial x^k} - \frac{\partial \xi_k}{\partial x^i}. \tag{107,4}$$

Usando questo arbitrio nella definizione del tensore h_{ik}, imponiamo la condizione supplementare seguente:

$$\frac{\partial \psi_i^k}{\partial x^k} = 0, \quad \psi_i^k = h_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k h, \tag{107,5}$$

dopo di che il tensore di Ricci assume la semplice forma (105,11):

$$R_{ik} = \frac{1}{2}\Box h_{ik}, \tag{107,6}$$

dove $\Box$ è l'operatore di D'Alembert:

$$\Box = -g^{lm(0)} \frac{\partial^2}{\partial x^l \, \partial x^m} = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

Le condizioni (107,5) non fissano ancora univocamente la scelta di un sistema di riferimento: se alcune h_{ik} soddisfano queste condizioni, esse saranno soddisfatte anche dalle h_{ik} (107,4), purché le ξ^i siano soluzioni dell'equazione

$$\Box \, \xi^i = 0. \tag{107,7}$$

Eguagliando a zero l'espressione (107,6), troviamo quindi le equazioni del campo gravitazionale nel vuoto nella forma

$$\Box \, h_i^k = 0. \tag{107,8}$$

L'equazione ottenuta è un'ordinaria equazione d'onda. Di conseguenza, i campi gravitazionali, come anche quelli elettromagnetici, si propagano nel vuoto alla velocità della luce.

Consideriamo un'onda gravitazionale piana. In una tale onda il campo varia in una sola direzione spaziale; dirigendo l'asse $x^1 = x$ lungo questa direzione, le equazioni (107,8) diventano

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) h_i^k = 0, \tag{107,9}$$

che ammettono come soluzione qualsiasi funzione di $t \pm x/c$ (§ 47).

Supponiamo che l'onda si propaghi nel senso positivo dell'asse delle x. Tutte le grandezze h_i^k dell'onda sono funzioni di $t - x/c$. Le condizioni supplementari (107,5) danno in questo caso $\dot{\psi}_i^1 - \dot{\psi}_i^0 = 0$, dove il puntino sulla lettera indica la derivazione rispetto a t. Queste uguaglianze si integrano, semplicemente eliminando il segno di derivazione; le costanti d'integrazione si possono porre uguali a zero, perché ci interessa qui (come nel caso delle onde elettromagnetiche) solo la parte variabile del campo. Tra le singole componenti di ψ_i^k si hanno dunque le relazioni:

$$\psi_1^1 = \psi_1^0, \quad \psi_2^1 = \psi_2^0, \quad \psi_3^1 = \psi_3^0, \quad \psi_0^1 = \psi_0^0. \tag{107,10}$$

Come è stato detto, poiché le condizioni (107,5) non determinano ancora univocamente il sistema di riferimento, possiamo sottoporre le coordinate a una trasformazione del tipo $x'^i = x^i + \xi^i (t - x/c)$. A questa trasformazione si può ricorrere per annullare le quattro grandezze: ψ_1^0, ψ_2^0, ψ_3^0, $\psi_2^2 + \psi_3^3$. Dalle uguaglianze (107,10) segue che si annullano allora anche le componenti ψ_1^1, ψ_2^1, ψ_3^1, ψ_0^0. Per quanto riguarda le rimanenti grandezze ψ_2^3, $\psi_2^2 - \psi_3^3$, esse non possono essere annullate mediante una scelta del sistema di riferimento, perché nella trasformazione (107,4) con $\xi_i = \xi_i (t - x/c)$ queste componenti generalmente non cambiano.

Notiamo che anche le grandezze $\psi \equiv \psi_i^i$ si annullano, di conseguenza, $\psi_i^k = h_i^k$.

Cosí, un'onda gravitazionale piana è determinata da due grandezze, e cioè da h_{23} ed $h_{22} = -h_{33}$. In altri termini, le onde gravitazionali sono delle onde trasversali la cui polarizzazione è determinata da un tensore simmetrico di 2° rango nel piano yz, cui somma dei termini diagonali $h_{22} + h_{33}$ è nulla. Per le due polarizzazioni indipendenti si possono scegliere i casi in cui una delle due grandezze h_{23} e $^1/_2\,(h_{22} - h_{33})$ è differente da zero. Queste due polarizzazioni si distinguono l'una dall'altra per una rotazione di un angolo uguale a $\pi/4$ nel piano yz.

Calcoliamo lo pseudotensore energia impulso di un'onda gravitazionale piana. Le componenti t^{ik} sono grandezze infinitesime del secondo ordine; dobbiamo calcolarle trascurando termini di ordine superiore. Poiché per $h = 0$ il determinante g differisce da $g^{(0)} = -1$ per grandezze del secondo ordine, nella formula generale (96,9) si può porre $g_{,l}^{ik} \approx g_{,l}^{ik} \approx -h_{,l}^{ik}$. Per un'onda piana, tutti i termini differenti da zero in t^{ik} sono contenuti nel termine

$$\frac{1}{2} g^{il} g^{km} g_{np} g_{qr} g^{nr}{}_{,l}\, g^{pq}{}_{,m} = \frac{1}{2} h_q^{n,\,i} h_n^{q,\,k}$$

compreso tra parentesi graffe nella (96,9) (è facile verificarlo orientando un asse del sistema di riferimento galileiano lungo la direzione di propagazione dell'onda). In tal modo,

$$t^{ik} = \frac{c^4}{32\pi k} h_q^{n,\,i} h_n^{q,\,k}. \tag{107,11}$$

Il flusso d'energia in un'onda è determinato dalle grandezze $-cgt^{0\alpha} \approx ct^{0\alpha}$. In un'onda piana propagantesi lungo l'asse x^1, dove le componenti non nulle h_{23} ed $h_{22} = -h_{33}$ dipendono solo dalla differenza $t - x/c$, questo flusso è diretto lungo lo stesso asse x^1 ed è uguale a

$$ct^{01} = \frac{c^3}{16\pi k}\left[\dot{h}_{23}^2 + \frac{1}{4}(\dot{h}_{22} - \dot{h}_{33})^2\right]. \tag{107,12}$$

Le condizioni iniziali per un campo arbitrario di onde gravitazionali debbono essere date da quattro funzioni arbitrarie delle coordinate: siccome le onde sono trasversali, ci sono soltanto due componenti indipendenti $h_{\alpha\beta}$ di cui bisogna assegnare anche le loro derivate prime rispetto al tempo. Sebbene questo calcolo sia stato fatto qui partendo dalle proprietà di un campo gravitazionale debole, è chiaro però che il suo risultato — il numero delle condizioni iniziali necessarie — non può essere legato a questa ipotesi ma riguarda qualsiasi campo libero, cioè un campo gravitazionale in zone senza gravi.

PROBLEMA

Determinare il tensore di curvatura di un'onda gravitazionale piana debole.

Soluzione. Calcolando R_{iklm} con l'aiuto della formula (105,8), troviamo le seguenti componenti differenti da zero:

$$-R_{0202}=R_{0303}=-R_{1212}=R_{0212}=R_{0331}=R_{3131}=\sigma,$$

$$R_{0203}=-R_{1231}=-R_{0312}=R_{0231}=\mu,$$

dove si è posto: $\sigma=-\frac{1}{2}\ddot{h}_{33}=\frac{1}{2}\ddot{h}_{22}$, $\mu=-\frac{1}{2}\ddot{h}_{23}$. Utilizzando i simboli introdotti nella (92,15) per i tensori tridimensionali $A_{\alpha\beta}$ e $B_{\alpha\beta}$ abbiamo:

$$A_{\alpha\beta}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -\sigma & \mu\\ 0 & \mu & \sigma\end{pmatrix},\qquad B_{\alpha\beta}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & \mu & \sigma\\ 0 & \sigma & -\mu\end{pmatrix}.$$

È possibile annullare (in un punto dato dello spazio quadridimensionale) una delle grandezze σ oppure μ mediante una rotazione opportuna degli assi x^2, x^3; se si annulla la grandezza σ, il tensore di curvatura si riduce al tipo degenere di Petrov II (tipo N).]

§ 108. *Onde gravitazionali nello spazio-tempo curvo*

Analogamente a come abbiamo studiato la propagazione delle onde gravitazionali in uno spazio-tempo piatto, si può esaminare la propagazione di piccole perturbazioni rispetto alla metrica $g^{(0)}_{ik}$ arbitraria « imperturbata » (non galileiana). Tenendo conto anche di alcune altre possibili applicazioni, scriviamo qui le equazioni necessarie nella forma piú generale.

Scrivendo di nuovo le g_{ik} nella forma (107,1), troviamo che la correzione del primo ordine ai simboli di Christoffel viene espressa mediante le correzioni h_{ik} secondo la formula

$$\Gamma^{i(1)}_{kl}=\frac{1}{2}\left(h^{i}_{k;\,l}+h^{i}_{l;\,k}-h^{;\,i}_{kl}\right), \tag{108,1}$$

che si può verificare con un calcolo diretto (qui e piú avanti tutte le operazioni tensoriali — innalzamento ed abbassamento degli indici, derivazioni covarianti — si fanno con l'aiuto della metrica non galileiana $g^{(0)}_{ik}$). Per le correzioni al tensore di curvatura si ottiene:

$$R^{i(1)}_{klm}=\frac{1}{2}\left(h^{i}_{k;\,m;\,l}+h^{i}_{m;\,k;\,l}-h_{km}{}^{;\,i}{}_{;\,l}-h^{i}_{k;\,l;\,m}-h^{i}_{l;\,k;\,m}+h_{kl}{}^{;\,i}{}_{;\,m}\right). \tag{108,2}$$

Di qui le correzioni al tensore di Ricci sono:

$$R^{(1)}_{ik}=R^{l(1)}_{ilk}=\frac{1}{2}\left(h^{l}_{i;\,k;\,l}+h^{l}_{k;\,i;\,l}-h_{ik}{}^{;\,l}{}_{;\,l}-h_{;\,i;\,k}\right). \tag{108,3}$$

Le correzioni alle componenti miste del tensore di Ricci si ottengono invece a partire dalla relazione

$$R^{k(0)}_{i}+R^{k(1)}_{i}=\left(R^{(0)}_{il}+R^{(1)}_{il}\right)\left(g^{kl(0)}-h^{kl}\right),$$

da cui

$$R_i^{k(1)} = g^{kl(0)} R_{il}^{(1)} - h^{kl} R_{il}^{(0)}. \tag{108,4}$$

Una metrica esatta nel vuoto deve soddisfare le equazioni esatte di Einstein $R_{ik} = 0$. Poiché la metrica imperturbata $g_{ik}^{(0)}$ soddisfa le equazioni $R_{ik}^{(0)} = 0$, si ottiene allora per una perturbazione l'equazione $R_{ik}^{(1)} = 0$, cioè

$$h^l_{i;\,k;\,l} + h^l_{k;\,i;\,l} - h_{ik}{}^{;\,l}{}_{;\,l} - h_{;\,i;\,k} = 0. \tag{108,5}$$

Nel caso generale di onde gravitazionali arbitrarie è impossibile semplificare questa equazione sino a una forma simile alla (107,8). Tuttavia, questo è possibile nel caso importante di onde di alta frequenza: la lunghezza d'onda λ e il periodo di oscillazioni λ/c sono piccoli rispetto alle distanze caratteristiche L e ai tempi caratteristici L/c per i quali cambia il « campo di fondo ». Ogni derivazione delle componenti h_{ik} aumenta allora l'ordine di grandezza in L/λ rispetto alle derivate della metrica imperturbata $g_{ik}^{(0)}$. Se ci si limita soltanto ai termini dei due ordini piú elevati ($(L/\lambda)^2$ e (L/λ)), si può cambiare allora l'ordine di derivazione nella (108,5); in effetti, la differenza

$$h^l_{i;\,k;\,l} - h^l_{i;\,l;\,k} \approx h^l_m R^{m(0)}_{ikl} - h^m_i R^{l(0)}_{mkl}$$

è dell'ordine di $(L/\lambda)^0$, mentre ciascuna delle espressioni $h^l_{i;k;l}$ ed $h^l_{i;k;l}$ contiene termini di ambedue gli ordini maggiori. Sottoponendo ora le h_{ik} alle condizioni supplementari

$$\psi^k_{i;\,k} = 0 \tag{108,6}$$

[analoghe alle (107,5)], otteniamo l'equazione

$$h_{ik}{}^{;\,l}{}_{;\,l} = 0, \tag{108,7}$$

che generalizza l'equazione (107,8).

Per le ragioni indicate nel § 107, la condizione (108,6) non fissa univocamente la scelta delle coordinate. Quest'ultime possono infatti essere sottoposte ancora alla trasformazione $x'^i = x^i + \xi^i$, dove le grandezze piccole ξ^i soddisfano l'equazione $\xi^{i;k}_{;k} = 0$. In particolare, si può ricorrere a queste trasformazioni per imporre sulle h_{ik} la condizione $h \equiv h^i_i = 0$. Si ha allora $\psi^k_i = h^k_i$, in modo che le h^k_i soddisfano alle condizioni

$$h^k_{i;\,k} = 0, \quad h = 0. \tag{108,8}$$

Dopo questo, la cerchia delle trasformazioni ancora ammissibili si restringe alla condizione $\xi^i_{;i} = 0$.

Lo pseudotensore t^{ik} contiene, in generale, oltre alla parte imperturbata $t^{ik(0)}$, anche termini di differenti ordini rispetto a h_{ik}.

Noi otterremo un'espressione analoga alla (107,11) prendendo la media delle grandezze t^{ik} su settori dello spazio quadridimensionale di dimensioni maggiori di λ, ma minori di L. Le medie prese in questo modo (che indicheremo in seguito con parentesi angolari $\langle \ldots \rangle$) non riguardano la metrica $g_{ik}^{(0)}$ e annullano tutti i termini lineari rispetto alle grandezze h_{ik} oscillanti rapidamente. Tra i termini quadratici conserveremo soltanto quelli di ordine piú elevato in $1/\lambda$; tali sono i termini quadratici rispetto alle derivate $h_{ik;\,l} \equiv \partial h_{ik}/\partial x^l$.

Con questa approssimazione si possono omettere tutti quei termini in t^{ik} che rappresentano una 4-divergenza. In effetti, gli integrali di tali espressioni estesi ad una regione dello spazio quadridimensionale (regione delle medie) si possono trasformare applicando il teorema di Gauss, diminuendo cosí di un'unità il loro ordine di grandezza in $1/\lambda$. Inoltre, dopo l'integrazione per parti, alcuni termini si annullano in virtú delle (108,7) e (108,8). Integrando per parti e trascurando l'integrale della 4-divergenza troviamo:

$$\langle h^{ln}_{,\,p} h^{p}_{l,\,n} \rangle = -\langle h^{ln} h^{p}_{l,\,p,\,n} \rangle = 0,$$
$$\langle h^{il}{}_{,\,n} h_l^{k,\,n} \rangle = -\langle h^{il} h^{k,\,n}_{l,\,n} \rangle = 0.$$

Tra tutti i termini del secondo ordine resta alla fine soltanto

$$\langle t^{ik(2)} \rangle = \frac{c^4}{32\pi k} \langle h_q^{n,\,i} h_n^{q,\,k} \rangle. \qquad (108\ 9)$$

Notiamo che con la stessa appossimazione si avrà allora $\langle t_i^{i(2)} \rangle = 0$

Un'onda gravitazionale, dotata di una determinata energia, è di per sé stessa una sorgente di un campo gravitazionale supplementare. Un tale campo, insieme con l'energia che lo genera, è un effetto del secondo ordine rispetto alle grandezze h_{ik}. Ma nel caso di onde gravitazionali di alte frequenze, questo effetto si rafforza sostanzialmente: il fatto che il pseudotensore t^{ik} è quadratico rispetto alle derivate di h_{ik} fa sí che nel suo ordine di grandezza appaia il fattore λ^{-2} che è grande. In questo caso si può dire che le onde stesse creano un « campo di fondo » nel quale esse si propagano. È opportuno studiare questo campo applicando il metodo già indicato, e cioè prendere le medie in settori dello spazio quadridimensionale di dimeusioni maggiori di λ. Questo metodo attenua l'« increspamento » di onde corte e conserva la metrica «di fondo» che varia lentamente (*R. A. Isaacson*, 1968)

Per dedurre l'equazione che determina questa metrica, nello sviluppo del tensore R_{ik} bisogna tener conto non soltanto dei termini lineari, ma di quelli quadratici rispetto a h_{ik}: $R_{ik} = R_{ik}^{(0)} + R_{ik}^{(1)} + R_{ik}^{(2)}$. Come è stato già indicato, le medie non riguardano i termini di ordine zero. In tal modo, le equazioni medie del campo $\langle R_{ik} \rangle = 0$

assumono la forma

$$R_{ik}^{(0)} = -\langle R_{ik}^{(2)} \rangle, \tag{108,10}$$

dove in $R_{ik}^{(2)}$ si debbono conservare soltanto i termini del secondo ordine in $1/\lambda$. Questi ultimi si ricavano facilmente dall'identità (96,7). I termini quadratici rispetto a h_{ik}, provenienti dal secondo membro di questa identità, che ha la forma della 4-divergenza, scompaiono (nell'approssimazione considerata) quando si prendono le medie e, di conseguenza, resta

$$\left\langle \left(R^{ik} - \frac{1}{2} g^{ik} R \right)^{(2)} \right\rangle = -\frac{8\pi k}{c^4} \langle t^{ik(2)} \rangle$$

oppure, con la stessa approssimazione, poiché $\langle t_i^{i(2)} \rangle = 0$,

$$\langle R_{ik}^{(2)} \rangle = -\frac{8\pi k}{c^4} \langle t_{ik}^{(2)} \rangle.$$

Infine, utilizzando la (108,9), otteniamo l'equazione finale (108,10) nella forma

$$R_{ik}^{(0)} = \frac{1}{4} \langle h_{q,\,i}^{n} h_{n,\,k}^{q} \rangle. \tag{108,11}$$

Se il « fondo » è interamente creato dalle onde stesse, le equazioni (108,11) e (108,7) debbono avere soluzioni compatibili. La valutazione delle espressioni di ambedue i membri dell'equazione (108,11) mostra che in questo caso il raggio di curvatura della metrica di fondo è legato, per il suo ordine di grandezza L, alla lunghezza d'onda λ e all'ordine di grandezza del suo campo h nel modo seguente: $L^{-2} \sim h^2/\lambda^2$, cioè $\lambda/L \sim h$.

§ 109. *Onda gravitazionale forte*

In questo paragrafo sarà esaminata la soluzione delle equazioni di Einstein, che rappresenta la generalizzazione di un'onda gravitazionale debole piana nello spazio-tempo piatto (*I. Robinson, H. Bondi*, 1957).

Cercheremo una soluzione in cui tutte le componenti del tensore metrico diventino, con una scelta opportuna del sistema di riferimento, funzioni di una sola variabile che chiameremo x^0 (senza determinarne *a priori* il carattere). Questa condizione ammette anche una trasformazione delle coordinate del tipo seguente:

$$x^\alpha \to x^\alpha + \varphi^\alpha(x^0), \tag{109,1}$$

$$x^0 \to \varphi^0(x^0), \tag{109,2}$$

dove φ^0, φ^α sono funzioni arbitrarie.

Il carattere della soluzione dipende sostanzialmente dalla possibilità di annullare tutte le $g_{0\alpha}$ con le tre trasformazioni (109,1). Questo è possibile, se il determinante $|g_{\alpha\beta}| \neq 0$. Infatti, per la trasformazione (109,1) si ha $g_{0\alpha} \to g_{0\alpha} + g_{\alpha\beta}\dot{\varphi}^\beta$ (dove il puntino indica la derivazione rispetto ad x^0); per $|g_{\alpha\beta}| \neq 0$, il sistema di equazioni

$$g_{0\alpha} + g_{\alpha\beta}\dot{\varphi}^\beta = 0$$

determina le $\varphi^\beta(x^0)$ che realizzano la trasformazione richiesta. Questo caso verrà studiato nel § 117; ci interessa qui la soluzione nella quale

$$|g_{\alpha\beta}| = 0. \tag{109,3}$$

In questo caso, non esiste un sistema di riferimento, dove tutte le $g_{0\alpha}$ siano nulle. Si può invece ottenere, con opportune trasformazioni del tipo (109,1), (109,2), che si abbia

$$g_{01} = 1, \quad g_{00} = g_{02} = g_{03} = 0. \tag{109,4}$$

La variabile x^0 è allora del genere luce: quando $dx^\alpha = 0$, $dx^0 \neq 0$ e l'intervallo $ds = 0$; indicheremo la variabile x^0, scelta in questo modo, con $x^0 = \eta$. L'elemento d'intervallo può essere rappresentato, per le condizioni (109,4), nella forma

$$ds^2 = 2\,dx^1\,d\eta + g_{ab}\,(dx^a + g^a\,dx^1)\,(dx^b + g^b\,dx^1). \tag{109,5}$$

Sempre in questo paragrafo, gli indici $a, b, c, \ldots$ prendono i valori 2, 3; $g_{ab}(\eta)$ si può considerare come un tensore bidimensionale, e due grandezze $g^a(\eta)$ come le componenti di un vettore bidimensionale. Il calcolo delle grandezze R_{ab} conduce alle seguenti equazioni di campo:

$$R_{ab} = -\frac{1}{2}\,g_{ac}\dot{g}^c g_{bd}\dot{g}^d = 0.$$

Ne risulta che $\dot{g}_{ac}g^c = 0$ oppure $\dot{g}^c = 0$, cioè g^c = costante. Di conseguenza, si può ridurre la metrica considerata, con la trasformazione $x^a + g^a x^1 \to x^a$, alla forma

$$ds^2 = 2\,dx^1\,d\eta + g_{ab}(\eta)\,dx^a\,dx^b. \tag{109,6}$$

Il determinante $-g$ di questo tensore metrico coincide con il determinante $|g_{ab}|$, e tra tutti i simboli di Christoffel sono differenti da zero soltanto i seguenti:

$$\Gamma^a_{b0} = \frac{1}{2}\,\varkappa^a_b, \quad \Gamma^1_{ab} = -\frac{1}{2}\,\varkappa_{ab},$$

nei quali abbiamo introdotto il tensore bidimensionale $\varkappa_{ab} = \dot{g}_{ab}$, $\varkappa^b_a = g^{bc}\varkappa_{ac}$. Tra tutte le componenti del tensore di Ricci solo la

R_{00} non si annulla identicamente, in modo che abbiamo l'equazione

$$R_{00} = -\frac{1}{2}\dot{\varkappa}^a_a - \frac{1}{4}\varkappa^b_a\varkappa^a_b = 0. \qquad (109,7)$$

Cosí, le tre funzioni $g_{22}(\eta)$, $g_{23}(\eta)$, $g_{33}(\eta)$ debbono soddisfare una stessa equazione. Ne segue che due di queste funzioni possono essere date arbitrariamente. È piú comodo rappresentare l'equazione (109,7) sotto un'altra forma, scrivendo le grandezze g_{ab} nel seguente modo:

$$g_{ab} = -\chi^2\gamma_{ab}, \quad |\gamma_{ab}| = 1. \qquad (109,8)$$

Allora il determinante diventa $-g = |g_{ab}| = \chi^4$, e la sostituzione nella (109,7) dà, dopo una semplice trasformazione,

$$\ddot{\chi} + \frac{1}{8}(\dot{\gamma}_{ac}\gamma^{bc})(\dot{\gamma}_{bd}\gamma^{ad})\chi = 0 \qquad (109,9)$$

(γ^{ab} è il tensore bidimensionale, inverso del tensore γ_{ab}). Se sono date due funzioni arbitrarie $\gamma_{ab}(\eta)$ (legate tra di loro dalla relazione $|\gamma_{ab}| = 1$), questa equazione determinerà la funzione $\chi(\eta)$.

Siamo giunti quindi ad una soluzione contenente due funzioni arbitrarie. È facile vedere che essa rappresenta la generalizzazione dell'onda gravitazionale piana debole (studiata nel § 107) che si propaga in una sola direzione[1]). Quest'ultima si ottiene facendo la trasformazione

$$\eta = \frac{t+x}{\sqrt{2}}, \quad x^1 = \frac{t-x}{\sqrt{2}}$$

e ponendo $\gamma_{ab} = \delta_{ab} + h_{ab}(\eta)$ (dove h_{ab} sono grandezze piccole soggette alla condizione $h_{22} + h_{33} = 0$) e $\chi = 1$; il valore costante χ soddisfa l'equazione (109,9), se in esso sono trascurati i piccoli termini del secondo ordine.

Supponiamo che per un punto x dello spazio passi un'onda gravitazionale debole di lunghezza finita (« pacchetto d'onda »). Prima che l'onda passi, abbiamo $h_{ab} = 0$, $\chi = 1$; dopo il passaggio abbiamo di nuovo $h_{ab} = 0$, $\partial^2\chi/\partial t^2 = 0$, ma se nella equazione (109,9) si prendono in considerazione i termini del secondo ordine, compare un valore negativo non nullo di $\partial\chi/\partial t$:

$$\frac{\partial\chi}{\partial t} \approx -\frac{1}{8}\int\left(\frac{\partial h_{ab}}{\partial t}\right)^2 dt < 0$$

(l'integrale è preso nell'intervallo di tempo relativo al passaggio della onda). Quindi, dopo il passaggio dell'onda si avrà $\chi = 1 - \text{costante}\cdot t$, e dopo un intervallo di tempo finito χ cambierà di

---

[1]) Per la soluzione del problema per un numero maggiore di variabili si veda *I. Robinson, A. Trautman, Phys. Rev. Lett.* 4. 431 (1960); *Proc. Roy. Soc.* A265, 463 (1962).

segno. Ma l'annullamento di χ significa l'annullamento del determinante metrico g, cioè una singolarità della metrica. Questa singolarità non ha però un carattere fisico; essa è dovuta solamente alla deficienza del sistema di riferimento che è stato « distorto » da un'onda gravitazionale passante e può essere eliminata con un'opportuna trasformazione; dopo il passaggio dell'onda, lo spazio-tempo diventa nuovamente piatto:

Lo si può verificare in modo diretto. Se la variabile η è calcolata a partire da un suo valore corrispondente ad un punto singolare, si ha allora $\chi = \eta$, cosicché

$$ds^2 = 2d\eta\, dx^1 - \eta^2\, [(dx^2)^2 + (dx^3)^2].$$

Fatta la trasformazione

$$\eta x^2 = y, \quad \eta x^3 = z, \quad x^1 = \xi - \frac{y^2 + z^2}{2\eta}$$

otteniamo:

$$ds^2 = 2d\eta\, d\xi - dy^2 - dz^2,$$

e la sostituzione $\eta = (t + x)/\sqrt{2}$, $\xi = (t - x)/\sqrt{2}$ conduce infine alla forma galileiana.

Questa proprietà dell'onda gravitazionale — la comparsa di una singolarità fittizia — non è dovuta, naturalmente, alla sua debole intensità; questa proprietà è presente anche nella soluzione generale dell'equazione (109,7). Come pure nell'esempio citato, in prossimità della singolarità si ha $\chi \sim \eta$, cioè $-g \sim \eta^4$ [1]).

PROBLEMA

Trovare la condizione per la quale la metrica

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 + f\,(t - x,\ y,\ z)\,(dt - dx)^2$$

è la soluzione esatta delle equazioni di Einstein per un campo nel vuoto (*A. Peres*, 1960).

Soluzione. Il tensore di Ricci si calcola piú semplicemente nelle coordinate $u = (t - x)/\sqrt{2}$, $v = (t + x)/\sqrt{2}$, y, z, dove

$$ds^2 = -dy^2 - dz^2 + 2du\, dv + 2f\,(u,\ y,\ z)\, du^2.$$

Oltre alle $g_{22} = g_{33} = -1$, sono differenti da zero solo le seguenti componenti del tensore metrico: $g_{uu} = 2f$, $g_{uv} = 1$; inoltre, $g^{vv} = -2f$, $g^{uv} = 1$, e il determinante $g = -1$. Il calcolo diretto mediante la (92,1) per le componenti non nulle del tensore di curvatura dà:

$$R_{yuyu} = -\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad R_{zuzu} = -\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}, \quad R_{yuzu} = -\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial z}.$$

---

[1]) Ciò si può dimostrare con l'aiuto dell'equazione (109,7), come abbiamo fatto nel § 97 per un'analoga equazione tridimensionale nel sistema di riferimento sincrono. Come in quel caso, la singolarità fittizia è originata dall'intersezione delle linee coordinate.

L'unica componente non nulla del tensore di Ricci è $R_{uu} = \Delta f$, dove Δ è l'operatore di Laplace rispetto alle coordinate y, z. In tal modo, l'equazione di Einstein è $\Delta f = 0$, cioè la funzione $f(t - x, y, z)$ deve essere armonica rispetto alle variabili y, z.

Se la funzione f non dipende da y, z, oppure se essa è lineare rispetto a queste variabili, il campo non esiste: lo spazio-tempo è piatto (il tensore di curvatura si annulla). La funzione quadratica rispetto ad y, z

$$f(u, y, z) = yzf_1(u) + \frac{1}{2}(y^2 - z^2) f_2(u)$$

corrisponde ad un'onda piana che si propaga nel senso positivo dell'asse delle x, infatti, il tensore di curvatura dipende in un tale campo solo da $t - x$:

$$R_{yuzu} = -f_1(u), \quad R_{yuyu} = -R_{zuzu} = -f_2(u).$$

In base alle due possibili polarizzazioni dell'onda, la metrica contiene due funzioni arbitrarie $f_1(u)$ ed $f_2(u)$.

110. Irraggiamento di onde gravitazionali

Esaminiamo un campo gravitazionale debole creato da corpi che si muovono a velocità piccole rispetto alla velocità della luce.

Grazie alla presenza della materia, le equazioni del campo gravitazionale si distinguono da un'equazione d'onda ordinaria di tipo $\Box h_i^k = 0$ (107,8) per termini contenuti nel secondo membro dell'uguaglianza, che provengono dal tensore energia-impulso della materia. Scriviamo queste equazioni nella forma

$$\frac{1}{2} \Box \psi_i^k = \frac{8\pi k}{c^4} \tau_i^k, \tag{110,1}$$

dove in luogo delle h_i^k abbiamo introdotto le grandezze, piú comode nel caso in esame,

$$\psi_i^k = h_i^k - \frac{1}{2} \delta_i^k h,$$

e dove τ_i^k indica convenzionalmente espressioni supplementari che appaiono quando si passa dalle equazioni gravitazionali esatte al caso di campi deboli in un'approssimazione considerata. È facile vedere che le componenti τ_0^0 e τ_α^0 si ottengono direttamente dalle componenti corrispondenti T_i^k ricavando da esse le grandezze infinitesime dell'ordine richiesto; per quanto concerne le componenti τ_β^α, esse contengono, oltre ai termini ottenuti dalle T_β^α, anche infinitesimi del secondo ordine provenienti da $R_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k R$ [1]).

[1]) Dalle equazioni (110,1) si possono ricavare di nuovo le formule (106,1), (106,2), utilizzate nel § 106, per un campo costante debole distante da corpi. In prima approssimazione, omettiamo i termini contenenti le derivate seconde rispetto al tempo (in $1/c^2$), e tra tutte le componenti τ_i^k conserviamo solamente $\tau_0^0 = \mu c^2$. La soluzione delle equazioni $\Delta\psi_\alpha^\beta = 0$, $\Delta\psi_0^\alpha = 0$, $\Delta\psi_0^0 = 16\pi k\mu/c^2$,

Le grandezze ψ_i^k soddisfano la condizione (107,5) $\partial\psi_i^k/\partial x^k = 0$. Dalla (110,1) segue che la stessa equazione si ha per le τ_i^k:

$$\frac{\partial \tau_i^k}{\partial x^k} = 0. \tag{110,2}$$

Questa equazione sostituitsce qui la ralazione generale $T^k_{i;k} = 0$.

Servendoci delle equazioni scritte, esaminiamo la questione dell'energia irraggiata sotto forma di onde gravitazionali da corpi in moto. La soluzione di questo problema esige che venga determinato il campo gravitazionale nella « zona delle onde », cioè a distanze, grandi rispetto alla lunghezza delle onde irraggiate.

Tutti i calcoli sono analoghi, in linea di massima, a quelli fatti per le onde elettromagnetiche. Le equazioni di un campo gravitazionale debole (110,1) sono formalmente analoghe all'equazione dei potenziali ritardati (§ 62). Si può quindi scrivere immediatamente la soluzione generale nella forma

$$\psi_i^k = -\frac{4k}{c^4}\int (\tau_i^k)_{t-R/c}\frac{dV}{R}. \tag{110,3}$$

Poiché le velocità di tutti i corpi del sistema sono piccole, per il campo a grandi distanze dal sistema (cfr. §§ 66 e 67) si può scrivere allora:

$$\psi_i^k = -\frac{4k}{c^4 R_0}\int (\tau_i^k)_{t-R_0/c}\, dV, \tag{110,4}$$

dove R_0 è la distanza dall'origine delle coordinate, situata in un punto interno del sistema; per brevità, ometteremo l'indice $t - R_0/c$ nelle espressioni integrande.

Per calcolare questi integrali, serviamoci delle equazioni (110,2). Abbassando gli indici di τ_i^k e mettendo in evidenza le componenti spaziali e temporali, scriviamo le (110,2) nella forma

$$\frac{\partial \tau_{\alpha\gamma}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial \tau_{\alpha 0}}{\partial x^0} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{0\gamma}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial \tau_{00}}{\partial x^0} = 0. \tag{110,5}$$

Moltiplicando la prima equazione per x^β, integriamo in tutto lo spazio

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\int \tau_{\alpha 0} x^\beta\, dV = \int \frac{\partial \tau_{\alpha\gamma}}{\partial x^\gamma} x^\beta\, dV = \int \frac{\partial(\tau_{\alpha\gamma} x^\beta)}{\partial x^\gamma} dV - \int \tau_{\alpha\beta}\, dV.$$

Poiché all'infinito $\tau_{ik} = 0$, il primo integrale a secondo membro è nullo per il teorema di Gauss. Facendo la semisomma del-

---

che si annulla all'infinito, è rispettivamente $\psi_\alpha = 0$, $\psi_0^\alpha = 0$, $\psi_0^0 = 4\varphi/c^2$, dove φ è il potenziale gravitazionale newtoniano; cfr. l'equazione (99,2). Ne seguono i valori (106,1), (106,2) per il tensore $h_i^k = \psi_i^k - 1/2\psi\delta_i^k$.

l'uguaglianza rimanente e di quella che si deduce per permutazione degli indici, troviamo:

$$\int \tau_{\alpha\beta}\, dV = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^0}\int (\tau_{\alpha 0}x^\beta + \tau_{\beta 0}x^\alpha)\, dV.$$

Inoltre, moltiplichiamo per $x^\alpha x^\beta$ la seconda equazione (110,5) ed integriamo in tutto lo spazio. Una trasformazione analoga conduce all'uguaglianza

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\cdot\int \tau_{00}x^\alpha x^\beta\, dV = -\int (\tau_{\alpha 0}x^\beta + \tau_{\beta 0}x^\alpha)\, dV.$$

Confrontando i due risultati ottenuti, abbiamo:

$$\int \tau_{\alpha\beta}\, dV = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^0}\right)^2 \int \tau_{00}x^\alpha x^\beta\, dV. \qquad (110,6)$$

In tal modo, gli integrali di tutte le $\tau_{\alpha\beta}$ risultano espressi mediante integrali contenenti la sola componente τ_{00}. Come però è stato già detto, quest'ultima coincide con la corrispondente componente T_{00} del tensore di energia-impulso, e si ha con un'approssimazione sufficiente (cfr. (99,1)):

$$\tau_{00} = \mu c^2. \qquad (110,7)$$

Sostituendo quest'ultima espressione nella (110,6) ed introducendo il tempo $t = x^0/c$, riscriviamo la (110,4) nella forma

$$\psi_{\alpha\beta} = -\frac{2k}{c^4 R_0}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int \mu x^\alpha x^\beta\, dV. \qquad (110,8)$$

A grandi distanze dai corpi, si può considerare l'onda (in regioni piccole dello spazio) come piana. Di conseguenza, si può calcolare il flusso d'energia irraggiata dal sistema, per esempio, nella direzione dell'asse x^1, utilizzando la formula (107,12). Questa formula contiene le componenti $h_{23} = \psi_{23}$ ed $h_{22} - h_{33} = \psi_{22} - \psi_{33}$. Dalla (110,8) troviamo le espressioni[1])

$$h_{23} = -\frac{2k}{3c^4 R_0}\ddot{D}_{23},\quad h_{22} - h_{33} = -\frac{2k}{3c^4 R_0}(\ddot{D}_{22} - \ddot{D}_{33}) \qquad (110,9)$$

(il puntino indica la derivazione rispetto al tempo), dove abbiamo introdotto il tensore del momento di quadrupolo delle masse (99,8):

$$D_{\alpha\beta} = \int \mu\,(3x^\alpha x^\beta - r^2\delta_{\alpha\beta})\, dV. \qquad (110,10)$$

---

[1]) Il tensore (110,8) non soddisfa le condizioni per le quali è stata dedotta la formula (107,12). Tuttavia, una trasformazione del sistema di riferimento, che conduce le h_{ik} alla gauge richiesta, non incide sui valori delle componenti (110,9).

Troviamo infine la densità del flusso d'energia nella direzione dell'asse x^1 nella forma

$$ct^{10} = \frac{k}{36\pi c^5 R_0^2}\left[\left(\frac{\dddot{D}_{22} - \dddot{D}_{33}}{2}\right)^2 + \dddot{D}_{23}^2\right]. \qquad (110,11)$$

Di qui si ottiene, moltiplicando per $R_0^2 do$, il flusso d'energia nell'elemento d'angolo solido in una direzione data.

Due termini in questa espressione corrispondono alla radiazione di onde delle due polarizzazioni indipendenti. Per scriverli in forma invariante (non dipendente dalla direzione della radiazione), introduciamo il tensore unitario tridimensionale di polarizzazione dell'onda gravitazionale piana $e_{\alpha\beta}$ che determina appunto quali delle componenti $h_{\alpha\beta}$ sono differenti da zero (nella scelta delle h_{ik} per cui $h_{0\alpha} = h_{00} = h = 0$). Il tensore di polarizzazione è simmetrico e soddisfa le condizioni

$$e_{\alpha\alpha} = 0, \quad e_{\alpha\beta}n_\beta = 0, \quad e_{\alpha\beta}e_{\alpha\beta} = 1, \qquad (110,12)$$

dove **n** è un vettore unitario nella direzione di propagazione dell'onda; le prime due condizioni esprimono il carattere tensoriale e trasversale dell'onda.

Questo tensore permette di scrivere l'intensità della radiazione di data polarizzazione nell'elemento d'angolo solido nella forma

$$dI = \frac{k}{72\pi c^5}(\dddot{D}_{\alpha\beta}e_{\alpha\beta})^2\, do. \qquad (110,13)$$

Questa espressione dipende dalla direzione **n** in modo implicito attraverso la condizione di trasversalità $e_{\alpha\beta}n_\beta = 0$. La distribuzione angolare totale della radiazione di tutte le polarizzazioni si ottiene eseguendo nella (110,13) una sommatoria estesa alle polarizzazioni oppure, il che è lo stesso, prendendo la media delle polarizzazioni e moltiplicando il risultato per 2 (numero delle polarizzazioni indipendenti). La media si prende secondo la formula

$$\begin{aligned}\overline{e_{\alpha\beta}e_{\gamma\delta}} = \frac{1}{4}\{&n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\delta + (n_\alpha n_\beta \delta_{\gamma\delta} + n_\gamma n_\delta \delta_{\alpha\beta}) - \\ &- (n_\alpha n_\gamma \delta_{\beta\delta} + n_\beta n_\gamma \delta_{\alpha\delta} + n_\alpha n_\delta \delta_{\beta\gamma} + n_\beta n_\delta \delta_{\alpha\gamma}) - \\ &- \delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} + (\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \delta_{\beta\gamma}\delta_{\alpha\delta})\} \qquad (110,14)\end{aligned}$$

(l'espressione del secondo membro è un tensore formato da un tensore unitario e dalle componenti del vettore **n**, dotato della simmetria richiesta rispetto ai suoi indici, e che dà uno per contrazione delle coppie di indici α, γ e β, δ, e si annulla se moltiplicato scalarmente per **n**). Si ottiene infine:

$$dI = \frac{k}{36\pi c^5}\left[\frac{1}{4}(\dddot{D}_{\alpha\beta}n_\alpha n_\beta)^2 + \frac{1}{2}\dddot{D}_{\alpha\beta}^2 - \dddot{D}_{\alpha\beta}\dddot{D}_{\alpha\gamma}n_\beta n_\gamma\right] do. \qquad (110,15)$$

Si può calcolare l'energia totale irraggiata in tutte le direzioni, cioè la perdita d'energia del sistema nell'unità di tempo $(-d\mathscr{E}/dt)$, prendendo la media di dI/do nella direzione **n** e moltiplicando il risultato per 4π. La media si prende facilmente utilizzando le formule riportate nella nota alla pag. 250; si ottiene infine l'espressione

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dt}=\frac{k}{45c^5}\dddot{D}^2_{\alpha\beta}. \tag{110,16}$$

Notiamo che la radiazione totale delle onde gravitazionali produce un effetto del quinto ordine in $1/c$. Questa circostanza, nonché il fatto che la costante gravitazionale k è una grandezza infinitesimale, porta generalmente ad un effetto difficilmente osservabile.

PROBLEMI

1. Due corpi che si attraggono secondo la legge di Newton descrivono orbite circolari (attorno al loro centro comune di massa). Determinare l'intensità media (rispetto al periodo di rotazione) della radiazione di onde gravitazionali e la sua distribuzione per le diverse polarizzazioni e direzioni.

Soluzione. Ponendo l'origine delle coordinate nel centro d'inerzia, i raggi vettori dei due corpi sono:

$$\mathbf{r}_1=\frac{m_2}{m_1+m_2}\mathbf{r},\qquad \mathbf{r}_2=-\frac{m_1}{m_1+m_2}\mathbf{r},\qquad \mathbf{r}=\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2.$$

Le componenti del tensore $D_{\alpha\beta}$ sono (il piano xy coincide con il piano del moto):

$$D_{xx}=\mu r^2(3\cos^2\psi-1),\qquad D_{yy}=\mu r^2(3\,\mathrm{sen}^2\psi-1),$$
$$D_{xy}=3\mu r^2\cos\psi\,\mathrm{sen}\,\psi,\qquad D_{zz}=-\mu r^2,$$

dove $\mu=m_1m_2/(m_1+m_2)$, e dove ψ è l'angolo polare del vettore **r** nel piano xy

Per il moto circolare abbiamo: $r=$ costante, $\dot{\psi}=r^{-3/2}\sqrt{k(m_1+m_2)}\equiv\omega$

Determiniamo la direzione **n** mediante gli angoli sferici (l'angolo polare θ e l'azimut φ) e l'asse polare z perpendicolare al piano del moto. Consideriamo le due polarizzazioni per le quali: 1) $e_{\theta\varphi}=1/\sqrt{2}$, 2) $e_{\theta\theta}=-e_{\varphi\varphi}=1/\sqrt{2}$. Proiettando il tensore $D_{\alpha\beta}$ sulle direzioni sferiche $\mathbf{e}_\theta$ e $\mathbf{e}_\varphi$, calcolando con la formula (110,13) e prendendo la media rispetto al tempo, otteniamo infine per questi due casi e per la somma $I=I_1+I_2$:

$$\frac{\overline{dI_1}}{do}=\frac{k\mu^2\omega^6r^4}{2\pi c^5}4\cos^2\theta,\qquad \frac{\overline{dI_2}}{do}=\frac{k\mu^2\omega^6r^4}{2\pi c^5}(1+\cos^2\theta)^2,$$

$$\frac{\overline{dI}}{do}=\frac{k\mu^2\omega^6r^4}{2\pi c^5}(1+6\cos^2\theta+\cos^4\theta),$$

e dopo un'integrazione sulle direzioni:

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dt}=I=\frac{32k\mu^2\omega^6r^4}{5c^5}=\frac{32k^4m_1^2m_2^2(m_1+m_2)}{5c^5r^5},\qquad \frac{\overline{I_1}}{\overline{I_2}}=\frac{5}{7}$$

(per calcolare solo l'intensità totale I basterebbe, naturalmente, utilizzare la (110,16)).

La perdita dell'energia irraggiata dal sistema causa un avvicinamento graduale (secolare) tra i due corpi. Poiché $\mathscr{E}=-km_1m_2/2r$, la velocità

di avvicinamento è

$$\dot{r}=\frac{2r^2}{km_1m_2}\frac{d\mathscr{E}}{dt}=-\frac{64k^3m_1m_2(m_1+m_2)}{5c^5r^3}.$$

2. Trovare l'energia media (rispetto al periodo di rotazione), irraggiata sotto forma di onde gravitazionali da un sistema di due corpi che descrivono orbite ellittiche (*P. C. Peters, J. Mathews*)[1]).

Soluzione. A differenza dei casi di un moto circolare, la distanza r e la velocità angolare variano lungo un'orbita secondo le leggi

$$\frac{a(1-e^2)}{r}=1+e\cos\psi,\quad \frac{d\psi}{dt}=\frac{1}{r^2}[k(m_1+m_2)\,a(1-e^2)]^{1/2},$$

dove e è l'eccentricità, e a il semiasse maggiore della orbita (vedi vol. I, *Meccanica*, § 15). Un calcolo abbastanza laborioso mediante la formula (110,16) dà:

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dt}=\frac{8k^4m_1^2m_2^2(m_1+m_2)}{15a^5c^5(1-e^2)^5}(1+e\cos\psi)^4[12(1+e\cos\psi)^2+e^2\operatorname{sen}^2\psi].$$

Nel calcolare la media rispetto al periodo di rotazione, si sostituisce all'integrazione in dt quella in $d\psi$ il che dà:

$$-\overline{\frac{d\mathscr{E}}{dt}}=\frac{32k^4m_1^2m_2^2(m_1+m_2)}{5c^5a^5}\frac{1}{(1-e^2)^{7/2}}\left(1+\frac{73}{24}e^2+\frac{37}{96}e^4\right).$$

È da notare un incremento rapido dell'intensità della radiazione con l'aumentare dell'eccentricità dell'orbita.

3. Determinare la velocità media (rispetto al tempo) di perdita del momento angolare di un sistema di corpi in moto stazionario per irraggiamento di onde gravitazionali.

Soluzione. Per comodità, considereremo per il momento i corpi come composti di particelle discrete. Rappresentiamo la velocità media di perdita dell'energia come il lavoro delle « forze d'attrito » $\mathbf{f}$ agenti sulle particelle:

$$\overline{\frac{d\mathscr{E}}{dt}}=\sum\overline{\mathbf{fv}} \tag{1}$$

(omettiamo l'indice di numerazione delle particelle). Allora la velocità media di perdita del momento angolare si calcola come segue:

$$\overline{\frac{dM_\alpha}{dt}}=\sum\overline{[\mathbf{rf}]_\alpha}=\sum e_{\alpha\beta\gamma}\overline{x_\beta f_\gamma} \tag{2}$$

(cfr. la deduzione della formula (75,7)). Per determinare le $\mathbf{f}$ scriviamo:

$$\overline{\frac{d\mathscr{E}}{dt}}=-\frac{k}{45c^5}\overline{\dddot{D}_{\alpha\beta}\dddot{D}_{\alpha\beta}}=-\frac{k}{45c^5}\overline{\dot{D}_{\alpha\beta}D^{(V)}_{\alpha\beta}}$$

(abbiamo utilizzato qui il fatto che i valori medi delle derivate totali rispetto al tempo sono nulli). Sostituendo qui $\dot{D}_{\alpha\beta}=\sum m\,(3x_\alpha v_\beta+3x_\beta v_\alpha-2\mathbf{rv}\,\delta_{\alpha\beta})$ e confrontando con la (1), troviamo:

$$f_\alpha=-\frac{2k}{15c^5}D^{(V)}_{\alpha\beta}mx_\beta.$$

---

[1]) Per la distribuzione angolare polarizzata e la decomposizione spettrale di questa radiazione si veda *Phys. Rev.*, **131**, 435 (1963).

La sostituzione di questa espressione nella (2) ci dà:

$$\overline{\frac{dM_\alpha}{dt}} = \frac{2k}{45c^5} e_{\alpha\beta\gamma} \overline{D^{(V)}_{\beta\delta} D_{\gamma\delta}} = \frac{2k}{45c^5} e_{\alpha\beta\gamma} \overline{\dddot{D}_{\beta\delta} \dddot{D}_{\gamma\delta}}. \tag{3}$$

4. Trovare per un sistema di due corpi che descrivono orbite ellittiche la perdita media del momento angolare per unità di tempo.

Soluzione. Il calcolo secondo la formula (3) del problema precedente, analogo al calcolo del problema 2, porta al risultato:

$$-\overline{\frac{dM_z}{dt}} = \frac{32k^{7/2} m_1^2 m_2^2 \sqrt{m_1 + m_2}}{5c^5 a^{7/2}} \frac{1}{(1-e^2)^2} \left(1 + \frac{7}{4} e^2\right).$$

Per un moto circolare ($e = 0$), i valori di $\dot{\mathscr{E}}$ ed $\dot{M}$ si ricavano, come era da aspettarsi, dalla relazione $\dot{\mathscr{E}} = \dot{M}\omega$.

Capitolo XIV

COSMOLOGIA RELATIVISTICA

§ 111. *Spazio isotropo*

La teoria della relatività generale apre nuove vie alla soluzione dei problemi legati alle proprietà dell'Universo su scala cosmica. La comparsa di queste nuove meravigliose possibilità (indicate per la prima volta da Einstein nel 1917) è connessa al carattere non galileiano dello spazio-tempo.

Queste possibilità rivestono un'importanza notevole perché la meccanica newtoniana conduce a contraddizioni che non possono essere superate in una forma sufficientemente generale nell'ambito della teoria non relativistica. Per esempio, applicando la formula newtoniana del potenziale gravitazionale allo spazio piatto infinito (quale esso è nella meccanica newtoniana), riempito di materia la cui densità media, distribuita arbitrariamente, non sia nulla in nessun punto, vediamo che il potenziale diverge in ogni punto. Ciò condurrebbe all'esistenza di forze infinite agenti sulla materia, risultato ovviamente assurdo.

Prima di iniziare la costruzione sistematica dei modelli cosmologici relativistici, è opportuno fare la seguente osservazione sulle equazioni fondamentali iniziali del campo.

Le condizioni poste nel § 93 per la determinazione dell'azione di un campo gravitazionale saranno sempre soddisfatte se allo scalare G si aggiunge un termine costante, cioè se si pone

$$S_g = -\frac{c^3}{16\pi k}\int (G+2\Lambda)\sqrt{-g}\,d\Omega,$$

dove Λ è una nuova costante (di dimensione cm^{-2}). L'introduzione di questa grandezza porterà alla comparsa di un termine supplementare Λg_{ik} nelle equazioni di Einstein:

$$R_{ik}-\frac{1}{2}Rg_{ik}=\frac{8\pi k}{c^4}T_{ik}+\Lambda g_{ik}.$$

Se alla « costante cosmologica » Λ si dà un valore molto piccolo, la presenza di questo termine non inciderà sostanzialmente sui campi gravitazionali in regioni non troppo grandi dello spazio-tempo, ma comporterà nuovi tipi di « soluzioni cosmologiche »

che potrebbero descrivere l'Universo nel suo insieme[1]). Tuttavia, non abbiamo finora nessun motivo fondato e convincente — né sul piano sperimentale, né su quello teorico — per poter apportare un tale cambiamento nelle equazioni fondamentali della teoria. Sottolineiamo che si tratterebbe di un cambiamento con profondo significato fisico, e cioè: l'introduzione nella densità della lagrangiana di un termine costante, non dipendente in generale dallo stato del campo, significherebbe attribuire allo spazio-tempo una curvatura in linea di massima non eliminabile e che non è legata né alla materia, né alle onde gravitazionali. Per questo, tutti gli ulteriori ragionamenti di questo capitolo partono dalle equazioni di Einstein nella loro forma « classica », senza la costante cosmologica.

Come è noto, le stelle sono distribuite nello spazio in un modo assai irregolare: sono concentrate in singoli sistemi stellari (le galassie). Nello studio dell'Universo « su larga scala » è, però, necessario trascurare le eterogeneità « locali » dovute all'accumulazione di materia nelle stelle e nei sistemi stellari. Per densità di massa si deve cosí intendere la densità media rispetto alle regioni dello spazio, di dimensioni grandi rispetto alle distanze tra le galassie.

Le soluzioni delle equazioni di Einstein che verranno esaminate piú avanti (nei §§ 111-114), cioè il cosiddetto modello cosmologico isotropo (scoperto da *A. A. Fridman* nel 1922), sono fondate sull'ipotesi di una distribuzione omogenea ed isotropa della materia nello spazio. I dati astronomici esistenti non contraddicono questa ipotesi[2]), e oggi ci sono tutte le ragioni per ritenere che il modello isotropo dia, in termini generali, una descrizione adeguata non soltanto dello stato attuale dell'Universo, ma anche di una parte notevole della sua evoluzione nel passato. Vedremo piú avanti che la proprietà fondamentale di questo modello è il suo carattere non stazionario. È indubbio che questa proprietà (« Universo in espansione ») dà una giusta spiegazione al fenomeno fondamentale del problema cosmologico: lo spostamento verso il rosso (§ 114).

Nello stesso tempo è chiaro che, già per la sua natura, l'ipotesi dell'omogeneità e dell'isotropia dell'Universo, può inevitabilmente avere soltanto un carattere approssimativo, perché queste proprietà vengano evidentemente a mancare quando si considerano soltanto regioni finite dello spazio. Torneremo nei §§ 115-119 al problema

---

[1]) In particolare, si trovano soluzioni stazionarie che mancano per $\Lambda = 0$. È stato proprio questo fatto che indusse Einstein ad introdurre il « termine cosmologico » prima che Friedman scoprisse soluzioni non stazionarie del campo; vedi piú avanti.

[2]) Ci si riferisce qui ai dati sulla distribuzione delle galassie nello spazio e sull'isotropia della cosiddetta radiazione a radiofrequenza.

della possibile eterogeneità dell'Universo in relazione a vari aspetti della cosmologia.

L'omogeneità e l'isotropia dello spazio significano che si può scegliere un tempo « universale » tale che ad ogni istante la metrica dello spazio sia identica in tutti i suoi punti e in tutte le direzioni.

Occupiamoci innanzitutto dello studio della metrica dello spazio isotropo come tale, senza considerare per il momento una sua possibile dipendenza dal tempo. Come precedentemente, indichiamo con $\gamma_{\alpha\beta}$ il tensore metrico tridimensionale, cioè scriviamo l'elemento di distanza spaziale nella forma

$$dl^2 = \gamma_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta. \tag{111,1}$$

La curvatura dello spazio è determinata completamente dal suo tensore di curvatura tridimensionale, che indicheremo con $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ per distinguerlo dal tensore quadridimensionale $R_{ikl\,m}$. Nel caso di una isotropia completa, il tensore $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ deve evidentemente esprimersi mediante il solo tensore metrico $\gamma_{\alpha\beta}$ e, in virtú delle sue proprietà di simmetria, deve assumere la forma

$$P_{\alpha\beta\gamma\delta} = \lambda\,(\gamma_{\alpha\gamma}\gamma_{\beta\delta} - \gamma_{\alpha\delta}\gamma_{\beta\gamma}), \tag{111,2}$$

dove λ è una costante. Il tensore di Ricci $P_{\alpha\beta} = P^\gamma{}_{\alpha\gamma\beta}$ è rispettivamente uguale a

$$P_{\alpha\beta} = 2\lambda\gamma_{\alpha\beta}, \tag{111,3}$$

e la curvatura scalare è

$$P = 6\lambda. \tag{111,4}$$

Si vede dunque che le proprietà della curvatura dello spazio isotropo sono completamente determinate da una sola costante. Ne segue che sono possibili tre casi essenzialmente differenti di metrica spaziale: 1) lo spazio a curvatura costante positiva (corrispondente ai valori positivi di λ), 2) lo spazio a curvatura costante negativa (corrispondente ai valori di $\lambda < 0$) e 3) lo spazio a curvatura nulla ($\lambda = 0$). Quest'ultimo è uno spazio piatto, detto euclideo.

Nello studio della metrica è comodo partire dall'analogia geometrica, considerando la geometria dello spazio isotropo tridimensionale come la geometria su una ipersuperficie isotropa (in uno spazio quadridimensionale fittizio[1])). Tale superficie è un'ipersfera; lo spazio tridimensionale corrispondente a questa ipersfera è lo spazio a curvatura costante positiva. L'equazione di una ipersfera di raggio a nello spazio quadridimensionale x_1, x_2, x_3, x_4 ha la forma

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = a^2,$$

e l'elemento di lunghezza su questa ipersfera è

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2.$$

[1]) Lo spazio qui introdotto non ha, naturalmente, niente a che fare con lo spazio-tempo quadridimensionale.

Considerando le coordinate x_1, x_2, x_3 come le tre coordinate spaziali ed eliminando nell'espressione di dl^2 la coordinata fittizia x_4 ricavata dalla prima equazione, troviamo per l'elemento di distanza spaziale

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + \frac{(x_1\,dx_1 + x_2\,dx_2 + x_3\,dx_3)^2}{a^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}\,. \qquad (111,5)$$

Partendo da questa espressione è facile calcolare la costante λ nella (111,2). Conoscendo *a priori* che il tensore $P_{\alpha\beta}$ ha la forma (111,3) in tutto lo spazio, è sufficiente calcolarlo soltanto in prossimità dell'origine delle coordinate dove le $\gamma_{\alpha\beta}$ sono uguali a

$$\gamma_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \frac{x_\alpha x_\beta}{a^2}\,.$$

Poiché le derivate prime delle $\gamma_{\alpha\beta}$ e, di conseguenza, le grandezze $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ si annullano nell'origine delle coordinate, il calcolo con la formula generale (92,7) risulta molto semplice e dà

$$\lambda = \frac{1}{a^2}\,. \qquad (111,6)$$

La grandezza a si chiama « raggio di curvatura » dello spazio. Introduciamo in luogo delle coordinate x_1, x_2, x_3 le corrispondenti coordinate « sferiche » r, θ, φ. L'elemento di lunghezza assumerà allora la forma

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{a^2}} + r^2(\operatorname{sen}^2\theta\,d\varphi^2 + d\theta^2). \qquad (111,7)$$

L'origine delle coordinate può essere scelta in qualsiasi punto dello spazio. La lunghezza della circonferenza in queste coordinate è $2\pi r$, e l'area della sfera $4\pi r^2$. Mentre la lunghezza del « raggio » della circonferenza (o della sfera) è

$$\int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}} = a \operatorname{arcsen} \frac{r}{a}\,,$$

è cioè maggiore di r. Dunque, il rapporto fra lunghezza della circonferenza e raggio in un tale spazio è minore di 2π.

L'elemento di lunghezza dl^2 assume un'altra forma comoda se espresso in « coordinate sferiche quadridimensionali » che si ottengono sostituendo alla coordinata r l'« angolo » χ definito dalla relazione $r = a \operatorname{sen}\chi$ (χ varia da 0 a π)[1]).

[1]) Le coordinate « cartesiane » x_1, x_2, x_3, x_4 sono legate alle coordinate sferiche quadridimensionali a, θ, φ, χ dalle relazioni

$$x_1 = a \operatorname{sen}\chi \operatorname{sen}\theta \cos\varphi, \quad x_2 = a \operatorname{sen}\chi \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi.$$
$$x_3 = a \operatorname{sen}\chi \cos\theta, \quad x_4 = a \cos\chi.$$

Si ha allora

$$dl^2 = a^2 [d\chi^2 + \operatorname{sen}^2 \chi (\operatorname{sen}^2 \theta \, d\varphi^2 + d\theta^2)]. \qquad (111,8)$$

La coordinata χ misura la distanza dall'origine delle coordinate, uguale ad $a\chi$. L'area della sfera in queste coordinate è $4\pi a^2 \operatorname{sen}^2 \chi$. Si vede che a misura che allontanandosi dall'origine delle coordinate l'area della sfera cresce e raggiunge il suo massimo, $4\pi a^2$, alla distanza di $\pi a/2$. Dopo di che essa comincia a decrescere, e la sfera si riduce ad un punto al « polo opposto » dello spazio alla distanza di πa, distanza massima che può in generale esistere in un tale spazio (tutto ciò risulta evidente anche dalla (111,7), se si nota che la coordinata r non può prendere valori maggiori di a).

Il volume dello spazio a curvatura positiva è

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} a^3 \operatorname{sen}^2 \chi \operatorname{sen} \theta \, d\chi \, d\theta \, d\varphi,$$

di qui

$$V = 2\pi^2 a^3. \qquad (111,9)$$

In tal modo, lo spazio a curvatura positiva risulta « chiuso in sé stesso », e il suo volume è finito, ma è ovvio che questo spazio non ha frontiere.

È interessante notare il fatto che in uno spazio chiuso la carica elettrica totale deve essere nulla. Infatti, ogni superficie chiusa in uno spazio finito delimita da ambedue le parti regioni finite dello spazio. Per questo, il flusso del campo elettrico attraverso questa superficie è uguale, da una parte, alla carica totale che si trova all'interno di questa superficie, e dall'altra, alla carica, preceduta dal segno meno, che si trova al di fuori della superficie. Di conseguenza, la somma delle cariche da ambedue le parti della superficie è nulla.

In un modo analogo, dall'espressione (96,16) del 4-impulso sotto forma di un integrale di superficie risulta che il 4-impulso totale P^i è nullo in tutto lo spazio. In tal modo, la definizione del 4-impulso totale non ha piú sostanzialmente senso, perché la legge di conservazione corrispondente degenera nell'identità banale $0 = 0$.

Passiamo ora allo studio della geometria di uno spazio a curvatura costante negativa. Dalla (111,6) si vede che la costante λ diventa negativa quando a è immaginaria. Si possono ottenere tutte le formule relative allo spazio a curvatura negativa sostituendo a con ia nelle formule precedenti. In altri termini, la geometria dello spazio a curvatura negativa è interpretata matematicamente come la geometria su una pseudosfera quadridimensionale di raggio immaginario.

Cosí, la costante λ è ora uguale a

$$\lambda = -\frac{1}{a^2}, \qquad (111,10)$$

e l'elemento di lunghezza nello spazio a curvatura negativa, espresso nelle coordinate r, θ, φ, assume la forma

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1+\frac{r^2}{a^2}} + r^2 (\operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2 + d\theta^2), \qquad (111,11)$$

dove la coordinata r può percorrere tutti i valori da 0 a ∞. Il rapporto tra lunghezza della circonferenza e raggio è ora maggiore di 2π. Per ottenere l'espressione di dl^2, corrispondente alla (111,8), introduciamo la coordinata χ definita dalla relazione $r = a \operatorname{sh} \chi$ (χ varia qui da 0 a ∞). Allora

$$dl^2 = a^2\{d\chi^2 + \operatorname{sh}^2 \chi\, (\operatorname{sen}^2 \theta\, d\varphi^2 + d\theta^2)\}. \qquad (111,12)$$

L'area della sfera è uguale ora a $4\pi a^2 \operatorname{sh}^2 \chi$ e cresce indefinitamente quando ci si allontana dall'origine delle coordinate (cioè all'aumentare di χ). È evidente che il volume dello spazio a curvatura negativa è infinito.

PROBLEMA

Trasformare l'elemento di lunghezza (111,7) in maniera tale che esso sia proporzionale alla sua espressione euclidea.

Soluzione. La sostituzione

$$r = \frac{r_1}{1+\frac{r_1^2}{4a^2}}$$

conduce al risultato:

$$dl^2 = \left(1+\frac{r_1^2}{4a^2}\right)^{-2} (dr_1^2 + r_1^2\, d\theta^2 + r_1^2 \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2).$$

§ 112. *Modello isotropo chiuso*

Passando allo studio della metrica spazio-temporale del modello isotropo, è necessario accordarsi sul sistema di riferimento. Il piú conveniente è un sistema di riferimento in moto solidale che, in ogni punto dello spazio, si muove con la materia. In altri termini, la materia stessa che riempie lo spazio serve da sistema di riferimento; per definizione, la velocità della materia in questo sistema è ovunque nulla. È evidente che una tale scelta del sistema di riferimento per il modello isotropo è naturale: per un'altra scelta, l'orientazione delle velocità della materia creerebbe una non-equivalenza apparente delle differenti direzioni nello spazio. La coordinata temporale deve essere scelta nel modo indicato all'inizio del paragrafo precedente, cioè in modo che la metrica in ogni istante sia identica in tutto lo spazio.

Data l'equivalenza totale di tutte le direzioni, le componenti $g_{0\alpha}$ del tensore metrico nel sistema di riferimento scelto sono nulle. Infatti, le tre componenti $g_{0\alpha}$ si possono considerare come le componenti di un vettore tridimensionle, che, qualora fosse diverso da zero, creerebbe una non-equivalenza delle diverse direzioni. In tal modo, ds^2 deve assumere la forma $ds^2 = g_{00}\,(dx^0)^2 - dl^2$. La componente g_{00} è qui una funzione soltanto di x^0. Si può dunque sempre scegliere la coordinata temporale in maniera tale che g_{00} diventi 1. Indicandola con ct, abbiamo:

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - dl^2. \tag{112,1}$$

La variabile t è il tempo proprio sincrono in ogni punto dello spazio.

Cominciamo dallo studio dello spazio a curvatura positiva; per brevità chiameremo la soluzione delle equazioni di Einstein *modello chiuso*. Utilizzando per dl l'espressione (111,8) dove il raggio di curvatura a è, in generale, una funzione del tempo, ds^2 assume la forma

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - a^2\,(t)\;\{d\chi^2 + \operatorname{sen}^2\chi\,(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\,d\varphi^2)\}. \tag{112,2}$$

La funzione $a\,(t)$ è determinata dalle equazioni di Einstein. Per risolvere queste equazioni, è comodo introdurre, in luogo del tempo, la grandezza η definita dalla relazione

$$c\,dt = a\,d\eta. \tag{112,3}$$

Allora ds^2 si scrive nella forma

$$ds^2 = a^2\,(\eta)\,\{d\eta^2 - d\chi^2 - \operatorname{sen}^2\chi\,(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\,d\varphi^2)\}. \tag{112,4}$$

Per ottenere le equazioni del campo, bisogna cominciare dal calcolo delle componenti del tensore R_{ik} (le coordinate x^0, x^1, x^2, x^3 sono rappresentate da η, χ, θ, φ). Utilizzando i valori delle componenti del tensore metrico

$$g_{00} = a^2, \quad g_{11} = -a^2, \quad g_{22} = -a^2\operatorname{sen}^2\chi, \quad g_{33} = -a^2\operatorname{sen}^2\chi\operatorname{sen}^2\theta$$

calcoliamo le grandezze Γ^i_{kl}:

$$\Gamma^0_{00} = \frac{a'}{a}, \quad \Gamma^0_{\alpha\beta} = -\frac{a'}{a^3}\,g_{\alpha\beta}, \quad \Gamma^\alpha_{0\beta} = \frac{a'}{a}\,\delta^\alpha_\beta, \quad \Gamma^0_{\alpha 0} = \Gamma^\alpha_{00} = 0,$$

dove l'apice indica la derivazione rispetto a η (non è necessario calcolare le componenti $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ in forma esplicita). Questi valori ci permettono di trovare secondo la formula generale (92,7):

$$R^0_0 = \frac{3}{a^4}\,(a'^2 - aa'').$$

Per le stesse ragioni di simmetria, applicate prima alla $g_{0\alpha}$, è *a priori* evidente che $R_{0\alpha} = 0$. Per il calcolo delle componenti R^β_α, notiamo che, se si mettono in evidenza in quest'ultime

i termini contenenti soltanto $g_{\alpha\beta}$ (cioè soltanto le $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$), questi termini debbono costituire le componenti del tensore tridimensionale $-P^{\beta}_{\alpha}$, i cui valori sono già noti dalle (111,3) e (111,6):

$$R^{\beta}_{\alpha} = -P^{\beta}_{\alpha} + \ldots = -\frac{2}{a^2}\delta^{\beta}_{\alpha} + \ldots,$$

dove i puntini di sospensione rappresentano i termini contenenti $g_{\alpha\beta}$ e g_{00}. Il calcolo ci dà:

$$R^{\beta}_{\alpha} = -\frac{1}{a^4}(2a^2 + a'^2 + aa'')\,\delta^{\beta}_{\alpha},$$

e quindi

$$R = R^0_0 + R^{\alpha}_{\alpha} = -\frac{6}{a^3}(a + a'').$$

Essendo la materia immobile nel sistema di riferimento che abbiamo scelto, si ha $u^{\alpha} = 0$, $u^0 = 1/a$ e dalla (94,9) si deduce $T^0_0 = \varepsilon$, dove ε è la densità di energia della materia. Sostituendo le espressioni ottenute nell'equazione

$$R^0_0 - \frac{1}{2}R = \frac{8\pi k}{c^4}T^0_0,$$

otteniamo:

$$\frac{8\pi k}{c^4}\varepsilon = \frac{3}{a^4}(a^2 + a'^2). \qquad (112,5)$$

Questa equazione contiene due funzioni incognite ε ed a; è necessario quindi trovare ancora un'equazione. Scegliamo come seconda equazione (in luogo delle componenti spaziali delle equazioni di Einstein) l'equazione $T^i_{0;i} = 0$, una delle quattro equazioni (94,7), contenute, come si sa, nelle equazioni del campo. Si può anche dedurre la seconda equazione direttamente per mezzo di relazioni termodinamiche nel modo seguente.

Utilizzando nelle equazioni del campo l'espressione (94,9) per il tensore energia-impulso, noi trascuriamo quindi tutti i processi di dissipazione dell'energia, che hanno per effetto l'aumento dell'entropia. Un tale metodo è qui ovviamente del tutto ammissibile, perché i termini supplementari che si sarebbero dovuti aggiungere a T^i_k a causa della dissipazione di energia, sono trascurabili rispetto alla densità di energia ε, la quale include in sé l'energia di quiete dei corpi materiali.

In tal modo, nel ricavare le equazioni del campo, possiamo considerare l'entropia totale costante. Ricorriamo ora alla nota relazione termodinamica $d\mathscr{E} = T\,dS - p\,dV$, dove $\mathscr{E}$, S, V sono l'energia, l'entropia e il volume del sistema, e p, T la pressione e la temperatura. Per entropia costante, si ha semplicemente $d\mathscr{E} = -p\,dV$. Introducendo la densità d'energia $\varepsilon = \mathscr{E}/V$, facilmeute

si trova:

$$d\varepsilon = -(\varepsilon + p)\,\frac{dV}{V}\,.$$

Il volume dello spazio V è proporzionale, secondo la (111,9), al cubo del raggio di curvatura a. Di conseguenza, $dV/V = 3da/a = 3d \ln a$, e si può scrivere:

$$-\frac{d\varepsilon}{\varepsilon + p} = 3d \ln a,$$

oppure, integrando:

$$3 \ln a = -\int \frac{d\varepsilon}{p+\varepsilon} + \text{costante} \qquad (112,6)$$

(l'estremo inferiore nell'integrale è nna costante).

Se il legame tra ε e p (equazione di stato della materia) è noto, allora l'equazione (112,6) definisce ε come funzione di a. Dalla (112,5) si può allora determinare η nella forma

$$\eta = \pm \int \frac{da}{a\sqrt{\frac{8\pi k}{3c^4}\,\varepsilon a^2 - 1}}\,. \qquad (112,7)$$

Le equazioni (112,6), (112,7) risolvono in forma generale il problema della determinazione della metrica del modello isotropo chiuso.

Se la materia è distribuita nello spazio sotto forma di singoli corpi macroscopici, si potrà allora, determinando il suo campo gravitazionale, considerare questi corpi come particelle materiali dotate di masse determinate, trascurando completamente la loro struttura interna. Considerando che le velocità dei corpi sono relativamente piccole (piccole respetto a c), si può porre semplicemente $\varepsilon = \mu c^2$, dove μ è la somma delle masse dei corpi nell'unità di volume. Per la stessa ragione, la pressione del « gas », composto di questi corpi, è una grandezza infinitesimale rispetto a ε e può essere trascurata (mentre le pressioni all'interno dei corpi, come è stato detto, non hanno niente a che fare con la questione considerata). Per quanto riguarda la radiazione contenuta nello spazio, la sua grandezza è relativamente piccola e si può ugualmente trascurarne l'energia e la pressione.

In tal modo, se si vuole descrivere lo stato attuale dell'Universo nei termini del modello considerato, bisogna ricorrere alle equazioni di stato della materia « incoerente »

$$\varepsilon = \mu c^2, \quad p = 0.$$

Allora l'integrazione nella (112,6) dà $\mu a^3 =$ costante Si può scrivere questa uguaglianza direttamente perché essa esprime la costanza della somma M delle masse dei corpi in tutto lo spazio,

come si deve avere nel caso considerato della materia incoerente[1]). Poiché il volume dello spazio nel modello chiuso è $V = 2\pi^2 a^3$, si ha allora costante $= M/2\pi^2$. In tal modo,

$$\mu a^3 = \text{costante} = \frac{M}{2\pi^2}. \tag{112,8}$$

Sostituendo la (112,8) nell'equazione (112,7) ed integrando, otteniamo:

$$a = a_0 (1 - \cos \eta), \tag{112,9}$$

dove la costante è

$$a_0 = \frac{2kM}{3\pi c^2}.$$

Partendo infine dalla (112,3), ricaviamo la relazione tra t e η

$$t = \frac{a_0}{c} (\eta - \operatorname{sen} \eta). \tag{112,10}$$

Le equazioni (112,9) e (112,10) determinano in forma parametrica la funzione $a(t)$. Questa funzione cresce da zero per $t = 0$ ($\eta = 0$) sino al valore massimo $a = 2a_0$ che si ottiene per $t = \pi a_0/c$ ($\eta = \pi$), e poi decresce di nuovo sino a zero per $t = 2\pi a_0/c$ ($\eta = 2\pi$).

Per $\eta \ll 1$ si ha approssimativamente $a = a_0\eta^2/2$, $t = a_0\eta^3/6c$, in modo che

$$a \approx \left(\frac{9a_0c^2}{2}\right)^{1/3} t^{2/3}. \tag{112,11}$$

Inoltre, la densità della materia è

$$\mu = \frac{1}{6\pi k t^2} = \frac{8 \cdot 10^5}{t^2} \tag{112,12}$$

(il valore numerico del coefficiente è dato per densità espressa in $g \cdot cm^{-3}$ per t espresso in secondi). Notiamo che in questo limite la funzione $\mu(t)$ ha un carattere universale nel senso che essa non dipende dal parametro a_0.

Quando $a \to 0$, la densità μ diventa infinita. Per $\mu \to \infty$ la pressione diventa anche grande, e, di conseguenza, per lo studio della metrica in questa regione, bisogna esaminare il caso opposto della pressione massima possibile (per una densità data dell'energia ε), cioè descrivere la materia mediante l'equazione di stato

$$p = \frac{\varepsilon}{3}$$

---

[1] Sottolineiamo a scanso di equivoci (confrontando con il 4-impulso totale nullo dell'Universo chiuso menzionato nel § 111) che M è proprio la somma delle masse dei corpi presi separatamente, senza prendere in considerazione la loro interazione gravitazionale.

(vedi la nota alla pag. 122). Dalla formula (112,6) si ricava allora:

$$\varepsilon a^4 = \text{costante} \equiv \frac{3c^4 a_1^2}{8\pi k} \tag{112,13}$$

(a_1 è nuova costante), dopo di che le equazioni (112,7) e (112,3) conducono alla dipendenza

$$a = a_1 \operatorname{sen} \eta, \quad t = \frac{a_1}{c}(1 - \cos \eta).$$

Poiché ha senso considerare questa soluzione soltanto per valori molto grandi di ε (cioè per a piccolo), poniamo $\eta \ll 1$. Allora $a \approx \approx a_1\eta$, $t \approx a_1\eta^2/2c$, in modo che

$$a = \sqrt{2a_1ct}. \tag{112,14}$$

Inoltre

$$\frac{\varepsilon}{c^2} = \frac{3}{32\pi k t^2} = \frac{4{,}5 \cdot 10^5}{t^2} \tag{112,15}$$

(questa dipendenza non contiene nessun parametro).

In tal modo, anche qui $a \to 0$ per $t \to 0$, in modo che il valore $t = 0$ è veramente un punto singolare della metrica spazio-temporale del modello isotropo (lo stesso si può dire anche del secondo punto nel modello chiuso, dove $a = 0$). Dalla (112,14) si vede anche che se cambiassimo il segno di t la grandezza $a(t)$ diventerebbe immaginaria pura e il suo quadrato negativo. Tutte le quattro componenti di g_{ik} nella (112,2) diventerebbero allora negative e il determinante g positivo. Una tale metrica è però fisicamente assurda. Ciò significa che non ha senso fisico prolungare analiticamente la metrica oltre il punto singolare.

§ 113. *Modello isotropo aperto*

La soluzione corrispondente allo spazio isotropo a curvatura negativa (*modello aperto*) si ottiene analogamente al caso precedente. In luogo della (112,2) si ha ora

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - a^2(t)\,\{d\chi^2 + \operatorname{sh}^2\chi\,(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\,d\varphi^2)\}. \tag{113,1}$$

Introduciamo di nuovo in luogo di t la variabile η definita dalla relazione $dt = a\,d\eta$; si ottiene allora:

$$ds^2 = a^2(\eta)\,\{d\eta^2 - d\chi^2 - \operatorname{sh}^2\chi\,(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\,d\varphi^2)\}. \tag{113,2}$$

Questa espressione può essere formalmente ottenuta dalla (112,4) sostituendo η, χ, a rispettivamente con $i\eta$, $i\chi$, ia. Di conseguenza, anche le equazioni del campo si possono ottenere semplicemente con questa stessa sostituzione nelle (112,5) e (112,6). L'equazio-

ne (112,6) conserva allora la sua forma:

$$3 \ln a = -\int \frac{d\varepsilon}{\varepsilon + p} + \text{costante} \tag{113,3}$$

e in luogo della (112,5) si ha:

$$\frac{8\pi k}{c^4} \varepsilon = \frac{3}{a^4} (a'^2 - a^2). \tag{113,4}$$

In luogo della (112,7) si ottiene

$$\eta = \pm \int \frac{da}{a \sqrt{\frac{8\pi k}{3c^4} \varepsilon a^2 + 1}}. \tag{113,5}$$

Di qui per la materia incoerente[1]) otteniamo

$$a = a_0 (\operatorname{ch} \eta - 1), \quad t = \frac{a_0}{c} (\operatorname{sh} \eta - \eta), \tag{113,6}$$

$$\mu a^3 = \frac{3c^2}{4\pi k} a_0. \tag{113,7}$$

Le formule (113,6) determinano in forma parametrica la funzione $a(t)$. A differenza del modello chiuso, il raggio di curvatura varia qui monotonamente, crescendo da zero per $t = 0$ ($\eta = 0$) sino all'infinito per $t \to \infty$ ($\eta \to \infty$). La densità della materia, invece, decresce rispettivamente partendo dal valore infinito per $t = 0$ (quando $\eta \ll 1$, questa legge è data dalla stessa formula approssimata (112,12) come per il modello chiuso).

Per alte densità, le soluzioni (113,6) e (113,7) non sono applicabili, e bisogna tornare di nuovo al caso $p = \varepsilon/3$. Si ottiene

---

[1]) Notiamo, che con la trasformazione

$$r = Ae^{\eta} \operatorname{sh} \chi, \quad c\tau = Ae^{\eta} \operatorname{ch} \chi,$$

$$Ae^{\eta} = \sqrt{c^2\tau^2 - r^2}, \quad \operatorname{th} \chi = \frac{r}{c\tau}$$

l'espressione (113,2) si riduce alla forma « conforme galileiana »:

$$ds^2 = f(r, \tau) [c^2 d\tau^2 - dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta d\varphi^2)].$$

Nel caso specifico (113,6) (ponendo $A = a_0/2$) si ottiene:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{a_0}{2\sqrt{c^2\tau^2 - r^2}}\right)^4 \{c^2 d\tau^2 - dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \operatorname{sen}^2 \theta \, d\varphi^2)\}$$

(*V. A. Fok*, 1955). Per grandi valori di $\sqrt{c^2\tau^2 - r^2}$ (cui corrisponde $\eta \gg 1$), questa metrica tende a quella galileiana come era naturale aspettarsi, poiché il raggio di curvatura tende all'infinito.

La materia non è ferma nelle coordinate r, θ, φ, τ e la sua distribuzione non è omogenea; inoltre, la distribuzione e il moto della materia hanno la simmetria centrale intorno ad un punto arbitrario dello spazio, scelto come origine delle coordinate τ, θ, φ.

allora di nuovo la relazione

$$\varepsilon a^4 = \text{costante} \equiv \frac{3c^4 a_1^2}{8\pi k}, \tag{113,8}$$

e per la funzione $a(t)$ troviamo:

$$a = a_1 \operatorname{sh} \eta, \quad t = \frac{a_1}{c}(\operatorname{ch} \eta - 1),$$

e per $\eta \ll 1$:

$$a = \sqrt{2a_1 ct} \tag{113,9}$$

(e la vecchia formula (112,15) per $\varepsilon(t)$). In tal modo, anche nel modello aperto la metrica ha un punto singolare (ma, a differenza del modello chiuso, ne ha uno solo).

Consideriamo infine il caso limite delle soluzioni corrispondenti a un raggio di curvatura infinito dello spazio, cioè un modello di spazio piatto (euclideo). L'intervallo ds^2 in questo modello può essere scritto nella forma

$$ds^2 = c^2\, dt^2 - b^2(t)\,(dx^2 + dy^2 + dz^2) \tag{113,10}$$

(per coordinate spaziali si scelgono le coordinate « cartesiane » x, y, z). Il fattore dipendente dal tempo nell'elemento di distanza spaziale non cambia, evidentemente, il carattere euclideo della metrica, poiché, per t dato, questo fattore è costante e può essere ridotto, con una semplice trasformazione delle coordinate, all'unità. Calcoli analoghi a quelli del paragrafo precedente conducono alle seguenti equazioni:

$$\frac{8\pi k}{c^2}\varepsilon = \frac{3}{b^2}\left(\frac{db}{dt}\right)^2, \quad 3\ln b = -\int \frac{d\varepsilon}{p+\varepsilon} + \text{costante}.$$

Per i casi di piccole pressioni, troviamo:

$$\mu b^3 = \text{costante}, \quad b = \text{costante}\, t^{2/3}. \tag{113,11}$$

Per piccoli t, bisogna considerare ancora il caso $p = \varepsilon/3$ dove si ottiene:

$$\varepsilon b^4 = \text{costante}, \quad b = \text{costante}\sqrt{t}. \tag{113,12}$$

In tal modo, anche in questo caso la metrica ha un punto singolare ($t = 0$).

Notiamo che tutte le soluzioni isotrope trovate esistono solamente quando la densità della materia è differente da zero; per lo spazio vuoto, le equazioni di Einstein non hanno soluzioni di questo genere[1]). Ricordiamo anche che le soluzioni trovate rappresentano

[1]) Per $\varepsilon = 0$, avremmo ricavato dall'equazione (113,5) $a = a_0 e^{\eta} = ct$ (l'equazione (112,7) perde in generale senso perché la radice è immaginaria). Ma la metrica

$$ds^2 = c^2\, dt^2 - c^2 t^2 \{d\chi^2 + \operatorname{sh}^2 \chi\,(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2 \theta\, d\varphi^2)\}$$

matematicamente il caso particolare di una classe piú generale di soluzioni che contiene tre funzioni arbitrarie fisicamente differenti delle coordinate spaziali (vedi il problema).

PROBLEMA

Determinare in prossimità del punto singolare la forma generale della metrica nella quale lo spazio si espande in modo « quasi uniforme », cioè in maniera tale che tutte le componenti $\gamma_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta}$ (in un sistema di riferimento sincrono) tendano a zero secondo una stessa legge. Lo spazio è riempito di materia la cui equazione di stato è $p = \varepsilon/3$ (*E. M. Lifšic, I. M. Khalatnikov*, 1960).

Soluzione. Cerchiamo la soluzione in prossimità del punto singolare ($t = 0$) nella forma

$$\gamma_{\alpha\beta} = ta_{\alpha\beta} + t^2 b_{\alpha\beta} + \dots, \tag{1}$$

dove $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$ sono funzioni delle coordinate (spaziali)[1]; poniamo inoltre $c = 1$. Il tensore inverso è

$$\gamma^{\alpha\beta} = \frac{1}{t} a^{\alpha\beta} - b^{\alpha\beta},$$

dove il tensore $a^{\alpha\beta}$ è inverso di $a_{\alpha\beta}$, e $b^{\alpha\beta} = a^{\alpha\gamma} a^{\beta\delta} b_{\gamma\delta}$; tutte le operazioni di innalzamento degli indici e di derivazione covariante si fanno con la metrica $a_{\alpha\beta}$ non dipendente dal tempo.

Calcolando i primi membri delle equazioni (97,11) e (97,12) all'ordine richiesto in $1/t$, otteniamo:

$$-\frac{3}{4t^2} + \frac{1}{2t} b = \frac{8\pi k}{3} \varepsilon (-4u_0^2 + 1), \qquad \frac{1}{2} (b_{;\alpha} - b^{\beta}_{\alpha;\beta}) = -\frac{32\pi k}{3} \varepsilon u_\alpha u_0,$$

dove $b = b^{\alpha}_{\alpha}$. Prendendo anche in considerazione l'identità

$$1 = u_i u^i \approx u_0^2 - \frac{1}{t} u_\alpha u_\beta a^{\alpha\beta},$$

troviamo:

$$8\pi k\varepsilon = \frac{3}{4t^2} - \frac{b}{2t}, \qquad u_\alpha = \frac{t^2}{2} (b_{;\alpha} - b^{\beta}_{\alpha;\beta}). \tag{2}$$

In prima approssimazione in $1/t$, i simboli di Christoffel tridimensionali, e con essi il tensore $P_{\alpha\beta}$, non dipendono dal tempo; inoltre, le $P_{\alpha\beta}$ coincidono con le espressioni che si ottengono mediante la sola metrica $a_{\alpha\beta}$. Tenendo conto di questo, troviamo che i termini dell'ordine di t^{-2} nell'equazione (97,13) si eliminano, e i termini $\sim 1/t$ danno:

$$P^{\beta}_{\alpha} + \frac{3}{4} b^{\beta}_{\alpha} + \frac{5}{12} \delta^{\beta}_{\alpha} = b0,$$

da cui

$$b^{\beta}_{\alpha} = -\frac{4}{3} P^{\beta}_{\alpha} + \frac{5}{18} \delta^{\beta}_{\alpha} P \tag{3}$$

---

si riduce con la trasformazione $r = ct \operatorname{sh} \chi$, $\tau = t \operatorname{ch} \chi$ alla forma

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \operatorname{sen}^2 \theta \, d\varphi^2),$$

cioè diventa semplicemente uno spazio-tempo galileiano.

[1]) Alla soluzione di Fridman risponde una scelta speciale delle funzioni $\alpha_{\alpha\beta}$, corrispondente allo spazio a curvatura costante.

(dove $P = a^{\beta\gamma}P_{\beta\gamma}$). Poiché si ha l'identità

$$P^{\beta}_{\alpha;\,\beta} - \frac{1}{2}P_{;\alpha} = 0$$

(vedi la (92,10)), abbiamo la relazione

$$b^{\beta}_{\alpha;\beta} = \frac{7}{9}b_{;\alpha},$$

e, di conseguenza, possiamo scrivere u_α nella forma

$$u_\alpha = \frac{t^2}{9}b_{;\alpha}. \tag{4}$$

In tal modo, le sei funzioni $a_{\alpha\beta}$ restano arbitrarie, e a partire da esse si determinano i coefficienti $b_{\alpha\beta}$ del successivo termine dello sviluppo (1). La scelta del tempo nella metrica (1) è pienamente determinata dalla condizione $t = 0$ nel punto singolare; quanto alle coordinate spaziali, su di esse si possono ancora effettuare trasformazioni arbitrarie che non cambino il tempo (quest'ultime possono servire, per esempio, per ridurre il tensore $a_{\alpha\beta}$ alla forma diagonale).

Di conseguenza, la soluzione ottenuta contiene in tutto solo tre funzioni arbitrarie « fisicamente differenti ».

Notiamo che in questa soluzione la metrica spaziale è non uniforme ed anisotropa, e la distribuzione della densità della materia tende a quella omogenea, quando $t \to 0$. La velocità tridimensionale $\mathbf{v}$ ha (nell'approssimazione (4)) un rotore nullo, e il suo modulo tende a zero secondo la legge

$$v^2 = v_\alpha v_\beta \gamma^{\alpha\beta} \sim t^3.$$

§ 114. *Spostamento verso il rosso*

La particolarità fondamentale di tutte le soluzioni esaminate è che la metrica spazio-temporale non è stazionaria: il raggio di curvatura dello spazio è una funzione del tempo. Inoltre, la variazione del raggio di curvatura comporta la variazione di tutte le distanze tra i corpi nello spazio, come risulta direttamente dal fatto che l'elemento di distanza spaziale dl è proporzionale ad a. Cosí, quando in un tale spazio a cresce, i corpi « fuggono » gli uni dagli altri (nel modello aperto all'aumento di a corrisponde $\eta > 0$, nel modello chiuso $0 < \eta < \pi$).

Dal punto di vista di un osservatore che si trova su uno di questi corpi, le cose vanno come se gli altri corpi si allontanassero radialmente dall'osservatore. La velocità di questa « fuga » (all'istante dato t) è proporzionale alla distanza tra i corpi.

Questa predizione teorica deve essere messa in relazione con un risultato fondamentale di astronomia, e cioè con l'effetto dello spostamento verso il rosso delle righe spettrali emesse dalle galassie. Se si interpreta questo spostamento come effetto Doppler, noi giun-

giamo alla conclusione che le galassie si allontanano, cioè che attualmente l'Universo è in espansione[1]).

Esaminiamo la propagazione di raggi di luce nello spazio isotropo. A questo scopo, partiamo dall'osservazione che lungo la linea d'universo di propagazione del segnale luminoso l'intervallo ds è nullo. Poniamo l'origine delle coordinate χ, θ, φ nel punto dal quale viene emesso il raggio di luce. È evidente, per ragioni di simmetria, che i raggi si propagheranno « radialmente », cioè lungo la linea $\theta =$ costante, $\varphi =$ costante. Allora poniamo nella (112,4) o (113,2) $d\theta = d\varphi = 0$ ed otteniamo $ds^2 = a^2 (d\eta^2 - d\chi^2)$. Eguagliando a zero, troviamo $d\eta = \pm d\chi$ oppure, integrando:

$$\chi = \pm\eta + \text{costante}. \tag{114,1}$$

Il segno positivo davanti a η corrisponde a un raggio uscente dall'origine delle coordinate, e il segno negativo a un raggio che arriva nell'origine. In questa forma, l'equazione (114,1) è applicabile alla propagazione dei raggi sia nel modello aperto che in quello chiuso. Con l'aiuto delle formule dei paragrafi precedenti si può esprimere qui la distanza percorsa dal raggio in funzione del tempo.

Nel modello aperto, un raggio di luce uscito da un punto si allontana indefinitamente propagandosi. Nel modello chiuso, invece, un raggio uscito da un punto iniziale può raggiungere alla fine il « polo opposto » dello spazio (a ciò corrisponde la variazione di χ da 0 a π); propagandosi ulteriormente, il raggio comincerà ad avvicinarsi al punto iniziale. Ad un « giro dello spazio » del raggio con il ritorno al punto iniziale corrisponde la variazione di χ da 0 a 2π. Dalla (114,1) si vede che anche η dovrebbe variare allora di 2π, il che è impossibile (tranne un solo caso: la partenza del raggio all'istante $\eta = 0$). In tal modo, il raggio, facendo « giro dello spazio », non farebbe in tempo a tornare nel punto iniziale.

Ad un raggio che arriva al punto d'osservazione (origine delle coordinate) corrisponde l'equazione (114,1) con η preceduta dal segno meno. Se $t(\eta_0)$ è l'istante d'arrivo del raggio in questo punto, per $\eta = \eta_0$ si deve allora avere $\chi = 0$, di modo che l'equazione di propagazione di tali raggi si scrive

$$\chi = \eta_0 - \eta. \tag{114,2}$$

Ne resulta che i raggi usciti da punti che si trovano a « distanze » non superiori a $\chi = \eta_0$ possono giungere all'istante $t(\eta_0)$ ad un osservatore che si trova nel punto $\chi = 0$.

---

[1]) La conclusione sulla « fuga » dei corpi all'aumentare di $a(t)$ può essere tratta, naturalmente, a condizione che l'energia della loro interazione sia piccola rispetto all'energia cinetica del loro moto; questa condizione è soddisfatta comunque per le galassie sufficientemente lontane. In caso contrario, le distanze tra i corpi sono generalmente determinate dalla loro interazione; di conseguenza, l'effetto considerato non deve praticamente influire sulle dimensioni delle nebulose, e tanto meno delle stelle.

Questo risultato, che riguarda sia il modello aperto che quello chiuso, è di importanza sostanziale. Ad ogni istante $t(\eta)$ in un punto dato dello spazio è possibile un'osservazione fisica non di tutto lo spazio, bensí di una sua parte, corrispondente a $\chi \leqslant \eta$. Dal punto di vista matematico, la « regione visibile » dello spazio rappresenta la sezione dello spazio-tempo quadridimensionale tagliata dal cono di luce. Questa sezione è finita sia per il modello aperto che per quello chiuso (infinita nel modello aperto è la sezione tagliata dall'ipersuperficie $t =$ costante, corrispondente allo spazio considerato in tutti i suoi punti allo stesso istante t). In questo senso, la differenza tra il modello aperto e il modello chiuso è meno profonda di quanto potrebbe sembrare a prima vista.

Quanto è piú lontana la regione dello spazio osservata all'istante dato dall'osservatore, tanto piú recenti sono gli istanti ai quali essa corrisponde. Consideriamo una superficie sferica che sia il luogo geometrico dei punti dai quali la luce è emessa all'istante $t(\eta - \chi)$ e supponiamo di osservarla nell'origine delle coordinate all'istante $t(\eta)$. L'area di questa superficie è uguale a $4\pi a^2(\eta - \chi)\,\mathrm{sen}^2\,\chi$ (nel modello chiuso) oppure $4\pi a^2(\eta - \chi)\,\mathrm{sh}^2\,\chi$ (nel modello aperto). Quando la superficie si allontana dall'osservatore l'area della « sfera visibile » cresce partendo da zero (per $\chi = 0$), passa per un massimo, e quindi decresce e si annulla per $\chi = \eta$ (dove $a(\eta - \chi) = a(0) = 0$). Ciò significa che la sezione tagliata dal cono di luce non soltanto è finita, ma anche chiusa. Le cose vanno come se essa si chiudesse nel punto « opposto » all'osservatore, punto che può essere visto guardando in qualsiasi direzione dello spazio. In questo punto $\varepsilon \to \infty$, e quindi la materia è accessibile all'osservazione, in linea di massima, in tutti i gradi della sua evoluzione.

La quantità totale di materia osservata nel modello aperto è data dall'integrale

$$M_{\mathrm{oss}} = 4\pi \int_0^{\eta} \mu a^3\,\mathrm{sh}^2\,\chi\,d\chi.$$

Sostituendo μa^3 ricavata dalla (113,7), otteniamo:

$$M_{\mathrm{oss}} = \frac{3c^2 a_0}{2k}(\mathrm{sh}\,\eta\,\mathrm{ch}\,\eta - \eta). \tag{114,3}$$

Questa grandezza cresce indefinitamente per $\eta \to \infty$. Ma nel modello chiuso il crescere di M_{oss} è naturalmente limitato dalla massa totale di M; in modo analogo in questo caso troviamo:

$$M_{\mathrm{oss}} = \frac{M}{\pi}(\eta - \mathrm{sen}\,\eta\cos\eta). \tag{114,4}$$

Quando η cresce da 0 a π, questa grandezza cresce da 0 ad M; un ulteriore aumento di M_{oss}, ricavabile dalla formula ottenuta, è fittizio e corrisponde semplicemente al fatto che in un univer-

so « in contrazione » i corpi distanti potrebbero essere osservati due volte (infatti la luce si propagherebbe « percorrendo lo spazio » da lati diversi).

Esaminiamo ora la variazione della frequenza della luce nel suo propagarsi in uno spazio isotropo. A questo scopo, facciamo preliminarmente la seguente osservazione. Siano dati due eventi accaduti in un punto dello spazio e separati da un intervallo di tempo $dt = a(\eta)\, d\eta/c$. Se negli istanti di questi eventi sono emessi due segnali luminosi, che vengono osservati da un altro punto dello spazio, allora tra gli istanti della loro ricezione passerà un intervallo di tempo corrispondente alla stessa variazione della grandezza η di $d\eta$ nel punto d'emissione. Ciò risulta direttamente dall'equazione (114,1) secondo la quale la variazione della grandezza η nel tempo di propagazione del raggio di luce da un punto ad un altro dipende solamente dalla differenza delle coordinate χ di questi punti. Ma poiché durante la propagazione del segnale il raggio di curvatura a varia, ne segue che gli intervalli di tempo t tra gli istanti d'emissione dei due segnali e gli istanti della loro ricezione saranno differenti; il rapporto tra questi intervalli di tempo è uguale al rapporto tra i corrispondenti valori di a.

Ne risulta, in particolare, che anche i periodi delle oscillazioni luminose, misurati secondo il tempo universale t, variano lungo un raggio di luce proporzionalmente ad a. La frequenza della luce sarà, evidentemente, inversamente proporzionale ad a. In tal modo, durante la propagazione di un raggio di luce sarà costante il seguente prodotto

$$\omega a = \text{costante} \tag{114,5}$$

lungo questo raggio.

Supponiamo che all'istante $t(\eta)$ stiamo osservando la luce emessa da una sorgente che si trova ad una distanza corrispondente ad un valore determinato della coordinata χ. Secondo la (114,1), l'istante d'emissione di questa luce è $t(\eta - \chi)$. Se ω_0 è la frequenza della luce all'istante di emissione, la frequenza ω che osserviamo sarà, in base alla (114,5),

$$\omega = \omega_0 \frac{a(\eta - \chi)}{a(\eta)}. \tag{114,6}$$

Quando la funzione $a(\eta)$ cresce in modo monotono, si ha $\omega < \omega_0$, cioè la frequenza della luce diminuisce. Ciò significa che, osservando lo spettro della luce pervenuta, tutte le righe debbono risultare spostate verso il rosso rispetto alla loro posizione negli spettri delle stesse materie in condizioni ordinarie. Questo fenomeno di *spostamento verso il rosso* rappresenta, di fatto, l'effetto Doppler dovuto alla « fuga » reciproca delle galassie.

La grandezza dello spostamento verso il rosso, data dal rapporto ω/ω_0 tra la frequenza modificata e quella originaria, dipende

(all'istante dato dell'osservazione) dalla distanza alla quale si trova la sorgente di luce osservata (nella relazione (114,6) entra la coordinata χ della sorgente di luce). Quando le distanze non sono troppo grandi, si può sviluppare $a(\eta - \chi)$ in serie di potenze di χ limitandosi ai primi due termini:

$$\frac{\omega}{\omega_0} = 1 - \chi \frac{a'(\eta)}{a(\eta)} .$$

(l'apice indica la derivazione rispetto a η). Notiamo inoltre, che il prodotto $\chi a(\eta)$ rappresenta qui la distanza l dalla sorgente osservata. Infatti, l'elemento « radiale » di distanza è $dl = a\,d\chi$; quando questa relazione viene integrata, si pone il problema di sapere quale è il procedimento di osservazione fisica per misurare la distanza, perché da ciò dipende la scelta dei valori di a nei differenti punti del cammino d'integrazione ad istanti diversi (l'integrazione con η = costante significherebbe che si considerano tutti i punti del cammino simultaneamente, il che fisicamente è irrealizzabile). Per distanze « piccole », si può trascurare la variazione di a lungo il cammino d'integrazione e scrivere semplicemente $l = a\chi$, essendo a preso all'istante d'osservazione.

Troviamo infine per la variazione percentuale della frequenza (indicata di solito con la lettera z) la seguente formula:

$$z = \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} = \frac{H}{c}\, l, \tag{114,7}$$

dove è posto

$$H = c\,\frac{a'(\eta)}{a^2(\eta)} = \frac{1}{a}\frac{da}{dt}, \tag{114,8}$$

detta la *costante di Hubble*. Questa grandezza non dipende, all'istante d'osservazione dato, da l. Cosí, lo spostamento relativo delle righe spettrali è proporzionale alla distanza dalla sorgente di luce osservata.

Considerando lo spostamento verso il rosso come il risultato dell'effetto Doppler, si possono determinare le velocità delle galassie v con le quali esse si allontanano dall'osservatore. Scrivendo $z = v/c$ e confrontando con la (114,7), troviamo:

$$v = Hl \tag{114,9}$$

(si può ottenere questa formula direttamente calcolando la derivata $v = d(a\chi)/dt$).

I dati astronomici confermano la legge (114,7), ma è difficile precisare il valore della costante di Hubble, essendo indeterminata la scala delle distanze cosmiche relative alle galassie lontane. Le ultime misure di H danno:

$$H \approx 0{,}8 \cdot 10^{-10}\ \text{anno}^{-1} = 0{,}25 \cdot 10^{-17}\text{s}^{-1},\ \frac{1}{H} \approx 4 \cdot 10^{17}\text{s} = 13 \cdot 10^{9}\text{anno}. \tag{114,10}$$

Questo valore di H corrisponde all'aumento della « velocità di fuga » di 75 km/s per ogni megaparsec di distanza[1]).

Sostituendo nell'equazione (113,4) $\varepsilon = \mu c^2$ ed $H = ca'/a^2$, otteniamo per il modello aperto la seguente relazione:

$$\frac{c^2}{a^2} = H^2 - \frac{8\pi k}{3}\mu. \tag{114,11}$$

Combinando questa relazione con l'uguaglianza

$$H = \frac{c \operatorname{sh} \eta}{a_0 (\operatorname{ch} \eta - 1)^2} = \frac{c}{a} \operatorname{cth} \frac{\eta}{2},$$

otteniamo:

$$\operatorname{ch} \frac{\eta}{2} = H \sqrt{\frac{3}{8\pi k \mu}}. \tag{114,12}$$

In modo analogo, per il modello chiuso otteniamo:

$$\frac{c^2}{a^2} = \frac{8\pi k}{3}\mu - H^2, \tag{114,13}$$

$$\cos \frac{\eta}{2} = H \sqrt{\frac{3}{8\pi k \mu}}. \tag{114,14}$$

Confrontando le (114,11) e (114,13), vediamo che la curvatura dello spazio è negativa o positiva a seconda che sia negativa o positiva la differenza $8\pi k\mu/3 - H^2$. Questa differenza si annulla per $\mu = \mu_k$, dove

$$\mu_k = \frac{3H^2}{8\pi k}. \tag{114,15}$$

Prendendo il valore (114,10), otteniamo $\mu_k \approx 1 \cdot 10^{-29}$| g/cm^3. Allo stato attuale dei risultati astronomici, la valutazione della densità media della materia nello spazio può essere fatta soltanto con scarsa precisione. Da una valutazione basata sul calcolo del numero di galassie e sulla loro massa media si è ricavato per essa il valore di circa $3 \cdot 10^{-31}$ g/cm^3. Questo valore, inferiore di 30 volte a μ_k, sarebbe quindi a favore del modello aperto. Tuttavia, senza pronunciarsi sulla attendibilità di questo valore, bisogna considerare che in esso non si tiene conto della possibile esistenza di un gas nero intergalattico che potrebbe aumentare notevolmente la densità media della materia.

Indichiamo una disuguaglianza che è possibile ottenere per un valore di H dato. Per il modello aperto, abbiamo $H = c \operatorname{sh} \eta / a (\operatorname{h}\eta - 1)^2$ e quindi

$$t = \frac{a_0}{c}(\operatorname{sh} \eta - \eta) = \frac{\operatorname{sh} \eta (\operatorname{sh} \eta - \eta)}{H (\operatorname{ch} \eta - 1)^2}.$$

[1]) Esistono anche valutazioni che danno un valore minore di H, che corrisponde all'aumento della velocità di fuga di 55 km/s per ogni megaparsec; si ha in questo caso $1/H \approx 18 \cdot 10^9$ anno.

Poiché $0 < \eta < \infty$, si deve avere

$$\frac{2}{3H} < t < \frac{1}{H}. \tag{114,16}$$

Analogamente per il modello chiuso si ottiene:

$$t = \frac{\operatorname{sen}\eta\,(\eta - \operatorname{sen}\eta)}{H\,(1 - \cos\eta)^2}.$$

Al crescere di $a(\eta)$ corrisponde l'intervallo $0 < \eta < \pi$; di conseguenza, si ottiene:

$$0 < t < \frac{2}{3H}. \tag{114,17}$$

Determiniamo ora l'intensità I della luce pervenuta all'osservatore dalla sorgente che si trova ad una distanza corrispondente ad un valore determinato della coordinata χ. La densità del flusso d'energia nel punto d'osservazione è inversamente proporzionale all'area della sfera passante per questo punto e avente il centro coincidente con la sorgente; nello spazio a curvatura negativa l'area di superficie della sfera è uguale a $4\pi a^2 \operatorname{sh}^2\chi$. La luce emessa dalla sorgente nell'intervallo di tempo $dt = a(\eta - \chi)\,d\eta/c$ arriverà al punto d'osservazione nell'intervallo di tempo $a(\eta)\,dt/a(\eta - \chi) = a(\eta)\,d\eta/c$. Poiché l'intensità è definita come il flusso d'energia nell'unità di tempo, ne segue che nell'espressione di I apparirà il fattore $a(\eta - \chi)/a(\eta)$. Inoltre, l'energia di un pacchetto d'onda è proporzionale alla frequenza (vedi la (53,9)); siccome la frequenza varia durante la propagazione della luce secondo la legge (114,5), si otterrà nell'espressione di I un altro fattore $a(\eta - \chi)/a(\eta)$. L'espressione definitiva di I è quindi:

$$I = \text{costante} \cdot \frac{a^2(\eta - \chi)}{a^4(\eta)\operatorname{sh}^2\chi}. \tag{114,18}$$

Per il modello chiuso in modo analogo si ottiene:

$$I = \text{costante} \cdot \frac{a^2(\eta - \chi)}{a^4(\eta)\operatorname{sen}^2\chi}. \tag{114,19}$$

Queste formule stabiliscono la relazione tra l'intensità luminosa dell'oggetto osservato e la distanza (per una data intensità della sorgente). Per le χ piccole si può porre $a(\eta - \chi) \approx a(\eta)$, e si avrà allora $I \sim 1/a^2(\eta)\,\chi^2 = 1/l^2$, cioè si otterrà la legge ordinaria del decrescere dell'intensità inversamente al quadrato della distanza.

Infine, consideriamo la questione dei cosiddetti moti propri dei corpi. Parlando della densità e del moto della materia, abbiamo ovunque considerato una densità media e un moto medio; in particolare, nel sistema di riferimento che usiamo costantemente, la velocità media del moto è nulla. Le velocità reali dei corpi risultano invece avere una certa dispersione intorno al loro valore medio.

Col passar del tempo le velocità del moto proprio variano. Per determinare la legge di questa variazione, consideriamo un corpo in moto libero e scegliamo l'origine delle coordinate in un punto arbitrario della sua traiettoria. Questa traiettoria sarà allora la linea-radiale $\theta = \cos$, $\varphi = \cos$. L'equazione di Hamilton-Jacobi (87,6) diventa dopo sostituzione dei valori di g^{ik}

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \chi}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial \eta}\right)^2 + m^2c^2a^2(\eta) = 0. \qquad (114,20)$$

Poiché i coefficienti di questa equazione non contengono χ (cioè la coordinata χ è ciclica), si verifica allora la legge di conservazione $\partial S/\partial\chi =$ costante. Mentre l'impulso p del corpo in moto è, secondo la definizione generale, $p = \partial S/\partial l = \partial S/a\partial\chi$. Di conseguenza, durante il moto del corpo resta costante il prodotto

$$pa = \text{costante}. \qquad (114,21)$$

Introducendo la velocità v del moto proprio del corpo secondo

$$p = mv/\sqrt{1 - v^2/c^2},$$

otteniamo:

$$\frac{va}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \text{costante}. \qquad (114,22)$$

Questa relazione determina la legge di variazione delle velocità in funzione del tempo. Quando a cresce, le velocita v decrescono in modo monotono.

PROBLEMI

1. Trovare i due primi termini dello sviluppo dell'intensità luminosa visibile di una galassia in funzione del suo spostamento verso il rosso; l'intensità assoluta di una galassia varia con il tempo secondo la legge $I_{\text{ass}} = \text{costante} \cdot e^{\alpha t}$ (*H. Robertson*, 1955).

Soluzione. L'intensità luminosa osservata all'« istante» η è data come una funzione della distanza χ dalla formula (per il modello chiuso)

$$I = \text{costante} \cdot e^{\alpha[t(\eta-\chi)-t(\eta)]} \frac{a^2(\eta-\chi)}{a^4(\eta)\,\text{sen}^2\chi}.$$

Lo spostamento verso il rosso, definito secondo la (114,7), è:

$$z = \frac{\omega_0 - \omega}{\omega} = \frac{a(\eta) - a(\eta-\chi)}{a(\eta-\chi)}.$$

Sviluppando I e z in serie di potenze di χ (le funzioni $a(\eta)$ e $t(\eta)$ sono date dalle (112,9) e (112,10)) ed eliminando poi χ dalle espressioni ottenute, troviamo infine:

$$I = \text{costante} \cdot \frac{1}{z^2}\left[1 - \left(1 - \frac{q}{2} + \frac{\alpha c}{h}\right) z\right],$$

dove

$$q = \frac{2}{1+\cos\eta} = \frac{\mu}{\mu_k} > 1.$$

Per il modello aperto si ottiene la stessa formula con

$$q = \frac{2}{1+\operatorname{ch}\eta} = \frac{\mu}{\mu_k} < 1.$$

2. Trovare i primi termini dello sviluppo del numero di galassie contenute in una « sfera » di raggio dato come funzioni dello spostamento verso il rosso sulla frontiera della sfera (si suppone che la distribuzione spaziale delle galassie sia omogenea).

Soluzione. Il numero N delle galassie che si trovano ad una « distanza » $\leqslant \chi$ è (per il modello chiuso)

$$N = \text{costante} \cdot \int_0^{\chi} \operatorname{sen}^2 \chi \, d\chi \approx \text{costante} \cdot \chi^3.$$

Sostituendo in questa espressione i due primi termini dello sviluppo della funzione $\chi(z)$, otteniamo:

$$N = \text{costante} \cdot z^3 \left[1 - \frac{3}{4}(2+q)\, z \right].$$

In questa forma, l'espressione ottenuta è valida anche per il modello aperto.

§ 115. *Stabilità gravitazionale dell'Universo isotropo*

Esaminiamo la questione che riguarda il comportamento delle piccole perturbazioni nel modello isotropo, cioè la sua stabilità gravitazionale (*E. M. Lifšic*, 1946). Ci limiteremo qui allo studio delle perturbazioni in regioni di spazio relativamente piccole, cioè in regioni le cui dimensioni lineari sono piccole rispetto al raggio a[1]). In ogni regione di questo tipo la metrica spaziale può essere considerata in prima approssimazione come euclidea, cioè la metrica (111,8) o (111,12) va sostituita con la metrica

$$dl^2 = a^2(\eta)\,(dx^2 + dy^2 + dz^2), \qquad (115,1)$$

dove x, y, z sono coordinate cartesiane misurate prendendo come unità il raggio a. Per coordinata temporale useremo, come prima, la variabile η.

Senza perdere in generalità, descriveremo il campo perturbato, come già fatto precedentemente, in un sistema di riferimento sincrono, cioè imporremo alle variazioni δg_{ik} del tensore metrico le condizioni $\delta g_{00} = \delta g_{0\alpha} = 0$. Date queste condizioni, facciamo variare l'identità $g_{ik}u^i u^k = 1$ (tenendo presente che i

[1]) Per uno studio piú dettagliato di questa questione, nonché per uno studio delle perturbazioni in regioni di dimensioni confrontabili con a si veda *Adv. of Phys.* 12, 208 (1963).

valori imperturbati delle componenti della 4-velocità della materia sono $u^0 = 1/a$ e $u^\alpha = 0$[1]). Otteniamo come risultato $g_{00}u^0\delta u^0 = 0$, da cui $\delta u^0 = 0$. Quanto alle perturbazioni δu^α, esse sono generalmente non nulle, e quindi il sistema di riferimento non è piú un sistema in moto solidale.

Indichiamo le perturbazioni del tensore metrico spaziale con $h_{\alpha\beta} \equiv \delta\gamma_{\alpha\beta} = -\delta g_{\alpha\beta}$. Si avrà allora $\delta\gamma^{\alpha\beta} = -h^{\alpha\beta}$ dove l'innalzamento degli indici di $h_{\alpha\beta}$ è fatto con la metrica imperturbata $\gamma_{\alpha\beta}$.

In approssimazione lineare, le perturbazioni piccole di un campo gravitazionale soddisfano le equazioni

$$\delta R_i^k - \frac{1}{2}\delta_k^i \delta R = \frac{8\pi k}{c^4}\,\delta T_i^k. \qquad (115,2)$$

In un sistema di riferimento sincrono le variazioni delle componenti del tensore energia-impulso (94,9) sono:

$$\delta T_\alpha^\beta = -\delta_\alpha^\beta \delta p, \quad \delta T_0^\alpha = a(p+\varepsilon)\,\delta u^\alpha, \quad \delta T_0^0 = \delta\varepsilon. \qquad (115,3)$$

Essendo le $\delta\varepsilon$ e δp piccole, possiamo scrivere $\delta p = \frac{dp}{d\varepsilon}\,\delta\varepsilon$ ed ottenere le relazioni

$$\delta T_\alpha^\beta = -\delta_\alpha^\beta \frac{dp}{d\varepsilon}\,\delta T_0^0. \qquad (115,4)$$

Le formule per δR_l^k si può ottenere facendo variare le espressioni (97,10). Poiché il tensore metrico imperturbato è $\gamma_{\alpha\beta} = a^2\delta_{\alpha\beta}$, allora i valori imperturbati sono

$$\varkappa_{\alpha\beta} = \frac{2\dot{a}}{a}\,\gamma_{\alpha\beta} = \frac{2a'}{a^2}\,\gamma_{\alpha\beta}, \quad \varkappa_\alpha^\beta = \frac{2a'}{a^2}\,\delta_\alpha^\beta,$$

dove il puntino indica la derivazione rispetto a ct, e l'apice la derivazione rispetto a η. Le perturbazioni delle grandezze $\varkappa_{\alpha\beta}$ e $\varkappa_\alpha^\beta = \varkappa_{\alpha\gamma}\gamma^{\gamma\beta}$ sono:

$$\delta\varkappa_{\alpha\beta} = \dot{h}_{\alpha\beta} = \frac{1}{a}\,h'_{\alpha\beta}, \quad \delta\varkappa_\alpha^\beta = -h^{\beta\gamma}\varkappa_{\alpha\gamma} + \gamma^{\beta\gamma}\dot{h}_{\alpha\gamma} = \dot{h}_\alpha^\beta = \frac{1}{a}\,h_\alpha^{\beta\prime},$$

dove $h_\alpha^\beta = \gamma^{\beta\gamma}h_{\alpha\gamma}$. I valori imperturbati del tensore tridimensionale P_α^β per la metrica euclidea (115,1) sono nulli. Le variazioni δP_α^β si calcolano secondo le formule (108,3) e (108,4); è evidente che δP_α^β si esprimono mediante $\delta\gamma_{\alpha\beta}$ come il tensore quadridimensionale δR_{ik} si esprime mediante δg_{ik}, dove tutte le operazioni tensoriali si fanno nello spazio tridimensionale con la metrica (115,1); poiché questa metrica è euclidea, tutte le derivazioni covarianti si riducono

---

[1]) In questo paragrafo indicheremo i valori imperturbati delle grandezze con lettere senza l'indice ausiliario (0).

a derivazioni ordinarie rispetto alle coordinate x^α (mentre le derivazioni controvarianti richiedono anche la divisione per a^2). Detto questo (e passando ovunque dalle derivate rispetto a t alle derivate rispetto a η), otteniamo con semplici calcoli:

$$\delta R_\alpha^\beta = -\frac{1}{2a^2}\left(h_{\alpha,\,\gamma}^{\gamma,\,\beta} + h_{\gamma,\,\alpha}^{\beta,\,\gamma} - h_{\alpha,\,\gamma}^{\beta,\,\gamma} - h_{,\alpha}^{;\beta}\right) - \\ -\frac{1}{2a^2} h_\alpha^{\beta''} - \frac{a'}{a^3} h_\alpha^{\beta'} - \frac{a'}{2a^3} h' \delta_\alpha^\beta, \qquad (115,5)$$

$$\delta R_0^0 = -\frac{1}{2a^2} h'' - \frac{a'}{2a^3} h', \quad \delta R_0^\alpha = \frac{1}{2a^2}\left(h^{,\alpha} - h_\beta^{\alpha,\,\beta}\right)'$$

($h \equiv h_\alpha^\alpha$). Qui gli indici inferiori e superiori preceduti dalla virgola indicano le derivazioni ordinarie rispetto alle coordinate x^α (continuiamo a scrivere gli indici in alto e in basso per conservare uniformità).

Le equazioni definitive per le perturbazioni di h_α^β si ottengono sostituendo nella (115,4) le componenti di δT_i^k espresse mediante δR_i^k secondo la (115,2). Conviene scrivere le equazioni ricavabili dalla (115,4) per $\alpha \neq \beta$ e per contrazione degli indici α, β. Queste equazioni hanno la forma:

$$\left(h_{\alpha,\,\gamma}^{\gamma,\,\beta} + h_{\gamma,\,\alpha}^{\beta,\,\gamma} - h_{;\alpha}^{;\beta} - h_{\alpha,\,\gamma}^{\beta,\,\gamma}\right) + h_\alpha^{\beta''} + 2\frac{a'}{a} h_\alpha^{\beta'} = 0, \quad \alpha \neq \beta,$$

$$\frac{1}{2}\left(h_{\gamma,\,\delta}^{\delta,\,\gamma} - h_{;\gamma}^{;\gamma}\right)\left(1 + 3\frac{dp}{d\varepsilon}\right) + h'' + h'\frac{a'}{a}\left(2 + 3\frac{dp}{d\varepsilon}\right) = 0. \qquad (115,6)$$

Le perturbazioni della densità e della velocità della materia si possono determinare dalle grandezze note h_α^β con l'aiuto delle formule (115,2) e (115,3). Otteniamo cosí la variazione relativa della densità:

$$\frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{c^4}{8\pi k\varepsilon}\left(\delta R_0^0 - \frac{1}{2}\delta R\right) = \frac{c^4}{16\pi k\varepsilon a^2}\left(h_{\alpha,\,\beta}^{\beta,\,\alpha} - h_{;\alpha}^{;\alpha} + \frac{2a'}{a} h'\right]. \qquad (115,7)$$

Tra le soluzioni delle equazioni (115,6) ci sono soluzioni che si possono eliminare con una semplice trasformazione del sistema di riferimento (senza violarne il carattere sincrono) e, di conseguenza, non rappresentano un cambiamento fisico reale della metrica. La forma di tali soluzioni può essere stabilita *a priori* con l'aiuto delle formule (1) e (2) ottenute nel problema 3 del § 97. Sostituendo in quelle equazioni i valori imperturbati $\gamma_{\alpha\beta} = a^2\delta_{\alpha\beta}$, otteniamo le seguenti espressioni per le perturbazioni fittizie della metrica:

$$h_\alpha^\beta = f_{0;\alpha}^{;\beta} \int \frac{d\eta}{a} + \frac{a'}{a^2} f_0 \delta_\alpha^\beta + \left(f_\alpha^{,\beta} + f^\beta{}_{,\alpha}\right), \qquad (115,8)$$

dove f_0, f_α sono funzioni arbitrarie (piccole) delle coordinate x, y, z.

Poiché la metrica nelle piccole regioni dello spazio che consideriamo è supposta euclidea, la perturbazione arbitraria in ciascuna di queste regioni può essere decomposta in onde piane. Prendendo x, y, z come coordinate cartesiane, misurate in unità a, possiamo scrivere il fattore spaziale periodico delle onde piane nella forma $e^{i\mathbf{nr}}$, dove $\mathbf{n}$ è un vettore adimensionale che rappresenta il vettore d'onda misurato in unità $1/a$ (il vettore d'onda è $\mathbf{k} = \mathbf{n}/a$). Se abbiamo una perturbazione in una regione dello spazio di dimensioni $\sim l$, nello sviluppo entreranno, in generale, onde di lunghezza $\lambda = 2\pi a/n \sim l$. Limitandoci alle perturbazioni nelle regioni di dimensioni $l \ll a$, supponiamo con ciò il numero n abbastanza grande ($n \gg 2\pi$).

Le perturbazioni gravitazionali si possono suddividere in tre tipi. Questa classificazione si riduce alla determinazione dei tipi possibili di onde piane che possono rappresentare il tensore simmetrico $h_{\alpha\beta}$. Si ha la seguente classificazione:

1. Con la funzione scalare

$$Q = e^{i\mathbf{nr}} \tag{115,9}$$

si può formare il vettore $\mathbf{P} = \mathbf{n}Q$ e i tensori[1])

$$Q_\alpha^\beta = \frac{1}{3}\delta_\alpha^\beta Q, \quad P_\alpha^\beta = \left(\frac{1}{3}\delta_\alpha^\beta - \frac{n_\alpha n^\beta}{n^2}\right) Q. \tag{115,10}$$

A tali onde piane corrispondono perturbazioni in cui è soggetto a variazioni non soltanto il campo gravitazionale ma anche la velocità e la densità della materia, cioè abbiamo il caso di perturbazioni accompagnate da compressioni o espansioni della materia. La perturbazione di h_α^β si esprime allora mediante i tensori Q_α^β e P_α^β, la perturbazione della velocità mediante il vettore $\mathbf{P}$, e la perturbazione della densità mediante lo scalare Q.

2 Con l'onda vettoriale trasversale

$$\mathbf{S} = \mathbf{s}e^{i\mathbf{nr}}, \quad \mathbf{sn} = 0, \tag{115,11}$$

si può formare il tensore $(n^\beta S_\alpha + n_\alpha S^\beta)$; uno scalare corrispondente non esiste perché $\mathbf{nS} = 0$. A tali onde corrispondono le perturbazioni nelle quali sono soggetti a variazione il campo gravitazionale e la velocità, e non la densità della materia; si possono chiamare perturbazioni di rotazione.

3. Si ha infine l'onda trasversale tensoriale

$$G_\alpha^\beta = g_\alpha^\beta e^{i\mathbf{nr}}, \quad g_\alpha^\beta n_\beta = 0. \tag{115,12}$$

Con essa non si può formare né un vettore né uno scalare. A tali onde corrispondono le perturbazioni del campo gravitazionale nelle

[1]) Scriviamo gli indici superiori ed inferiori delle componenti del vettore cartesiano ordinario $\mathbf{n}$ solo per uniformità.

quali la materia resta immobile e distribuita in modo uniforme nello spazio. In altri termini, queste sono le onde gravitazionali nell'Universo isotropo.

Le piú interessanti sono le perturbazioni del primo tipo. Poniamo

$$h_\alpha^\beta = \lambda(\eta) P_\alpha^\beta + \mu(\eta) Q_\alpha^\beta, \quad h = \mu Q. \tag{115,13}$$

Dalla (115,7) per la variazione relativa della densità si ha

$$\frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{c^4}{24\pi k\varepsilon a^2}\left[n^2(\lambda+\mu) + \frac{3a'}{a}\mu'\right] Q. \tag{115,14}$$

Le equazioni che determinano le funzioni λ e μ si ottengono sostituendo le (115,13) nella (115,6):

$$\begin{gathered} \lambda'' + 2\frac{a'}{a}\lambda' - \frac{n^2}{3}(\lambda+\mu) = 0, \\ \mu'' + \mu'\frac{a'}{a}\left(2 + 3\frac{dp}{d\varepsilon}\right) + \frac{n^2}{3}(\lambda+\mu)\left(1 + 3\frac{dp}{d\varepsilon}\right) = 0. \end{gathered} \tag{115,15}$$

Queste equazioni hanno innanzitutto i seguenti due integrali particolari corrispondenti alle variazioni fittizie della metrica che possono essere eliminate con una trasformazione del sistema di riferimento:

$$\lambda = -\mu = \text{costante}, \tag{115,16}$$

$$\lambda = -n^2 \int \frac{d\eta}{a}, \quad \mu = n^2 \int \frac{d\eta}{a} - \frac{3a'}{a^2} \tag{115,17}$$

(il primo si ricava dalla (115,8) scegliendo $f_0 = 0$, $f_\alpha = P_\alpha$, il secondo scegliendo $f_0 = Q$, $f_\alpha = 0$).

Per gli stadi iniziali dell'espansione dell'Universo, quando la materia è descritta dall'equazione di stato $p = \varepsilon/3$, si ha $a \approx a_1\eta$, $\eta \ll 1$ (sia nel modello aperto che in quello chiuso). Le equazioni (115,15) assumono la forma

$$\lambda'' + \frac{2}{\eta}\lambda' - \frac{n^2}{3}(\lambda+\mu) = 0, \quad \mu'' + \frac{3}{\eta}\mu' + \frac{2n^2}{3}(\lambda+\mu) = 0. \tag{115,18}$$

È istruttivo esaminare queste equazioni nei due casi limite per il rapporto tra le due grandezze elevate n e $1/\eta$.

Supponiamo dapprima che il numero n non sia troppo grande (o η sia abbastanza piccolo), in modo che $n\eta \ll 1$. In questo caso, nell'approssimazione in cui sono valide le equazioni (115,18) troviamo:

$$\lambda = \frac{3C_1}{\eta} + C_2\left(1 + \frac{n^2}{9}\eta^2\right), \quad \mu = -\frac{2n^2}{3}C_1\eta + C_2\left(1 - \frac{n^2}{6}\eta^2\right),$$

dove C_1, C_2 sono costanti; sono escluse qui le soluzioni del tipo (115,16) e (115,17) (nel caso presente sono soluzioni, nelle quali $\lambda - \mu =$ costante e $\lambda + \mu \sim 1/\eta^2$). Calcolando inoltre $\delta\varepsilon/\varepsilon$ con le (115,14) e (112,15), troviamo le seguenti espressioni per le

perturbazioni della metrica e della densità:

$$h_\alpha^\beta = \frac{3C_1}{\eta} P_\alpha^\beta + C_2 (Q_\alpha^\beta + P_\alpha^\beta),$$

$$\frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{n^2}{9} (C_1\eta + C_2\eta^2) Q \quad \text{per} \quad p = \frac{\varepsilon}{3}, \quad \eta \ll \frac{1}{n}. \qquad (115,19)$$

Le costanti C_1 e C_2 debbono soddisfare determinate condizioni che esprimono il fatto che la perturbazione è piccola nell'istante η_0 in cui si manifesta: si deve avere $h_\alpha^\beta \ll 1$ (da cui $\lambda \ll 1$, $\mu \ll 1$) e $\delta\varepsilon/\varepsilon \ll 1$. Applicate alla (115,19) queste condizioni conducono alle disuguaglianze $C_1 \ll \eta_0$, $C_2 \ll 1$.

Le espressioni (115,19) contengono termini che crescono in un Universo in espansione proporzionalmente alle diverse potenze del raggio $a = a_1\eta$. Questo non può far diventare grande la perturbazione: se nella formula (115,19) si considera l'ordine di grandezza per $\eta \sim 1/n$, si vede che (in virtú delle disuguaglianze ottenute sopra per C_1 e C_2) le perturbazioni restano piccole persino al limite superiore di validità di queste formule.

Supponiamo ora che il numero n sia tale che $n\eta \gg 1$. Risolvendo le equazioni (115,18) in questa ipotesi, troviamo che i termini principali in λ e μ sono uguali a[1]):

$$\lambda = -\frac{\mu}{2} = \text{costante} \frac{1}{\eta^2} e^{in\eta/\sqrt{3}}.$$

Di qui per le perturbazioni della metrica e della densità troviamo:

$$h_\alpha^\beta = \frac{C}{n^2\eta^2} (P_\alpha^\beta - 2Q_\alpha^\beta) e^{in\eta/\sqrt{3}}, \quad \frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon} = -\frac{C}{9} Q e^{in\eta/\sqrt{3}}$$

$$\text{per } p = \frac{\varepsilon}{3}, \quad \frac{1}{n} \ll \eta \ll 1, \qquad (115,20)$$

dove C è una costante complessa che soddisfa la condizione $|C| \ll 1$. La presenza del fattore periodico in queste espressioni è del tutto naturale. Per n grandi abbiamo il caso di una perturbazione la cui periodicità spaziale è determinata da un vettore d'onda grande $k = n/a$. Tali perturbazioni debbono propagarsi come onde sonore alla velocità

$$u = \sqrt{\frac{dp}{d(\varepsilon/c^2)}} = \frac{c}{\sqrt{3}}.$$

La parte temporale della fasa è determinata, come nell'acustica geometrica, dall'integrale $\int ku\, dt = n\eta/\sqrt{3}$ di valore elevato.

---

[1]) Il fattore $1/\eta^2$ è il primo termine dello sviluppo in serie di potenze di $1/n\eta$. Per determinarlo in questo caso, bisogna considerare simultaneamente i due primi termini dello sviluppo [il che è ammesso dalla precisione delle equazioni (115,18)].

Come si vede, l'ampiezza della variazione relativa della densità resta costante, mentre l'ampiezza della metrica decresce come a^{-2} quando l'Universo si espande[1]).

Consideriamo inoltre gli stadi piú avanzati dell'espansione, quando la materia è rarefatta a tal punto che si può trascurarne la pressione ($p = 0$). Ci limiteremo qui al caso delle η piccole, corrispondenti agli stadi dell'espansione quando il raggio a è ancora piccolo rispetto al suo valore attuale, ma la materia è ormai abbastanza rarefatta.

Per $p = 0$ e $\eta \ll 1$, si ha $a \approx a_0\eta^2/2$, e le equaziono (115,15) assumono la forma

$$\lambda'' + \frac{4}{\eta}\lambda' - \frac{n^2}{3}(\lambda + \mu) = 0, \quad \mu'' + \frac{4}{\eta}\mu' + \frac{n^2}{3}(\lambda + \mu) = 0.$$

Le soluzioni di queste equazioni sono:

$$\lambda + \mu = 2C_1 - \frac{6C_2}{\eta^3}, \quad \lambda - \mu = 2n^2\left(\frac{C_1\eta^2}{15} + \frac{2C_2}{\eta^3}\right).$$

Calcolando quindi $\delta\varepsilon/\varepsilon$ [con l'aiuto delle (115,14) e (112,12)], troviamo:

$$h_\alpha^\beta = C_1(P_\alpha^\beta + Q_\alpha^\beta) + \frac{2n^2C_2}{\eta^3}(P_\alpha^\beta - Q_\alpha^\beta) \quad \text{per} \quad \eta \ll \frac{1}{n},$$

$$h_\alpha^\beta = \frac{C_1}{15}n^2\eta^2(P_\alpha^\beta - Q_\alpha^\beta) + \frac{2n^2C_2}{\eta^3}(P_\alpha^\beta - Q_\alpha^\beta) \quad \text{per} \quad \frac{1}{n} \ll \eta \ll 1, \qquad (115,21)$$

$$\frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon} = \left(\frac{C_1n^2\eta^2}{30} + \frac{C_2n^2}{\eta^3}\right)Q.$$

Si vede che $\delta\varepsilon/\varepsilon$ contiene un termine che cresce proporzionalmente ad a^2). Se però $n\eta \ll 1$, $\delta\varepsilon/\varepsilon$ non diventa grande neanche per $\eta \sim 1/n$, poiché $C_1 \ll 1$. Se invece $\eta n \gg 1$, allora per $\eta \sim 1$ la variazione relativa della densità diventa dell'ordine di C_1n^2, mentre il fatto che la perturbazione iniziale sia piccola richiede che $C_1n^2\eta_0^2 \ll 1$. In tal modo, sebbene le perturbazioni crescano lentamente, l'aumento generale può essere notevole e, di conseguenza, la perturbazione può diventare relativamente grande.

---

[1]) È facile provare che (per $p = \varepsilon/3$) $n\eta \sim L/\lambda$, dove $L \sim u/\sqrt{k\varepsilon/c^2}$. È naturale che la lunghezza caratteristica L, che determina il comportamento delle perturbazioni di lunghezza d'onda $\lambda \ll a$, è costruita a partire dalle sole grandezze « idrodinamiche »: la densità della materia ε/c^2 e la velocità del suono in essa u (e la costante gravitazionale k). Notiamo che il crescere delle perturbazioni ha luogo per $\lambda \gg L$ [nella (115,19)].

[2]) Da un'analisi piú particolareggiata, che tiene conto della pressione piccola p (ε), risulta che la possibilità di trascurare la pressione esige che sia osservata la condizone $u\eta n/c \ll 1$ (dove $u = c\sqrt{dp/d\varepsilon}$ è la velocità minore del suono); è facile provare che in questo caso essa coincide con la condizione $\lambda \gg L$. In tal modo, il crescere delle perturbazioni ha sempre luogo se $\lambda \gg L$.

In modo analogo si possono esaminare le perturbazioni del secondo e del terzo tipo citato. Tuttavia si possono trovare le leggi di smorzamento di queste perturbazioni anche senza calcoli dettagliati, partendo invece dalle semplici considerazioni seguenti.

Se in una piccola parte della materia (di dimensioni lineari l) ha luogo una perturbazione rotazionale con la velocità δv, allora il momento angolare di questa parte è $\sim(\varepsilon/c^2)\, l^3 \cdot l \cdot v$. Quando l'Universo si espande, l cresce proporzionalmente ad a, ed ε decresce come a^{-3} (nel caso in cui $p = 0$) oppure come a^{-4} (per $p = \varepsilon/3$). In virtù della conservazione del momento angolare si ha quindi

$$\delta v = \text{costante} \quad \text{per}\, p = \frac{\varepsilon}{3}, \qquad \delta v \sim \frac{1}{a} \ \text{per}\, p = 0. \qquad (115,22)$$

Infine, la densità d'energia delle onde gravitazionali deve decrescere per un Universo in espansione come a^{-4}. D'altra parte, questa densità si esprime mediante la perturbazione della metrica come $\sim k^2\, (h_\alpha^\beta)^2$, dove $k = n/a$ è il vettore d'onda della perturbazione. Ne segue che l'ampiezza di una perturbazione del tipo dell'onda gravitazionale considerata decresce col tempo come $1/a$.

§ 116. *Spazi uniformi*

L'ipotesi della uniformità e della isotropia dello spazio determina completamente la sua metrica (lasciando arbitrario solo il segno della curvatura). L'ipotesi della sola uniformità dello spazio, senza alcuna simmetria supplementare, lascia un arbitrio notevolmente maggiore. Esaminiamo il problema di quali possono essere le proprietà metriche dello spazio uniforme.

Si tratterà quindi della metrica spaziale considerata ad un istante dato t. Si suppone inoltre che il sistema di riferimento spazio-temporale sia sincrono, in modo che t sia l'unico tempo sincronizzato per tutto lo spazio.

L'uniformità significa che le proprietà metriche sono le stesse in tutti i punti dello spazio. La definizione esatta di questo concetto è legata allo studio dell'insieme delle trasformazioni di coordinate che fanno coincidere lo spazio con se stesso, cioè lasciano invariata la metrica: se prima della trasformazione l'elemento di lunghezza è

$$dl^2 = \gamma_{\alpha\beta}\,(x^1,\ x^2,\ x^3)\, dx^\alpha\, dx^\beta,$$

dopo la trasformazione lo stesso elemento diventa

$$dl^2 = \gamma_{\alpha\beta}\,(x'^1,\ x'^2,\ x'^3)\, dx'^\alpha\, dx'^\beta$$

con la stessa dipendenza funzionale $\gamma_{\alpha\beta}$ dalle nuove coordinate. Lo spazio è uniforme se esso ammette un insieme di trasformazioni

(o, come si dice, un *gruppo di movimenti*) che permettono di far coincidere ogni suo punto dato con ogni altro punto. Poiché lo spazio è tridimensionale, ne risulta che le diverse trasformazioni del gruppo debbono essere determinate da tre parametri indipendenti.

Cosí, in uno spazio euclideo l'uniformità è espressa dall'invarianza della metrica per traslazioni parallele del sistema di coordinate cartesiane. Ciascuna traslazione è determinata da tre parametri, ossia dalle componenti del vettore di spostamento dell'origine di coordinate. Tutte queste trasformazioni lasciano invarianti tre differenziali indipendenti (dx, dy, dz) i quali costituiscono appunto l'elemento di lunghezza.

Nel caso generale di uno spazio uniforme non euclideo, le trasformazioni del gruppo dei movimenti lasciano invarianti anche le tre forme differenziali lineari indipendenti che, però, non sono differenziali totali di una funzione delle coordinate. Scriviamo queste forme nel modo seguente:

$$e_\alpha^{(a)}\, dx^\alpha, \tag{116,1}$$

dove l'indice latino (a) enumera i tre vettori di riferimento indipendenti (funzioni delle coordinate).

Con l'aiuto delle forme (116,1) la metrica spaziale, invariante rispetto al dato gruppo dei movimenti, si costruisce come segue:

$$dl^2 = \eta_{ab}\, (e_\alpha^{(a)}\, dx^\alpha)\, (e_\beta^{(b)}\, dx^\beta), \tag{116,2}$$

cioè il tensore metrico è

$$\gamma_{\alpha\beta} = \eta_{ab} e_\alpha^{(a)} e_\beta^{(b)}, \tag{116,3}$$

dove i coefficienti η_{ab}, simmetrici rispetto agli indici a e b, sono funzioni del tempo.

In tal modo, siamo giunti alla rappresentazione « ternaria » della metrica spaziale mediante una terna di vettori di riferimento; a questa rappresentazione sono applicabili tutte le formule ottenute nel § 98. Inoltre, la scelta dei vettori di riferimento è dettata dalle proprietà di simmetria dello spazio; questi vettori, in generale, non sono ortogonali (quindi la matrice η_{ab} non è diagonale).

Come nel § 98, accanto alla terna di vettori $e_\alpha^{(a)}$, introduciamo la terna di vettori reciproci $e_{(a)}^\alpha$ per i quali

$$e_{(a)}^\alpha e_\alpha^{(b)} = \delta_a^b, \quad e_{(a)}^\alpha e_\beta^{(a)} = \delta_\beta^\alpha. \tag{116,4}$$

Nel caso tridimensionale il legame tra gli uni e gli altri vettori può essere rappresentato in maniera esplicita come segue:

$$\mathbf{e}_{(1)} = \frac{1}{v}\,[\mathbf{e}^{(2)}\mathbf{e}^{(3)}], \quad \mathbf{e}_{(2)} = \frac{1}{v}\,[\mathbf{e}^{(3)}\mathbf{e}^{(1)}], \quad \mathbf{e}_{(3)} = \frac{1}{v}\,[\mathbf{e}^{(1)}\mathbf{e}^{(2)}], \tag{116,5}$$

dove

$$v = | e_\alpha^{(a)} | = (\mathbf{e}^{(1)} [\mathbf{e}^{(2)} \mathbf{e}^{(3)}]),$$

e dove bisogna interpretare $\mathbf{e}_{(a)}$ ed $\mathbf{e}^{(\alpha)}$ come i vettori cartesiani di componenti $e^\alpha_{(a)}$ ed $e_\alpha^{(a)}$. Il determinante del tensore metrico (116,3) è

$$\gamma = \eta v^2, \tag{116,6}$$

dove η è il determinante della matrice η_{ab}.

L'invarianza delle forme differenziali (116,1) significa che

$$e_\alpha^{(a)}(x)\, dx^\alpha = e_\alpha^{(a)}(x')\, dx'^\alpha, \tag{116,7}$$

dovele $e_\alpha^{(a)}$ in ambedue i membri dell'uguaglianza sono sempre le stesse funzioni delle coordinate, rispettivamente, vecchie e nuove. Moltiplicando questa uguaglianza per $e^\beta_{(a)}(x')$, sostituendo $dx'^\beta = (\partial x'^\beta/\partial x^\alpha)\, dx^\alpha$ e confrontando i coefficienti dei differenziali identici dx^α, otteniamo:

$$\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\alpha} = e^\beta_{(a)}(x')\, e_\alpha^{(a)}(x). \tag{116,8}$$

Queste uguaglianze rappresentano un sistema di equazioni differenziali che determinano le funzioni $x'^\beta(x^\alpha)$ secondo i vettori di riferimento dati[1]). Perché le equazioni (116,8) siano integrabili, esse debbono soddisfare identicamente le condizioni

$$\frac{\partial^2 x'^\beta}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma} = \frac{\partial^2 x'^\beta}{\partial x^\gamma \partial x^\alpha}.$$

Calcolate le derivate, otteniamo:

$$\left[\frac{\partial e^\beta_{(a)}(x')}{\partial x'^\delta} e^\delta_{(b)}(x') - \frac{\partial e^\beta_{(b)}(x')}{\partial x'^\delta} e^\delta_{(a)}(x')\right] e_\gamma^{(b)}(x)\, e_\alpha^{(a)}(x) =$$

$$= e^\beta_{(a)}(x') \left[\frac{\partial e_\gamma^{(a)}(x)}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial e_\alpha^{(a)}(x)}{\partial x^\gamma}\right].$$

Moltiplicando i due membri dell'uguaglianza per $e^\alpha_{(d)}(x)\, e^\gamma_{(c)}(x)\, e^{(f)}_\beta(x')$, trasportando la derivazione da un fattore all'altro e tenendo

---

[1]) Per le trasformazioni del tipo $x'^\beta = x^\beta + \xi^\beta$, dove ξ^β sono grandezze piccole, dalla (116,8) si ricavano le equazioni

$$\frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\alpha} = \xi^\gamma e_\alpha^{(a)} \frac{\partial e^\beta_{(a)}}{\partial x^\gamma}. \tag{116,8a}$$

Tre soluzioni linearmente indipendenti di queste equazioni $\xi^\beta_{(b)}$ ($b = 1, 2, 3$) determinano le trasformazioni infinitesime del gruppo dei movimenti dello spazio. I vettori $\xi^\beta_{(b)}$ sono detti *vettori di Killing* (vedi la nota alla pag. 355).

conto della (116,4), nel primo membro otteniamo:

$$e^{(f)}_{\beta}(x')\left[\frac{\partial e^{\beta}_{(d)}(x')}{\partial x'^{\delta}}e^{\delta}_{(c)}(x')-\frac{\partial e^{\beta}_{(c)}(x')}{\partial x'^{\delta}}e^{\delta}_{(d)}(x')\right]=$$

$$=e^{\beta}_{(c)}(x')\,e^{\delta}_{(d)}(x')\left[\frac{\partial e^{(f)}_{\beta}(x')}{\partial x'^{\delta}}-\frac{\partial e^{(f)}_{\delta}(x')}{\partial x'^{\beta}}\right],$$

e nel secondo membro la stessa espressione come funzione di x. Poiché x ed x' sono arbitrarie, queste espressioni debbono ridursi a delle costanti:

$$\left(\frac{\partial e^{(c)}_{\alpha}}{\partial x^{\beta}}-\frac{\partial e^{(c)}_{\beta}}{\partial x^{\alpha}}\right)e^{\alpha}_{(a)}e^{\beta}_{(b)}=C^{c}{}_{ab}\,. \tag{116,9}$$

Le costanti $C^{c}{}_{ab}$ si chiamano *costanti di struttura* del gruppo. Moltiplicata per $e^{\gamma}_{(c)}$, l'espressione (116,9) può essere scritta nella forma

$$e^{\alpha}_{(a)}\frac{\partial e^{\gamma}_{(b)}}{\partial x^{\alpha}}-e^{\beta}_{(b)}\frac{\partial e^{\gamma}_{(a)}}{\partial x^{\beta}}=C^{c}{}_{ab}e^{\gamma}_{(c)}. \tag{116,10}$$

Queste sono le condizioni cercate di uniformità dello spazio. L'espressione del primo membro dell'uguaglianza (116,9) coincide con la definizione delle grandezze $\lambda^{c}{}_{ab}$ (98,10), le quali risultano quindi costanti.

Per definizione, le costanti di struttura sono antisimmetriche rispetto agli indici inferiori:

$$C^{c}{}_{ab}=-C^{c}{}_{ba}. \tag{116,11}$$

Si può ottenere per esse ancora una condizione, notando che l'uguaglianza (116,10) è equivalente alla regola di commutazione

$$[X_a,\,X_b]\equiv X_aX_b-X_bX_a=C^{c}{}_{ab}X_c \tag{116,12}$$

per gli operatori differenziali lineari[1])

$$X_a=e^{\alpha}_{(a)}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}. \tag{116,13}$$

Allora la relazione citata scaturirà dall'identità

$$[[X_a,\,X_b],\,X_c]+[[X_b,\,X_c],\,X_a]+[[X_c,\,X_a],\,X_b]=0$$

(detta l'identità di Jacobi) ed assumerà la forma

$$C^{f}{}_{ab}C^{d}{}_{cf}+C^{f}{}_{bc}C^{d}{}_{af}+C^{f}{}_{ca}C^{d}{}_{bf}=0. \tag{116,14}$$

[1]) Nella teoria matematica dei gruppi continui (o gruppi di Lie) gli operatori, che soddisfano le condizioni del tipo (116,12), si chiamano *generatori del gruppo*. A scanso di equivoci che possono sorgere dal confronto con altri testi, osserviamo però, che la teoria sistematica dei gruppi continui è basata, di regola, sui generatori definiti a partire dai vettori di Killing: $X_a=\xi^{\alpha}_{(a)}\partial/\partial x^{\alpha}$.

Un determinato vantaggio rispetto alle costanti con tre indici C^c_{ab}, è dato dalle grandezze con due indici che si ottengono per trasformazione duale

$$C^c{}_{ab} = e_{abd} C^{dc}, \tag{116,15}$$

dove $e_{abc} = e^{abc}$ è il tenssore unitario completamente antisimmetrico (e dove $e_{123} = +1$). Le regole di commutazione (116,12) con le nuove costanti si scrivono nella forma

$$e^{abc} X_b X_c = C^{ad} X_d. \tag{116,16}$$

Della proprietà (116,11) si tiene già conto nella definizione (116,15), mentre la proprietà (116,14) assume la forma

$$e_{bcd} C^{cd} C^{ba} = 0. \tag{116,17}$$

Osserviamo anche che la definizione (116,9) per le grandezze C^{ab} può essere rappresentata sotto forma vettoriale:

$$C^{ab} = -\frac{1}{v} \mathbf{e}^{(a)} \operatorname{rot} \mathbf{e}^{(b)}. \tag{116,18}$$

dove le operazioni vettoriali si eseguono come se le coordinate x^a fossero cartesiane.

È ovvio che la scelta dei tre vettori di riferimento nelle forme differenziali (116,1) (e anche degli operatori X_a) non è univoca. Queste grandezze possono essere sottoposte a qualsiasi trasformazione lineare a coefficienti costanti:

$$\mathbf{e}_{(a)} = A^b_a \mathbf{e}_{(b)}. \tag{116,19}$$

Rispetto a tali trasformazioni le grandezze η_{ab} e C^{ab} si comportano come tensori.

Le condizioni (116,17) sono le uniche alle quali debbono soddisfare le costanti di struttura C^{ab}. Tra le combinazioni di costanti, ammesse da queste condizioni, ci sono però combinazioni equivalenti, nel senso che la differenza è dovuta esclusivamente alle trasformazioni (116,19). La questione concernente la classificazione degli spazi uniformi si riduce alla determinazione di tutte le combinazioni non equivalenti delle costanti di struttura. Ciò si può fare se si ricorre alle proprietà « tensoriali » delle grandezze C^{ab}, applicando il seguente semplice metodo (*C. G. Behr*, 1962).

Si può decomporre il « tensore » non simmetrico C^{ab} nelle parti simmetrica ed antisimmetrica. Indichiamo la prima parte con n^{ab}, ed esprimiamo la seconda parte mediante il suo « vettore » duale a_c:

$$C^{ab} = n^{ab} + e^{abc} a_c. \tag{116,20}$$

La sostituzione di questa espressione nella (116,17) conduce alla condizione

$$n^{ab} a_b = 0. \tag{116,21}$$

Il « tensore » n^{ab} può essere ridotto con le trasformazioni (116,19) agli assi principali; siano n_1, n_2, n_3 i suoi valori principali, L'uguaglianza (116,21) mostra che il « vettore » a_b (se esiste) giace su quell'asse principale del « tensore » n^{ab}, cui corrisponde il valore principale uguale a zero. Senza perdere in generalità, si può quindi porre $a_b = (a, 0, 0)$. Allora la (116,21) si riduce ad $an_1 = 0$, cioè una delle grandezze a o n_1 deve annullarsi. Le regole di commutazione (116,16) assumono allora la forma

$$[X_1, X_2] = -aX_2 + n_2X_3, \; [X_2, X_3] = n_1X_1, \; [X_3, X_1] = n_2X_2 + aX_3. \tag{116,22}$$

A questo punto resta ancora un'arbitrarietà nella scelta del segno degli operatori X_a e della scala (moltiplicazione per costanti). Ciò permette di cambiare contemporaneamente il segno di tutte le n_1, n_2, n_3 e di rendere positiva la grandezza a (se essa è differente da zero). Si possono anche trasformare tutte le costanti di struttura riducendole a ± 1, se almeno una delle grandezze a, n_2, n_3 è uguale a zero. Se però tutte queste tre grandezze sono differenti da zero, le trasformazioni di scala lasciano invariato il rapporto a^2/n_2n_3[1]).

Siamo dunque giunti alla seguente tabella di tipi possibili di spazi uniformi; le cifre romane della prima colonna indicano il numero che si suole usare secondo la classificazione di *L. Bianchi* (1918)[2]):

Tipo	a	n_1	n_1	n_2
I	0	0	0	0
II	0	1	0	0
VII	0	1	1	0
VI	0	1	−1	0
IX	0	1	1	1
VIII	0	1	1	−1
V	1	0	0	0
IV	1	0	0	1
VII	a	0	1	1
III ($a = 1$) / VI ($a \neq 1$)	a	0	1	−1

[1]) Ad essere rigorosi, per studiare le proprietà « tensoriali » di C^{ab} occorrerebbe introdurre nella definizione (116,15) il fattore $\sqrt{\eta}$ (cfr. indicazione del § 83 su come deve essere determinato un tensore unitario antisimmetrico rispetto alle trasformazioni arbitrarie delle coordinate). Non vogliamo però entrare qui in questi particolari: l'obiettivo che ci siamo proposti permette di dedurre le legge di trasformazione delle costanti di struttura direttamente dall'uguaglianza (116,22).

[2]) Il parametro a assume tutti i valori positivi. I tipi corrispondenti rappresentano di fatto famiglie ad un parametro di differenti gruppi, e la loro unificazione nei tipi comuni VI e VII è convenzionale.

Il tipo I è lo spazio euclideo; tutte le componenti del tensore spaziale di curvatura (vedi piú avanti la formula (116,24)) si riducono a zero. Oltre al caso banale della metrica galileiana, si ha una metrica dipendente dal tempo che verrà esaminata nel paragrafo seguente.

Il tipo IX contiene il caso particolare dello spazio a curvatura positiva costante. Questo spazio si ottiene se nell'elemento di lunghezza (116,2) si pone $\eta_{ab} = \delta_{ab}/4\lambda$, dove λ è una costante positiva. Infatti, il calcolo secondo la formula (116,24) con $C^{11} = C^{22} = C^{33} = 1$ (costanti di struttura del tipo IX) dà $P_{(a)(b)} = 1/2\delta_{ab}$ e quindi

$$P_{\alpha\beta} = P_{(a)(b)} e^{(a)}_{\alpha} e^{(b)}_{\beta} = 2\lambda\gamma_{\alpha\beta},$$

il che corrisponde appunto allo spazio indicato (cfr. (111,3)).

Analogamente, il tipo V contiene come caso particolare lo spazio a curvatura negativa costante. Infatti, ponendo $\eta_{ab} = \delta_{ab}/\lambda$ e calcolando $P_{(a)(b)}$ secondo la formula (116,24) con $C^{23} = -C^{32} = 1$, si ottiene

$$P_{(a)(b)} = -2\delta_{ab}, \quad P_{\alpha\beta} = -2\lambda\gamma_{\alpha\beta},$$

il che corrisponde a una curvatura negativa costante.

Mostriamo infine in che modo le equazioni di Einstein per un Universo con spazio uniforme si riducono ad un sistema di equazioni differenziali ordinarie, contenenti solo funzioni del tempo. A questo scopo, bisogna sviluppere la parte spaziale dei quadrivettori e dei tensori quadridimensionali sulle terne di vettori di riferimento del dato spazio:

$$R_{(a)(b)} = R_{\alpha\beta} e^{\alpha}_{(a)} e^{\beta}_{(b)}, \quad R_{0(a)} = R_{0\alpha} e^{\alpha}_{(a)}, \quad u^{(a)} = u^{\alpha} e^{(a)}_{\alpha},$$

dove tutte queste grandezze sono ormai funzioni della sola t; anche le grandezze scalari: la densità d'energia ε e la pressione della materia p sono funzioni del tempo.

Le equazioni di Einstein nel sistema sincrono si esprimono secondo le (97,11), (97,12), (97,13) mediante i tensori tridimensionali $\varkappa_{\alpha\beta}$ e $P_{\alpha\beta}$. Per il primo tensore abbiamo semplicemente

$$\varkappa_{(a)(b)} = \dot{\eta}_{ab}, \quad \varkappa^{(b)}_{(a)} = \dot{\eta}_{ac}\eta^{cb} \tag{116,23}$$

(il puntino indica la derivazione rispetto a t). Per quanto concerne le componenti di $P_{(a)(b)}$, esse si possono esprimere mediante le grandezze η_{ab} e le costanti di struttura del gruppo applicando la (98,14). Dopo la sostituzione delle grandezze a tre indici $\lambda^{a}_{bc} = C^{a}_{bc}$

con C^{ab} a due indici e dopo alcuni calcoli[1]) otteniamo:

$$P^{(b)}_{(a)} = \frac{1}{2\eta}\{2C^{bd}C_{ad} + C^{db}C_{ad} + C^{bd}C_{da} - C^{d}_{\ d}(C^{b}_{\ a} + C^{b}_{\ a}) + \\ + \delta^{b}_{a}[(C^{d}_{\ d})^2 - 2C^{df}C_{df}]\} \qquad (116,24)$$

Abbiamo qui, in base alla regola generale,

$$C_{a}^{\ b} = \eta_{ac}C^{cb}, \quad C_{ab} = \eta_{ac}\eta_{bd}C^{cd}.$$

Osserviamo anche che le identità di Bianchi per il tensore tridimensionale $P_{\alpha\beta}$ nello spazio uniforme assumono la forma

$$P^{c}_{\ b}C^{b}_{\ ca} + P^{c}_{\ a}C^{b}_{\ cb} = 0. \qquad (116,25)$$

Le espressioni definitive per le componenti « ternarie » del 4-tensore di Ricci sono[2]):

$$R^{0}_{0} = -\frac{1}{2}\dot{\varkappa}^{(a)}_{(a)} - \frac{1}{4}\varkappa^{(b)}_{(a)}\varkappa^{(a)}_{(b)},$$

$$R^{0}_{(a)} = -\frac{1}{2}\varkappa^{(c)}_{(b)}(C^{b}_{\ ca} - \delta^{b}_{a}C^{d}_{\ dc}), \qquad (116,26)$$

$$R^{(b)}_{(a)} = -\frac{1}{2\sqrt{\eta}}(\sqrt{\eta}\,\varkappa^{(b)}_{(a)})^{\cdot} - P^{(b)}_{(a)}.$$

Sottolineiamo che per scrivere le equazioni di Einstein non c'è quindi bisogno di utilizzare le espressioni esplicite dei vettori di riferimento come funzioni delle coordinate.

§ 117. *Modello anisotropo piatto*

Il solo fatto che il modello isotropo sia adeguato per la descrizione della recente evoluzione dell'Universo, non permette di concludere che questo modello sia ugualmente adeguato per la descrizione dell'evoluzione iniziale, cioè in vicinanza di una singolarità temporale. Questo problema verrà trattato dettagliatamente nel § 119, mentre in questo paragrafo e nel seguente saranno considerate preliminarmente le soluzioni delle equazioni di Einstein, che posseggono anche un punto singolare rispetto al tempo, ma di tipo profondamente differente (dalla singolarità di Fridman).

Cercheremo una soluzione nella quale tutte le componenti del tensore metrico siano, mediante una scelta opportuna del sistema

---

[1]) Nelle quali si usano le formule

$$\eta_{ad}\eta_{be}\eta_{cf}e^{def} = \eta e_{abc}, \quad e_{abf}e^{cdf} = \delta^{c}_{a}\delta^{d}_{b} - \delta^{d}_{a}\delta^{c}_{b}.$$

[2]) Le derivate covarianti di $\varkappa^{\beta}_{\alpha;\,\gamma}$, che entrano in R^{0}_{α}, si trasformano con l'aiuto della formula citata nella nota alla pag. 385.

di riferimento, funzioni di una sola variabile, ossia del tempo $x^0 = t$[1]). Un tale problema è stato già affrontato nel § 109, dove, però, è stato esaminato il caso in cui il determinante $|g_{\alpha\beta}|$ fosse nullo. Considereremo ora questo determinante come diverso da zero. Come è stato indicato nel § 109, in questo caso si possono porre tutte le $g_{0\alpha} = 0$, senza compromettere la generalità. Possiamo inoltre effettuare sulla variabile t la trasformazione $\sqrt{g_{00}}\,dt$ in modo da ridurre g_{00} all'unità; di conseguenza, otteniamo un sistema di riferimento sincrono, dove

$$g_{00} = 1, \quad g_{0\alpha} = 0, \quad g_{\alpha\beta} = -\gamma_{\alpha\beta}(t). \tag{117,1}$$

Possiamo ora utilizzare le equazioni di Einstein nella forma (97,11), (97,12), (97,13). Poiché le grandezze $\gamma_{\alpha\beta}$, e con esse le componenti del tensore tridimensionale $\varkappa_{\alpha\beta} = \dot{\gamma}_{\alpha\beta}$ non dipendono dalle coordinate x^α, si ha allora $R_{0\alpha} \equiv 0$. Per la stessa ragione $P_{\alpha\beta} \equiv 0$, e, di conseguenza, le equazioni del campo gravitazionale nel vuoto si riducono al seguente sistema:

$$\dot{\varkappa}^\alpha_\alpha + \frac{1}{2}\varkappa^\beta_\alpha \varkappa^\alpha_\beta = 0, \tag{117,2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}}(\sqrt{\gamma}\,\varkappa^\beta_\alpha)^{\cdot} = 0 \tag{117,3}$$

Dalla (117,3) segue che

$$\sqrt{\gamma}\,\varkappa^\beta_\alpha = 2\lambda^\beta_\alpha, \tag{117,4}$$

dove λ^β_α sono grandezze constanti. Contraendo gli indici α e β, otteniamo:

$$\varkappa^\alpha_\alpha = \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} = \frac{2}{\sqrt{\gamma}}\lambda^\alpha_\alpha,$$

da cui si vede che $\gamma =$ costante t^2. Senza compromettere la generalità, si può porre costante $= 1$ (che si ottiene con una semplice modifica della scala delle coordinate x^α); si ha allora $\lambda^\alpha_\alpha = 1$. La sostituzione della (117,4) nell'equazione (117,2) dà ora la relazione

$$\lambda^\beta_\alpha \lambda^\alpha_\beta = 1, \tag{117,5}$$

che lega tra di loro le costanti λ^β_α.

Abbassando quindi l'indice β nella (117,4), scriviamo queste uguaglianze sotto forma di un sistema di equazioni differenziali ordinarie rispetto a $\gamma_{\alpha\beta}$:

$$\dot{\gamma}_{\alpha\beta} = \frac{2}{t}\lambda^\gamma_\alpha \gamma_{\gamma\beta}. \tag{117,6}$$

---

[1]) Per semplificare la scrittura delle formule, nei §§ 117-118 poniamo $c = 1$.

L'insieme dei coefficienti λ_α^γ può essere considerato come la matrice di una certa trasformazione lineare. Con una trasformazione lineare appropriata delle coordinate x^1, x^2, x^3 (o, ciò che è equivalente, delle grandezze $g_{1\beta}$, $g_{2\beta}$, $g_{3\beta}$) si può, in generale, ridurre questa matrice alla forma diagonale. Indichiamone gli antovalori con p_1, p_2, p_3 e supponiamoli per ora reali e diversi (per altri casi si veda piú avanti); siano $\mathbf{n}^{(1)}$, $\mathbf{n}^{(2)}$, $\mathbf{n}^{(3)}$ gli autovetlori normalizzati. Si può allora rappresentare la soluzione delle equazioni (117,6) nella forma

$$\gamma_{\alpha\beta} = t^{2p_1} n_\alpha^{(1)} n_\beta^{(1)} + t^{2p_2} n_\alpha^{(2)} n_\beta^{(2)} + t^{2p_3} n_\alpha^{(3)} n_\beta^{(3)} \tag{117,7}$$

(i coefficienti costanti delle potenze di t si possono ridurre ad uno con una scelta appropriata della scala delle coordinate). Scegliendo infine le direzioni dei vettori $\mathbf{n}^{(1)}$, $\mathbf{n}^{(2)}$, $\mathbf{n}^{(3)}$ come direzioni degli assi (chiamiamole x, y, z), riduciamo la metrica alla forma

$$ds^2 = dt^2 - t^{2p_1} dx^2 - t^{2p_2} dy^2 - t^{2p_3} dz^2. \tag{117,8}$$

(*E. Kasner*, 1922). Qui p_1, p_2, p_3 sono tre numeri arbitrari che soddisfano le due relazioni:

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1, \quad p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1 \tag{117,9}$$

(la prima segue da $-g = t^2$, la seconda si ottiene quindi dalla (117,5)).

I tre numeri p_1, p_2, p_3 non possono ovviamente avere valori identici. L'uguaglianza di due di essi ha luogo nelle terne (0, 0, 1) e (—1/3, 2/3, 2/3). In tutti gli altri casi i numeri p_1, p_2, p_3 sono diversi e, inoltre, uno di essi è negativo e gli altri due sono positivi. Se li scriviamo nell'ordine $p_1 < p_2 < p_3$, i loro valori saranno compresi negli intervalli

$$-\frac{1}{3} \leqslant p_1 \leqslant 0, \quad 0 \leqslant p_2 \leqslant \frac{2}{3}, \quad \frac{2}{3} \leqslant p_3 \leqslant 1. \tag{117,10}$$

In tal modo, la metrica (117,8) corrisponde ad uno spazio uniforme piatto, ma anisotropo, dove tutti i volumi crescono (al crescere del tempo) proporzionalmente a t e dove le distanze lineari lungo due assi (y, z) aumentano mentre lungo un altro (x) diminuiscono. L'istante $t = 0$ è il punto singolare della soluzione; la metrica ha in esso una singolarità non eliminabile con nessuna trasformazione del sistema di riferimento, e gli invarianti del tensore di curvatura quadridimensionale diventano infiniti. Fa eccezione il caso in cui $p_1 = p_2 = 0$, $p_3 = 1$; questi valori corrispondono al caso dello spazio-tempo piatto: la trasformazione

$t \operatorname{sh} z = \zeta$, $t \operatorname{ch} z = \tau$ riduce la metrica (117,8) alla forma galileiana[1]).

La metrica (117,8) è la soluzione esatta delle equazioni di Einstein per lo spazio vuoto. Ma in vicinanza di un punto singolare, per t piccolo, questa metrica rappresenta una soluzione approssimata (a meno dei termini dell'ordine di $1/t$) delle equazioni, pur essendo la materia distribuita uniformemente nello spazio. La velocità e l'andamento della variazione della densità della materia sono determinati allora semplicemente dalle equazioni del moto in un campo gravitazionale dato, essendo l'influenza inversa della materia sul campo trascurabile. La densità della materia tende all'infinito per $t \to 0$, il che è in accordo col carattere fisico della singolarità (vedi problema 3).

PROBLEMI

1. Trovare la soluzione delle equazioni (117,6), corrispondente al caso in cui la matrice λ_α^β ha un valore principale reale (p_3) e due complessi ($p_{1,2} = p' \pm ip''$).

Soluzione. In questo caso la variabile x^0, dalla quale dipendono tutte le grandezze, deve avere un carattere spaziale; indichiamola con $x^0 = x$. Nella (117,1) si deve avere quindi $g_{00} = -1$. Quanto alle equazioni (117,2) e (117,3), esse restano invariate.

I vettori $\mathbf{n}^{(1)}$ ed $\mathbf{n}^{(2)}$ nella (117,7) diventano complessi: $\mathbf{n}^{(1,2)} = (\mathbf{n}' \pm i\mathbf{n}'')/\sqrt{2}$ dove $\mathbf{n}'$ ed $\mathbf{n}''$ sono i vettori unitari. Orientando gli assi x^1, x^2, x^3 nelle direzioni $\mathbf{n}'$, $\mathbf{n}''$, $\mathbf{n}^{(3)}$, otteniamo la soluzione nella forma

$$-g_{11} = g_{22} = x^{2p'} \cos\left(2p'' \ln \frac{x}{a}\right), \qquad g_{12} = -x^{2p'} \operatorname{sen}\left(2p'' \ln \frac{x}{a}\right),$$

$$g_{33} = -x^{2p_3}, \qquad -g = -g_{00}\,|\,g_{\alpha\beta}\,| = x^2,$$

dove a è una costante (la quale non può essere ora eliminata con una scelta della scala lungo l'asse delle x, senza che non vengano cambiati altri coefficienti nelle espressioni scritte). I numeri p_1, p_2, p_3 soddisfano, come prima, le relazioni (117,9); inoltre, il numero reale p_3 è o minore di $-1/3$ oppure maggiore di 1.

2. Risolvere il problema 1 per il caso di due autovalori coincidenti ($p_2 = p_3$).

---

[1]) La soluzione del tipo (117,8) esiste anche nel caso in cui la sua variabile è spaziale; bisogna allora cambiare i segni in modo appropriato, per esempio:

$$ds^2 = x^{2p_1}\,dt^2 - dx^2 - x^{2p_2}\,dy^2 - x^{2p_3}\,dz^2.$$

Tuttavia, in questo caso esistono anche soluzioni di altro tipo che appaiono quando la matrice λ_α^β nelle equazioni (117,6) ha autovalori complessi o coincidenti (vedi problemi 1 e 2). Nel caso della variabile temporale t, queste soluzioni risultano impossibili perche il loro determinante g non soddisfa la condizione necessaria $g < 0$.

Citiamo infine un lavoro in cui è stata trovata una serie di soluzioni esatte delle equazioni di Einstein nel vuoto di tipi analoghi ma dipendenti da un numero maggiore di variabili: B. K. Harrison, *Phys. Rev.* 116, 1285 (1959).

Soluzione. Come è noto dalla teoria generale delle equazioni differenziali lineari, in questo caso il sistema (117,6) può essere ridotto alla seguente forma canonica:

$$\dot{g}_{11}=\frac{2p_1}{x}g_{11},\quad \dot{g}_{2\alpha}=\frac{2p_2}{x}g_{2\alpha},\quad \dot{g}_{3\alpha}=\frac{2p_2}{x}g_{3\alpha}+\frac{\lambda}{x}g_{2\alpha},\quad \alpha=2,\,3,$$

dove λ è una costante. Per $\lambda = 0$, si ritorna alla (117,8). Per $\lambda \neq 0$ si può porre $\lambda = 1$; allora

$$g_{11}=-x^{2p_1},\quad g_{2\alpha}=a_\alpha x^{2p_2},\quad g_{3\alpha}=a_\alpha x^{2p_2}\ln x+b_\alpha x^{2p_2}$$

Dalla condizione $g_{32} = g_{23}$ troviamo $a_2 = 0$, $a_3 = b_2$. Con una scelta appropriata della scala lungo gli assi x^2 ed x^3 riduciamo infine la metrica alla seguente forma:

$$ds^2=-dx^2-x^{2p_1}(dx^1)^2\pm 2x^{2p_2}dx^2\,dx^3\pm x^{2p_2}\ln\frac{x}{a}\,(dx^3)^2.$$

I numeri p_1, p_2 possono avere i valori 1, 0 oppure $-1/3$, $2/3$.

3. In vicinanza del punto singolare $t = 0$ determinare la legge di variazione con il tempo della densità di materia distribuita uniformemente nello spazio con la metrica (117,8).

Soluzione. Trascuriamo l'influenza inversa della materia sul campo e partiamo dalle equazioni idrodinamiche del moto:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{-g}\,\sigma u^i\right)=0,$$

$$(p+\varepsilon)\,u^k\left(\frac{\partial u_i}{\partial x^k}-\frac{1}{2}u^l\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x^i}-u_iu^k\frac{\partial p}{\partial x^k},\tag{1}$$

contenute nelle equazioni $T^k_{i;\,k}=0$ (vedi vol. VI, *Idrodinamica*, cap. XV). Qui σ è la densità dell'entropia; in vicinanza della singolarità è necessario ricorrere all'equazione di stato ultrarelativistica $p = \varepsilon/3$, e si avrà allora $\sigma \backsim \varepsilon^{3/4}$.

Indichiamo i fattori temporali nella (117,8) con $a = t^{p_1}$, $b = t^{p_2}$, $c = t^{p_3}$. Poiche tutte le grandezze dipendono soltanto dal tempo e poiché si ha $\sqrt{-g} = abc$, le equazioni (1) danno:

$$\frac{d}{dt}\left(abcu_0\varepsilon^{3/4}\right)=0,\quad 4\varepsilon\frac{du_\alpha}{dt}+u_\alpha\frac{d\varepsilon}{dt}=0.$$

Da cui

$$abcu_0\varepsilon^{3/4}=\text{costante},\tag{2}$$

$$u_\alpha\varepsilon^{1/4}=\text{costante}.\tag{3}$$

In base alla (3), tutte le componenti covarianti u_α sono grandezze dello stesso ordine. Tra le componenti controvarianti la maggiore è $u^3 = u_3/c^2$ (per $t \to 0$). Conservando nell'identità $u_iu^i = 1$ solo i termini dominanti, otteniamo perciò $u_0^2 \approx u_3u_3 = (u_3)^2/c^2$ e poi dalle (2) e (3):

$$\varepsilon \backsim \frac{1}{a^2b^2},\qquad u_\alpha \backsim \sqrt{ab},$$

oppure

$$\varepsilon \backsim t^{-2(p_1+p_2)}=t^{-2(1-p_3)},\qquad u_\alpha \backsim t^{(1-p_3)/2}.\tag{4}$$

Come c'era da aspettarsi, ε tende all'infinito, quando $t \to 0$, per tutti i valori di p_3, tranne che per $p_3 = 1$, il che è dovuto al fatto che la singolarità nella metrica con gli indici (0, 0, 1) non ha un senso fisico.

La validità dell'approssimazione utilizzata è verificata dalla valutazione delle componenti T_i^k, omesse nei secondi membri delle equazioni (117,2) e (117,3). I loro termini dominanti sono:

$$T_0^0 \sim \varepsilon u_0^2 \backsim t^{-(1+p_3)}, \quad T_1^1 \sim \varepsilon \backsim t^{-2(1-p_3)},$$

$$T_2^2 \sim \varepsilon u_2 u^2 \backsim t^{-(1+2p_2-p_3)}, \quad T_3^3 \sim \varepsilon u_3 u^3 \backsim t^{-(1+p_3)}.$$

Infatti, per $t \to 0$ tutti crescono piú lentamente dei primi membri delle equazioni, che vanno invece come t^{-2}.

§ 118. *Regime oscillatorio di avvicinamento ad un punto singolare*

Sull'esempio del modello dell'Universo con spazio uniforme del tipo IX studiamo una singolarità della metrica rispetto al tempo di arattere oscillatorio (*V. A. Belinski, E. M. Lifšic, I. M. Khalatnikov*, 1968). Vedremo nel prossimo paragrafo che tale carattere ha un significato abbastanza generale.

Ci interesseremo al comportamento del modello in vicinanza di un punto singolare (che sceglieremo come origine del tempo, $t = 0$). Come nella soluzione di Kasner, esaminata nel § 117, la presenza della materia non influisce sulle proprietà qualitative di questo comportamento, e per semplificare lo studio supporremo lo spazio vuoto.

Nella (116,3) supporremo diagonale la matrice $\eta_{ab}(t)$ e indicheremo i suoi elementi diagonali con a^2, b^2, c^2; indichiamo ora i tre vettori di riferimento $\mathbf{e}^{(1)}\mathbf{e}^{(2)}$, $\mathbf{e}^{(3)}$ con $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$. La metrica spaziale si scriverà allora nella forma

$$\gamma_{\alpha\beta} = a^2 l_\alpha l_\beta + b^2 m_\alpha m_\beta + c^2 n_\alpha n_\beta. \tag{118,1}$$

Per lo spazio del tipo IX le costanti di struttura sono[1]):

$$C^{11} = C^{22} = C^{33} = 1 \tag{118,2}$$

(dove $C^1{}_{23} = C^2{}_{31} = C^3{}_{12} = 1$).

---

[1]) I vettori di riferimento corrispondenti a queste costanti sono:

$$\mathbf{l} = (\operatorname{sen} x^3, -\cos x^3 \operatorname{sen} x^1, 0), \mathbf{m} = (\cos x^3, \operatorname{sen} x^3 \operatorname{sen} x^1, 0)\ \mathbf{n} = (0, \cos x^1, 1).$$

Le coordinate assumono i valori compresi negli intervalli: $0 \leqslant x^1 \leqslant \pi$, $0 \leqslant x^2 \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant x^3 \leqslant 4\pi$. Lo spazio è chiuso; il suo volume è

$$V = \int \sqrt{\gamma}\, dx^1\, dx^2\, dx^3 = abc \int \operatorname{sen} x^1\, dx^1\, dx^2\, dx^3 = 16\pi^2 abc.$$

Per $a = b = c$, questo spazio diventa uno spazio a curvatura positiva costante di raggio di curvatura $2a$.

Dalla (116,26) si vede che, date queste costanti e la matrice diagonale η_{ab}, le componenti $R^0_{(a)}$ del tensore di Ricci si annullano identicamente nel sistema di riferimento sincrono. Secondo la (116,24) si annullano anche le componenti non diagonali $P_{(a)(b)}$. Le altre componenti delle equazioni di Einstein danno per le funzioni $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ un sistema di equazioni:

$$\frac{(\dot{a}bc)^{\cdot}}{abc} = \frac{1}{2a^2b^2c^2}\,[(b^2-c^2)^2-a^4],$$

$$\frac{(a\dot{b}c)^{\cdot}}{abc} = \frac{1}{2a^2b^2c^2}\,[(a^2-c^2)^2-b^4], \tag{118,3}$$

$$\frac{(ab\dot{c})^{\cdot}}{abc} = \frac{1}{2a^2b^2c^2}\,[(a^2-b^2)^2-c^4].$$

$$\frac{\ddot{a}}{a}+\frac{\ddot{b}}{b}+\frac{\ddot{c}}{c}=0 \tag{118,4}$$

(dove le (118,3) derivano da $R^{(1)}_{(1)} = R^{(2)}_{(2)} = R^{(3)}_{(3)} = 0$; la (118,4) è l'equazione $R^0_0 = 0$).

Le derivate rispetto al tempo nel sistema di equazioni (118,3-4) assumono una forma piú semplice, se in luogo delle funzioni a, b, c si introducono i loro logaritmi α, β, γ:

$$a = e^{\alpha}, \quad b = e^{\beta}, \quad c = e^{\gamma}, \tag{118,5}$$

e in luogo di t la variabile τ definita da

$$dt = abc\,d\tau. \tag{118,6}$$

Allora

$$\begin{aligned} 2\alpha_{,\tau,\tau} &= (b^2-c^2)^2-a^4, \\ 2\beta_{,\tau,\tau} &= (a^2-c^2)^2-b^4, \\ 2\gamma_{,\tau,\tau} &= (a^2-b^2)^2-c^4, \end{aligned} \tag{118,7}$$

$$\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)_{,\tau,\tau} = \alpha_{,\tau}\beta_{,\tau}+\alpha_{,\tau}\gamma_{,\tau}+\beta_{,\tau}\gamma_{,\tau}, \tag{118,8}$$

dove l'indice τ indica la derivazione rispetto a τ. Sommando termine a termine le equazioni (118,7) e sostituendo nel primo membro la somma delle derivate seconde conformemente alla (118,8), otteniamo:

$$\alpha_{,\tau}\beta_{,\tau}+\alpha_{,\tau}\gamma_{,\tau}+\beta_{,\tau}\gamma_{,\tau} = \frac{1}{4}(a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2). \tag{118,9}$$

Questa relazione contiene soltanto le derivate prime e rappresenta un integrale primo delle equazioni (118,7).

Le equazioni (118,3), (118,4) non possono essere risolte esattamente in forma analitica, ma in vicinanza del punto singolare è possibile uno studio qualitativo dettagliato.

Osserviamo, innanzitutto, che in assenza dei secondi membri nelle equazioni (118,3) (oppure, il che è lo stesso, nelle equazioni (118,7)) il sistema avrebbe una soluzione esatta nella quale

$$a \sim t^{p_l}, \quad b \sim t^{p_m}, \quad c \sim t^{p_n}, \tag{118,10}$$

dove p_l, p_m, p_n sono numeri legati dalle relazioni

$$p_l + p_m + p_n = p_l^2 + p_m^2 + p_n^2 = 1 \tag{118,11}$$

(un analogo della soluzione di Kasner (117,8) per lo spazio omogeneo piatto). Abbiamo indicato qui gli esponenti delle potenze con p_l, p_m, p_n, senza disporli in ordine crescente; conserviamo qui le notazioni p_1, p_2, p_3, tratte dal § 117, per le terne di numeri disposti nell'ordine $p_1 < p_2 < p_3$ e che percorrono i valori compresi negli intervalli (117,10). Questi numeri possono essere rappresentati sotto forma parametrica come segue:

$$p_1(u) = \frac{-u}{1+u+u^2}, \quad p_2(u) = \frac{1+u}{1+u+u^2}, \quad p_3(u) = \frac{u(1+u)}{1+u+u^2}. \tag{118,12}$$

Tutti i valori diversi di p_1, p_2, p_3 (osservando l'ordine convenuto) si ottengono, quando il parametro u percorre i valori compresi nella regione $u \geqslant 1$. I valori $u < 1$ sono compresi nella stessa regione

$$p_1\left(\frac{1}{u}\right) = p_1(u), \quad p_2\left(\frac{1}{u}\right) = p_3(u), \quad p_3\left(\frac{1}{u}\right) = \tag{118,13}$$

Nella fig. 25 sono rappresentati i grafici di p_1, p_2, p_3 in funzione di $1/u$.

Supponiamo che in un certo intervallo di tempo i secondi membri delle equazioni (118,7) siano effettivamente trascurabili e che abbia luogo il regime kasneriano (118,10). Una tale situazione non può continuare indefinitamente (per $t \to 0$), perché tra i termini indicati ci sono sempre quelli che crescono. Per esempio, se l'esponente nella funzione $a(t)$ è negativo ($p_l = p_1 < 0$), la perturbazione del regime kasneriano sarà originata dai termini in a^4, mentre gli altri termini decresceranno al diminuire di t.

Conservando nei secondi membri della (118,7) soltanto questi termini, otterremo un sistema di equazioni:

$$\alpha_{,\tau,\tau} = -\frac{1}{2} e^{4\alpha},$$

$$\beta_{,\tau,\tau} = \gamma_{,\tau,\tau} = \frac{1}{2} e^{4\alpha}. \tag{118,14}$$

La soluzione di queste equazioni deve descrivere l'evoluzione della metrica a partire da uno stato « iniziale » nel quale[1]) essa è descritta dalle formule (118,10) con una determinata combinazione degli esponenti (dove $p_l < 0$); siano $p_l = p_1$, $p_m = p_2$, $p_n = p_3$, in modo che

$$a = t^{p_1}, \quad b = t^{p_2}, \quad c = t^{p_3}$$

(in queste espressioni i coefficienti di proporzionalità si possono porre uguali ad uno, senza pregiudicare la generalità del risul-

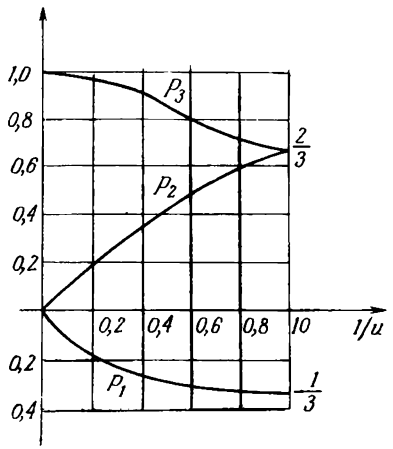

Fig. 25

tato che sarà ottenuto piú avanti). Inoltre, $abc = t$, $\tau = \ln t +$ $+$ costante; quindi, le condizioni iniziali per le equazioni (118,14) hanno la forma

$$\alpha_{,\tau} = p_1 \quad \beta_{,\tau} = p_2, \quad \gamma_{,\tau} = p_3.$$

La prima delle equazioni (118,14) ha la forma di una equazione del moto unidimensionale di una particella nel campo di una barriera di potenziale esponenziale dove α ha il ruolo di coordinata. Per questa analogia, al regime iniziale kasneriano corrisponde un moto libero a velocità costante $\alpha_{,\tau} = p_1$. Respinta dalla barriera la particella riprenderà il suo moto libero con la stessa velocità ma di segno opposto: $\alpha_{,\tau} = -p_1$. Osserviamo anche che, in virtú

[1]) Ricordiamo che esaminiamo qui l'evoluzione della metrica per $t \to 0$; di conseguenza, le condizioni « iniziali » corrispondono ad un tempo successivo. e non precedente.

delle tre equazioni (118,14),

$$\alpha_{,\tau} + \beta_{,\tau} = \text{costante}, \quad \alpha_{,\tau} + \gamma_{,\tau} = \text{costante},$$

di conseguenza, si vede che $\beta_{,\tau}$ e $\gamma_{,\tau}$ assumeranno i valori $\beta_{,\tau} = p_2 + 2p_1$, $\gamma_{,\tau} = p_3 + 2p_1$. Determinando di qui α, β, γ e t mediante la (118,6), otteniamo:

$$e^{\alpha} \sim e^{-p_1\tau}, \quad e^{\beta} \sim e^{(p_2+2p_1)\tau}, \quad e^{\gamma} \sim e^{(p_3+2p_1)\tau}, \quad t \sim e^{(1+2p_1)\tau},$$

cioè $a \sim t^{p'_l}$, $b \sim t^{p'_m}$, $c \sim t^{p'_n}$, dove

$$p'_l = \frac{|p_1|}{1-2|p_1|}, \quad p'_m = -\frac{2|p_1|-p_2}{1-2|p_1|}, \quad p'_n = \frac{p_3-2|p_1|}{1-2|p_1|}. \quad (118,15)$$

Ne segue che l'azione della perturbazione provoca il passaggio da un « regime kasneriano » ad un altro, e la potenza negativa di t si sposta dalla direzione l alla direzione m: se era $p_l < 0$, si ha ora $p'_m < 0$. Nel processo di sostituzione la funzione $a(t)$ passa per un massimo, e $b(t)$ per un minimo: la grandezza $b(t)$, decrescente prima, comincia a crescere, e la crescente $a(t)$ comincia a decrescere, mentre la funzione $c(t)$ continua a diminuire. La perturbazione stessa (i termini a^4 nelle equazioni (118,7)), che prima cresceva, comincia a decrescere sino a risultare smorzata. Un'ulteriore evoluzione della metrica, al crescere della perturbazione espressa dai termini b^4 nelle equazioni (118,7), condurrà in modo analogo ad un'altra sostituzione degli indici kasneriani, ecc.

È comodo rappresentare la regola della successione degli esponenti (118,15) con l'aiuto della parametrizzazione della (118,12): se

$$p_l = p_1(u), \quad p_m = p_2(u), \quad p_n = p_3(u),$$

allora

$$p'_l = p_2(u-1), \quad p'_m = p_1(u-1), \quad p'_n = p_3(u-1). \quad (118,16)$$

Resta positivo il maggiore dei due esponenti positivi.

In questo processo di successione dei regimi kasneriani si può capire quale è il carattere dell'evoluzione della metrica nel processo di avvicinamento al punto singolare.

Gli scambi successivi (118,16) nei quali l'esponente negativo (p_1) si sposta tra le direzioni l ed m continuano fino a che non sarà esaurita la parte intera del valore iniziale di u e non si avrà $u < 1$. Il valore $u < 1$ si trasforma in $u > 1$ secondo la (118,13); in questo istante è negativo l'esponente p_l o p_m, mentre p_n diventa il minore dei due numeri positivi ($p_n = p_2$). La serie successiva degli scambi sposterà ora l'esponente negativo tra la direzione n ed l

oppure tra n ed m. Per un valore iniziale arbitrario (irrazionale) di u il processo di alternanza di regimi continua indefinitamente.

Per una soluzione esatta delle equazioni, gli esponenti p_1, p_2, p_3 perdono, naturalmente, il significato letterale. Notiamo che questa circostanza conferisce alla definizione di questi numeri (e con essi al parametro u) una certa « indeterminazione », che, pur essendo piccola, toglie senso allo studio di valori privilegiati (ad esempio, razionali) di u. Per questo ha un significato reale solo il caso generale di valori arbitrari irrazionali di u.

In tal modo, il processo di evoluzione del modello verso il punto singolare è composto di serie successive di oscillazioni; durante ciascuna di queste serie le distanze lungo due assi spaziali oscillano, e lungo il terzo asse decrescono in modo monotono; il volume decresce secondo una legge circa propozionale a t. Passando da una serie ad un'altra, la direzione, lungo la quale le distanze decrescono in modo monotono, si trasferisce da un asse all'altro. L'ordine di questi passaggi acquista asintoticamente il carattere di un processo casuale. Lo stesso carattere assume anche l'ordine di alternanza delle lunghezze delle serie successive di oscillazioni (cioè dei numeri che cambiano in ogni serie di « regimi kasneriani »)[1])

Le serie successive di oscillazioni si accumulano quando ci si avvicina al punto singolare. Tra un qualsiasi istante finale del tempo d'universo t e l'istante $t = 0$ è compresa un'infinità di oscillazioni. L'andamento temporale di questa evoluzione dato da una variabile naturale che non è il tempo stesso t, bensí il suo logaritmo, $\ln t$, secondo il quale l'intero processo di avvicinamento al punto singolare si estende a $-\infty$.

Nell'esporre la soluzione abbiamo semplificato sin dall'inizio il problema, supponendo diagonale la matrice $\eta_{ab}(t)$ nella (116,3). L'introduzione di componenti non diagonali η_{ab} nella metrica non cambia il descritto carattere oscillatorio dell'evoluzione della metrica e della legge (118,16) di scambio degli esponenti p_l, p_m, p_n delle epoche kasneriane che si alternano. Ma questa introduzione

---

[1]) Se il valore « iniziale » del parametro u è $u_0 = k_0 + x_0$ (dove k_0 è un numero intero, ed $x_0 < 1$), la lunghezza della prima serie di oscillazioni sarà allora k_0, e il valore iniziale di u per la serie successiva diventa $u_1 = 1/x_0 = k_1 + x_1$, ecc. Da qui è facile concludere che le lunghezze delle serie successive sono date dagli elementi k_0, k_1, k_2, . . . dello sviluppo di u_0 in una frazione continua infinita (per u_0 irrazionale)

$$u_0 = k_0 + \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{k_2 + \cfrac{1}{k_3 + \dots}}}.$$

L'alternarsi dei valori degli elementi piú lontani di un tale sviluppo avviene con leggi statistiche.

tuttavia fa sí che appaia una proprietà supplementare: lo scambio degli esponenti è accompagnato anche dal cambiamento delle direzioni degli assi alle quali si riferiscono questi esponenti[1]).

§ 119. *Singolarità rispetto al tempo nella soluzione cosmologica generale delle equazioni di Einstein*

Come è stato già detto, il fatto che il modello di Fridman sia adeguato alla descrizione dello stato attuale dell'Universo, di per se stesso, non permette di sperare che questo modello sia altrettanto adeguato alla descrizione degli stadi iniziali dell'evoluzione dell'Universo. Sorge quindi, anzitutto, la domanda: in che misura la presenza di un punto singolare rispetto al tempo è in generale una proprietà necessaria dei modelli cosmologici, e non è dovuta a specifiche ipotesi semplificanti (in primo luogo, alla simmetria) sulle quali sono basati questi modelli? Sottolineiamo che parlando di un punto singolare, noi alludiamo ad una proprietà fisica, e cioè al fatto che diventano infinite le densità della materia e gli invarianti del tensore di curvatura quadridimensionale.

L'indipendenza da ipotesi specifiche significherebbe che la presenza della singolarità è propria non soltanto delle soluzioni particolari, ma anche della soluzione generale delle equazioni di Einstein. Il criterio di generalità per una soluzione consiste nel numero di funzioni « fisicamente arbitrarie » che essa contiene. Nella soluzione generale il numero di tali funzioni deve essere sufficiente per fissare arbitrariamente le condizioni iniziali in un qualsiasi istante scelto (4 per lo spazio vuoto, 8 per lo spazio riempito di materia; vedi § 95)[1]).

Non è naturalmente possibile trovare una soluzione generale in forma esatta per l'intero spazio e tutto il tempo. Per la

---

[1]) Per questa e altre proprietà del comportamento dei modelli cosmologici uniformi del tipo considerato si veda *V. A. Belinski, E. M. Lifšic, I. M. Khalatnikov, Adv. in Physics*, 19, 525 (1970); 31,639 (1982).

[2]) Sottolineiamo subito, però, che la nozione di soluzione generale non è univoca per un sistema di equazioni differenziali non lineari, quali sono le equazioni di Einstein. In linea di massima, possono esistere piú integrali generali, ciascuno dei quali abbraccia non tutta la varietà di condizioni iniziali pensabili, bensí una sua parte finita. Di conseguenza, l'esistenza di una soluzione generale con singolarità non esclude la presenza di altre soluzioni generali senza singolarità. Per esempio, non c'è nessuna ragione per mettere in dubbio l'esistenza di una soluzione generale senza singolarità che descrive un corpo stabile isolato di massa non troppo grande.

soluzione del problema posto questo non è necessario: è sufficiente studiare la forma della soluzione in vicinanza della singolarità.

La caratteristica della singolarità di cui è dotata la soluzione di Fridman sta nel fatto che la riduzione a zero delle distanze spaziali avviene secondo una legge identica in tutte le direzioni. Tale tipo di singolarità non è sufficientemente generale: esso è proprio della classe di soluzioni, contenente solamente tre funzioni arbitrarie delle coordinate (vedi problema del § 113). Notiamo anche che queste soluzioni esistono soltanto per uno spazio riempito di materia.

Per quanto riguarda la singolarità del modello di tipo oscillatorio, esaminata nel paragrafo precedente, essa ha un carattere generale: esiste una soluzione delle equazioni di Einstein con una tale singolarità, che contiene tutto l'insieme necessario di funzioni arbitrarie. Descriveremo qui in breve il metodo di costruzione di tale soluzione, senza entrare nei particolari del calcolo[1]).

Come anche nel modello uniforme (§ 118), il regime di avvicinamento al punto singolare nella soluzione generale è composto di serie alternantisi di « epoche kasneriane ». Durante ciascuna di queste epoche i termini principali (rispetto a $1/t$) del tensore metrico spaziale (nel sistema di riferimento sincrono) hanno la forma (118,1) con le funzioni del tempo a, b, c date dalla (118,10), ma i vettori **l**, **m**, **n** rappresentano ora funzioni arbitrarie (e non completamente determinate, come nel modello uniforme) delle coordinate spaziali. Funzioni analoghe (e non semplicemente numeri) sono ora anche gli esponenti p_l, p_m, p_n che sono legati tra di loro, come prima, dalle relazioni (118,11). La metrica cosí costruita soddisfa le equazioni $R_0^0 = 0$ ed $R_\alpha^\beta = 0$ per un campo nel vuoto (nei loro termini dominanti) durante un certo intervallo di tempo. Le equazioni $R_\alpha^0 = 0$ invece conducono a tre relazioni (non contenenti il tempo) che debbono essere imposte alle funzioni arbitrarie delle coordinate spaziali, contenute in $\gamma_{\alpha\beta}$. Queste relazioni legano tra di loro 10 funzioni differenti: tre componenti di ciascun vettore **l**, **m**, **n** e una funzione degli esponenti delle potenze del tempo (una qualsiasi delle tre funzioni p_l, p_m, p_n legate da due condizioni (118,11)). Nel determinare il numero delle funzioni fisicamente arbitrarie bisogna anche prendere in considerazione che il sistema di riferimento sincrono ammette ancora trasformazioni arbitrarie di tre coordinate spaziali, e non del tempo. Di conseguenza, la metrica contiene in tutto $10 - 3 - 3 = 4$ funzioni arbitrarie: esattamente quante ce ne devono essere nella soluzione generale per il campo nel vuoto.

---

[1]) Questi particolari si possono trovare nell'articolo: *V. A. Belinski, E. M. Lifšic, I. M. Khalatnkiov, Adv. in Physics*, **31**, 639 (1982).

La sostituzione di un'epoca kasneriana con un'altra avviene (come anche nel modello uniforme) grazie alla presenza, in tre delle sei equazioni $R_\alpha^\beta = 0$, di termini che al decrescere di t crescono piú velocemente degli altri e, di consequenza, svolgono il ruolo di una perturbazione che distrugge il regime kasneriano. Nel caso generale queste equazioni hanno una forma che si distingue dalle equazioni (118,14) soltanto per il fattore (l rot l/l [mn])[2], dipendente dalle coordinate spaziali, che si trova nei loro secondi membri (si suppone che dei tre esponenti p_l, p_m, p_n sia negativo p_l)[1]). Poiché, tuttavia, le equazioni (118,14) costituiscono un sistema di equazioni differenziali ordinarie rispetto al tempo, questa distinzione non influisce in nessun modo sulla loro soluzione e sulla legge di scambio degli esponenti kasneriani (118,16) che segue da questa soluzione, e quindi su tutte le ulteriori conseguenze esposte nel § 118[2]).

Il grado di generalità della soluzione non diminuisce se si introduce la materia; la materia si « inserisce » nella metrica con le nuove 4 funzioni delle coordinate che la riguardano, necessarie per definire le distribuzioni iniziali della sua densità e le tre componenti della velocità. Il tensore energia-impulso della materia T_i^k introduce nelle equazioni del campo termini che risultano di un ordine piú elevato in $1/t$ dei termini principali (in modo analogo a quanto esposto nel problema 3 del § 117 per il modello iniforme piatto).

In tal modo, l'esistenza di singolarità rispetto al tempo è una proprietà molto generale delle soluzioni delle equazioni di Einstein; inoltre, il regime di avvicinamento al punto singolare ha, nel caso generale, un carattere oscillatorio[3]). Sottolineiamo che questa caratteristica non è dovuta alla presenza della materia (e, di conseguenza, alla sua equazione di stato); essa è una caratteristica dello spazio-tempo già, di per sé, vuoto. Per quanto concerne la singolarità del tipo monotono isotropo, propria della soluzione di Friedman e dipendente dalla presenza della materia, essa ha un'importanza particolare.

---

[1] Per il modello uniforme questo fattore coincide con il quadrato della costante di struttura C^{11} ed è costante per definizione.

[2]) Se le funzioni arbitrarie della soluzione sono sottoposte alla condizione supplementare l rot l = 0, le oscillazioni sono assenti e il regime kasneriano continuerà sino al punto stesso $t = 0$. Tuttavia una tale soluzione contiene una funzione in meno rispetto al caso generale.

[3]) Il fatto dell'esistenza di un punto singolare nella soluzione generale delle equazioni di Einstein è stato dimostrato per la prima volta da *R. Penrose* (1965) con metodi topologici i quali, però, non permettono di stabilire il carattere concreto analitico della singolarità. Per metodi e teoremi ottenuti con essi si veda R. Penrose, *Structure of space-time*, W. Bengamin, N. Y. 1968.

Parlando di singolarità, sotto l'apetto cosmologico intendiamo che il punto singolare influenzi tutto lo spazio e non soltanto una sua parte limitata, come nel collasso gravitazionale di un corpo finito. Ma il carattere generale della soluzione oscillatoria permette di ritenere che sia dello stesso tipo anche la singolarità raggiunta da un corpo finito in collasso sotto l'orizzonte degli eventi nel sistema di riferimento in moto solidale.

Abbiamo parlato sinora della direzione di avvicinamento al punto singolare come della direzione dei tempi decrescenti; data la simmetria delle equazioni di Einstein rispetto al cambiamento del segno del tempo, si potrebbe parlare, con lo stesso diritto, di avvicinamento al punto singolare nella direzione dei tempi crescenti. Tuttavia in realtà, data la non equivalenza fisica del futuro e del passato, tra questi due casi vi è una differenza di fondo nell'impostazione stessa del problema. La singolarità nel futuro può avere un significato fisico solo a condizione che essa sia compatibile con condizioni iniziali arbitrarie, date in un certo istante precedente. È ovvio che non c'è ragione alcuna perché la distribuzione della materia e del campo, ottenuta ad un certo istante nel processo di evoluzione dell'Universo, corrisponda alle condizioni specifiche richieste per la realizzazione di una o di un'altra soluzione particolare delle equazioni di Einstein.

È poco probabile che lo studio basato solo sulle equazioni gravitazionali possa in generale dare una risposta univoca alla questione relativa al tipo di singolarità nel passato. È naturale credere che la scelta della soluzione corrispondente all'Universo reale sia dovuta a certe esigenze fisiche di fondo, che non possono essere stabilite sulla base della sola teoria gravitazionale esistente; tali esigenze possono essere precisate soltanto in seguito ad un'ulteriore sintesi delle teorie fisiche. Potrebbe risultare in questo senso che, in linea di massima, a questa scelta corrisponda un certo tipo particolare (isotropo, per esempio) di singolarità. Ciò nondimeno, risulta piú naturale credere *a priori* che, in virtú del carattere generale del regime oscillatorio, sia proprio quest'ultimo a descrivere gli stadi iniziali dell'evoluzione dell'Universo.

È necessario infine fare ancora la seguente osservazione. Il campo di applicazione delle equazioni di Einstein, non è in nessun modo limitato dalle piccole distanze o dalle grandi densità della materia nel senso che le equazioni non conducono, in questo limite, a nessuna contraddizione interna (contrariamente, ad esempio, alle equazioni classiche dell'elettrodinamica). In questo senso, lo studio delle singolarità della metrica spazio-temporale sulla base delle equazioni di Einstein è completamente corretto. Non vi è dubbio però, che in realtà, per il limite indicato, debbono verificarsi sostanzialmente fenomeni quantistici dei quali ancora noi, allo stato attuale della teoria, non possiamo dire niente. Soltanto una sintesi futura della

teoria della gravitazione e della teoria quantistica potrà precisare quali risultati della teoria classica conserveranno la loro validità. Nello stesso tempo, non vi è motivo di dubitare che la stessa comparsa di singolarità nelle soluzioni delle equazioni di Einstein (sia sotto l'aspetto cosmologico che per il collasso dei corpi finiti) ha un profondo significato fisico. Non bisogna dimenticare che ormai le enormi densità raggiunte nel corso di un collasso gravitazionale, anche se non offrono motivi per dubitare della validità della teoria classica della gravitazione, sono sufficienti per individuare in questo un fenomeno fisico « singolare ».

INDICE ANALITICO

Aberrazione della luce, 29
Astigmatismo, 185

Bianchi (tipi di spazio di), 498
Buco nero, 408

Campo gravitazionale a simmetria assiale, 398
Caso ultrarelativistico, 47
Caustica, 180, 200
Centro di massa, 66, 225, 444
Coefficiente di depolarizzazione, 165
Coefficienti di rotazione di Ricci, 384
Coerenza, 165, 290
Cono di luce, 21
Contrazione di Lorentz, 27
Coordinate galileiane, 299
Corrente di spostamento, 107
Costante gravitazionale, 352
Costanti di struttura, 496
Curvatura (tipi di Petrov), 348
Curvatura di Gauss, 345

Densità tensoriale, 305
Depolarizzazione di una luce diffusa, 289
Deriva in un campo, 84, 87
Deviazione geodetica, 343
Diffusione in un campo coulombiano, 132
Distanza focale, 187

Effetto Doppler, 157
Equazione di Hamilton-Jacobi, 49, 70, 322
Equazione di Killing, 355, 495
di Poisson, 123
di stato ultrarelativistica, 122
Equilibrio di un liquido rotante, 390
Ergosfera, 424

Fase di un'onda, 155
Formula di Thomson, 286
Forza di Lorentz, 73
di reazione della radiazione, 252
elettromotrice, 96
Funzione delta, 100
di Airy, 201

Gauge di Lorentz, 149
Geometria pseudoeuclidea, 18
Gruppo dei movimenti, 494

Hubble (costante di), 482

Iconale, 176
Identità di Bianchi, 344
Immagine telescopica, 188
Interazione di dipolo, 139
Intervalli del genere luce, 32
del genere spazio, 20
del genere tempo, 19
Invarianti adiabatici, 81
Irraggiamento efficace, 236

Lagrangiana di due particelle cariche, 275
Legge di Biot-Savart, 142
Lente magnetica, 189
Linea d'universo, 17
Linea geodetica, 321
Luce naturale, 163
Lunghezza del cammino ottico, 182

[1]) Questo indice completa l'indice generale del libro, senza però ripeterlo. Esso include concetti e termini che non entrano nell'indice generale.

Massa inerziale e gravitazionale 434
Materia incoerante, 378, 473
Metrica conformeme-euclidea, 397, 469
conforme-galileiana, 477
di Kasner, 502
di Kerr, 421
di Schwarzschild, 393
Momento di quadrupolo elettrico, 135
delle masse, 388
Moto uniformemente accelerato, 42
Moto nel campo di un'onda piana, 153

Orizzonte degli eventi, 407, 424
Oscillatore in un campo magnetico, 82

Pacchetto d'onda, 177
Parametri di Stokes, 165
Perdita di momento angolare per irraggiamento 256, 271, 462
Polarizzazione ellittica, 156
lineare, 157
Potenziale gravitazionale, 297
Precessione di una trottola nel campo gravitazionale, 445
di Larmor, 146
Pressione della luce, 152
Principio di Babinet, 208
di equivalenza, 296
di Fermat, 179, 332
di Huyghens, 197
di Maupertuis, 78
di sovrapposizione, 97
Pseudotensori, 35
Punti d'universo, 17

Raggio dell'elettrone, 126
gravitazionale, 393
Rinormalizzazione della massa, 125

Segnatura della matrice, 300
Simboli di Christoffel, 313
Sincronizzazione del tempo, 311, 326
Sistema di riferimento inerziale, 13
in moto solidale, 378, 397
localmente geodetico, 317
Sistema d'unità di Gauss, 99
di Heaviside, 99
Spazio delle fasi, 51
delle velocità, 58
Spostamento secolare dell'orbita, 401, 436, 444
Spostamento verso il rosso, 328
cosmologico, 481

Tempo universale, 325
Tensore di polarizzazione, 163
di Ricci, 344
metrico, 34, 303
Tensori duali, 35
Traccia di un tensore, 33

Vettori assiali, polari, 36
Vettore campo elettrico e campo magnetico, 73
di Hertz, 253
d'onda, 155
di Poynting, 108